Konjunktívne dotazy

Ján Šturc

Jar, 2013

Konjunktívne dotazy – conjunctive queries (CQ)

- Konjunktívny dotaz pozostáva z jediného datalógového pravidla, ktorého telo obsahuje iba EDB predikáty.
  - $p(X) \leftarrow r_1, \ldots, r_n$
- Konjunktívny dotaz definuje zobrazenie EDB do relácie odpovede, ktorá je definovaná hlavou tohto pravidla.
- Algebraická forma: $\Pi_X(R_1 \bowtie \ldots \bowtie R_n)$.
- SQL: **select** X **from** $R_1, \ldots, R_n$
  where <spájacie podmienky>

Neskôr ho rozšírime aj o selekcie.

Containment (subsumcia, pohltenie)

- $Q_1 \subseteq Q_2$ práve vtedy, ak pre všetky db D, $Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$.
- Príklad:
  - Q_1: $p(x,y) \leftarrow arc(x,z),\ arc(z,y)$
  - Q_2: $p(x,y) \leftarrow arc(x,z),\ arc(w,y)$
- Databáza je o hranách grafu;
  - Q_1 definuje cesty dĺžky 2.
  - Q_2 definuje dvojice vrcholov také, že z prvého vychádza hrana a do druhého vchádza hrana.
- Vždy, keď existuje cesta z x do y, musí z x vychádzať hrana a do y vchádzať hrana. Preto každá dvojica <x,y>, ktorá je odpoveď na dotaz Q_1 je aj odpoveď na dotaz Q_2.
- Teda $Q_1 \subseteq Q_2$ alebo inak $Q_1 \Rightarrow Q_2$.

Dôvody zaoberať sa containmentom

- Optimalizácia: Ak sa nám podarí rozdeliť dotaz na konjunktívne dotazy, môžeme vynechať časti pohltené iným CQ.
- Integrácia IS: subsumcia CQ je často jediný spôsob ako zistiť, že nejaká informácia je zbytočná.
- Containment implikuje ekvivalenciu dotazov (programov):

  $Q_1 \cong Q_2$ práve vtedy, keď $Q_1 \subseteq Q_2$ a $Q_2 \subseteq Q_1$.
  - Akákoľvek teória programovania a optimalizácie potrebuje vedieť, kedy sú programy ekvivalentné.
  - Zovšeobecnenie CQ o ktorom budeme hovoriť je najväčšia trieda dotazov, o ktorej vieme, že problém ekvivalencie je rozhodnuteľný.
- Umelá inteligencia v rôznych aplikáciach prijala logiku CQ, hoci CQ pochádzajú z teórie databáz.

Testovanie pohltenia

- Dva prístupy:
  1. Pohlcujúce zobrazenia.
  2. Kánonické databázy.
- Pre jednoduché CQ o akých sme hovorili doteraz je jedno, ktorý prístup použijeme.
- Containment je NP- complete, ale CQ sú obvykle dosť malé (krátke), tak nám ani exponenciálna zložitosť veľmi neuškodí.

Containment mapping – pohlcujúce zobrazenie

Definícia: Zobrazenie z premenných CQ Q_2 do premenných CQ Q_1 také, že:

1. hlava Q_2 sa zobrazi na hlavu Q_1
2. a každý podcieľ Q_2 sa zobrazí do nejakého podcieľa Q_1 s tým istým predikátom,

sa nazýva pohlcujúce zobrazenie. Hovoríme, že Q_2 pohlcuje Q_1 alebo, že Q_1 je obsiahnuté v Q_2.

Pohlcujúce zobrazenie je „písmenkový“ homomorfizmus.

Písmenkový homomorfizmus môže mapovať premenné na konštanty, nie však „pôvodné“ konštanty na premenné.

Veta: $Q_1 \subseteq Q_2$ práve vtedy, ak existuje pohlcujúce zobrazenie z Q_2 do Q_1.

Príklad

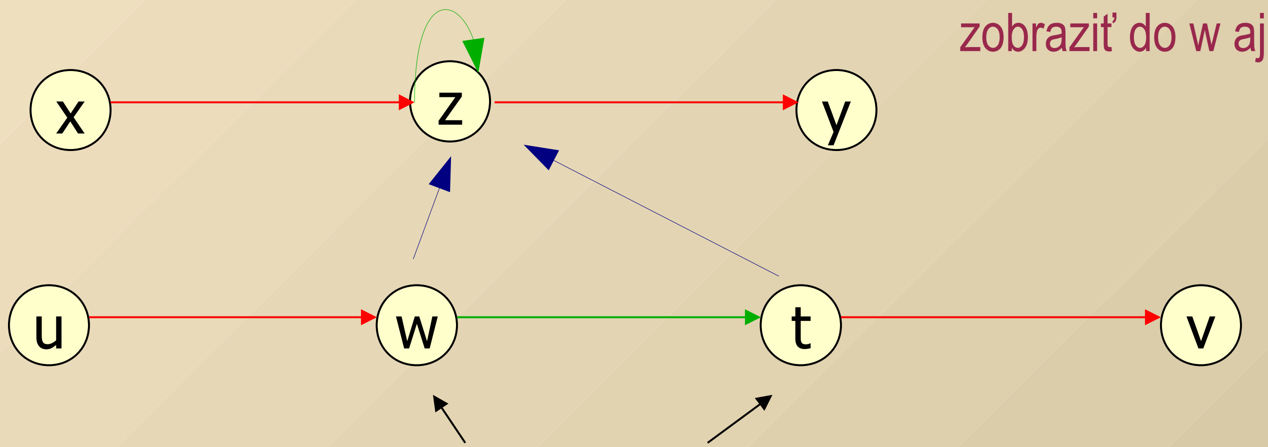
Q_1: $p(x, y) \leftarrow r(x, z), g(z, z), r(z, y)$

Q_2: $p(u, v) \leftarrow r(u, w), g(w, t), r(t,v)$

Pohlcujúce zobrazenie z Q_1 do Q_2 neexistuje, pretože existuje jediný podcieľ s g a z sa nemôže súčasne zobraziť do w aj do t.

Q_1:

Q_2:



Pretože je možné w=t,
$Q1 \subseteq Q2$.

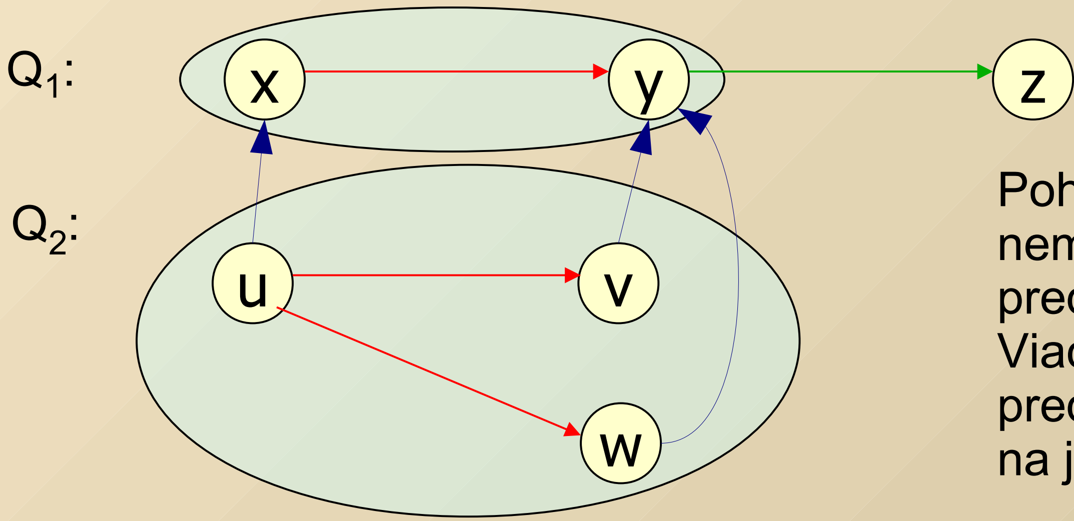
Písmenkový homomorfizmus:
$u \longrightarrow x$, $w \longrightarrow z$, $t \longrightarrow z$, $v \longrightarrow y$

Iný príklad

Q_1: $p(x, y) \leftarrow r(x, y), g(y, z)$

Q_2: $p(u, v) \leftarrow r(u, v), r(u, w)$

Pohlcujúce zobrazenie z Q_1 do Q_2 neexistuje, pretože jediný podcieľ s g sa nemá do čoho zobraziť.



Pohlcujúce zobrazenie nemusí pokryť všetky predikáty cieľového dotazu. Viac inštancií toho istého predikátu sa môže zobraziť na jednu.

Písmenkový homomorfizmus:
$u \longrightarrow x$, $v \longrightarrow y$, $w \longrightarrow y$

$Q1 \subseteq Q2.$

Dôkaz vety – h: $Q_2 \rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$

- Predpokladajme, že existuje pohlcujúce zobrazenie h: $Q_2 \rightarrow Q_1$.
- Musíme dokázať, že pre každdú databázu D $Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$.
- T.j. pre ľubovolnú n-ticu $t \in Q_1(D)$ musíme dokazať, že platí $t \in Q_2(D)$.
- Čo znamená $t \in Q_1(D)$?
- Existuje substitúcia σ taká, že
  - pre každý podcieľ G z Q_1 je $G\sigma$ fakt v D
  - $t = H_1\sigma$, H_1 je hlava dotazu Q_1

Dokončenie prvej časti dôkazu

- Vypočítajme $(Q_2h)\sigma = Q_2(\sigma\circ h)$

$$\begin{array}{ccc}
H_2 \text{ hlava } Q_2 & \qquad & G_{2,\,j} \text{ podciel } Q_2 \\
\big\downarrow h & & \big\downarrow h \\
H_1 \text{ hlava } Q_1 & & G_{1,\,i} \text{ podciel } Q_1 \\
\big\downarrow \sigma & & \big\downarrow \sigma \\
t & & \text{n-tica v } D
\end{array}$$

Zložené zobrazenie $\sigma\circ h$ zobrazí každý podcieľ Q_2 na n-ticu z D.

Dokazuje, že zložené zobrazenie $\sigma\circ h$ generuje odpovede na dotaz Q_2 a každá n-tica t je aj odpoveď na dotaz Q_1 t.j.

$Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$.

Petrifikované konjunktívne dotazy (Frozen CQ)

Definícia: ***Petrifikovaný*** konjunktívny dotaz ***je databáza***, ktorá vznikne z dotazu Q nasledujúcimi krokmi:

– Pre každú premennú x dotazu Q vytvoríme unikátnu „premennú-konštantu“ x_p – *petrifikovanú premennú*.

1. Pre každý predikát v Q vytvoríme v databáze reláciu s rovnakým názvom.
2. Pre každý podcieľ Q pridáme do relácie zodpovedajúcej tomuto podcieľu n-ticu, ktorá vznikne nahradením premenných v tomto podcieli príslušnými konštantami.

Príklad: $Q \equiv p(x, y) \leftarrow r(x, z), g(z, z), r(z, y)$

$Q_p \equiv \{ r = \{(x_p,z_p), (z_p,y_p)\}, g = \{(z_p,z_p)\} \}$

Dôkaz vety 2. časť

$Q_1(D) \subseteq Q_2(D) \Rightarrow \exists h(h: Q_2 \rightarrow Q_1)$

- Predpkladáme $Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$ a musíme dokázať, že existuje pohlcujúce zobrazenie $h: Q_2 \rightarrow Q_1$.
- Nech D je petrifikácia dotazu Q_1. (D = petr(Q))
- Tvrdenie: $Q_1(D)$ obsahuje petrifikovanú hlavu Q_1. T.j. hlavu Q_1, v ktorej premenné sú nahradené konštantami – svojimi petrifikátmi.
  - Dôkaz: Základom petrifikácie je substitúcia $\varpi = \{x \mapsto x_p\}_{x \in var(Q)}$. Táto substitúcia vytvára relácie v D z podcieľov Q_1. Ak použijeme ϖ na hlavu dostaneme ***petrifikovanú hlavu***, preto musí byť táto odpoveď na $Q_1(D)$.

Dôkaz vety 2. časť – dokončenie

- Pretože $Q_1(D) \subseteq Q_2(D)$, petrifikovaná hlava Q_1 musí byť v $Q_2(D)$.
- Preto, existuje zobrazenie σ z premenných Q_2 do D také, že zobrazuje podciele Q_2 na n-tice D a hlavu Q_2 na petrifikovanú hlavu Q_1.
- Ale n-tice D sú petrifikované podciele Q_1, teda σ nasledované „depetrifikáciou" $\boldsymbol{\varpi}^{-1}$ (Toto inverzné zobrazenie existuje, lebo petrifikáty premenných sú unikátne konštanty.) je pohlcujúce zobrazenie z Q_2 to Q_1.
- $h = \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varpi}^{-1}$.

Grafické znázornenie

Q_2: $h(x, y) \leftarrow \; \dots \; p(y, z) \; \dots$

σ σ

$h(u_p, v_p)$ $h = \sigma \circ \varpi^{-1}$ $p(t_p, w_p)$ $D = petr(Q_1)$

ϖ ϖ

Q_1: $h(u, v) \leftarrow \; \dots \; p(t, w) \; \dots$

$h = \sigma \circ \varpi^{-1}$ zobrazí každý podcieľ $p(y,z)$ dotazu Q_2 do podcieľu $p(t, w)$ dotazu Q_1 a hlavu $h(x,y)$ dotazu Q_2 na hlavu $h(u, v)$ dotazu Q_1.

Duálny pohľad na pohlcujúce zobrazenie

- Namiesto toho aby sme pohlcujúce zobrazenie považovali funkciu z premenných do „unikátnych konštánt“ budeme ho považovať za zobrazenie (injekciu) z atómov do atómov.
- Požiadavky na takéto zobrazenie:
  1. Hlava sa musí zobraziť na hlavu.
  2. Každý podcieľ sa zobrazí na nejaký podcieľ.
  3. Z definície vyplýva, že žiadná premenná sa nemôže zobraziť do dvoch rôznych premenných.

Kánonické databázy

- Hlavná myšlienka: je rozhodnúť, či $Q_1 \subseteq Q_2$ otestovaním, že platí $Q_1(D_1) \subseteq Q_2(D_1), \ldots, Q_1(D_n) \subseteq Q_2(D_n)$, pre vybrané databázy $D_1, \ldots, D_n$, kánonické databázy.
- Pre jednoduché konjunktívne dotazy stačí jediná kánonická databáza $\mathit{petr}(Q_1)$.
- Pre všeobecnejšie dotazy môžeme potrebovať nejakú väčšiu množinu kánonických DB.

Prečo test pomocou kánonických DB funguje.

Veta: Nech D = petr(Q_1), H_1 je hlava Q_1 a ϖ petrifikačné zobrazenie.
Potom $Q_1 \subseteq Q_2$ práve vtedy, keď $H_1\varpi \in Q_2(D)$.

Dôkaz:

($Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow H_1\varpi \in Q_2(D)$): Nepriamo. Predpokladajme $H_1\varpi \notin Q_2(D)$. Ale $Q_1(D)$ iste obsahuje $H_1\varpi$ (Je to jeho petrifikovaná hlava), teda Q_2 nepohlcuje Q_1. Spor.

($H_1\varpi \in Q_2(D) \Rightarrow Q_1 \subseteq Q_2$): Keďže $H_1\varpi$ je odpoveď na Q_2 v databáze D, existuje substitúcia σ, ktorá zobrazuje H_2 hlavu Q_2 na $H_1\varpi$ a podciele tela Q_2 na podciele D = petr(Q_1). Zobrazenie h = $\sigma \circ \varpi^{-1}$ je pohlcujúci homomorfizmus z Q_2 do Q_1. Teda $Q_1 \subseteq Q_2$.

Konštanty

- Konjunktívne dotazy často obsahujú konštanty.
  - Tieto zodpovedajú selekcii na rovnosť v relačnej algebre.
- Konštanty nemenia pohľad na pohlcujúce zobrazenie a testovanie pohltenia. Zmena v definícii pohlcujúceho a petrifikačného zobrazenia je:
  - Premenná sa môže zobraziť na premennú alebo len na jednu konštantu.
  - Konštanta sa môže zobraziť iba sama na seba.
- Pohlcujúce a petrifikačné zobrazenia sa podobajú substitúciam.

Príklad

Q_2: $p(x) \leftarrow e(x, y)$

Q_1: $p(u) \leftarrow e(u, 13)$

Pohlcujúce zobrazenie h: $Q_2 \rightarrow Q_1 \equiv \{ x \mapsto u, y \mapsto 13\}$.

Preto $Q_1 \subseteq Q_2$.

Pohlcujúce zobrazenie z Q_2 do Q_1 by muselo zobraziť konštantu 13 do premennej y. To je zakázané, preto také zobrazenie neexistuje.

Testovanie pohltenia

- Testovanie pohltenia konjunktívnych dotazov je NP-úplné.
- Prípad, keď Q_1 (pohltený dotaz) neobsahuje viac ako dva podciele s rovnakým predikátom, sa dá riešiť v lineárnom čase Sariayaovým algoritmom
- Redukciou na 2SAT.
- Uvedieme jeho zjednodušenú verziu pracujúcu v kvadratickom čase.

Sariayaov algoritmus

- Pre každý podcieľ p(…) Q_2, pre ktorý existuje jediný podcieľ s predikátom p v Q_1, vieme presne na čo sa p(…) zobrazí.
- Pre podcieľ Q_2, pre ktorý existujú dva podciele v Q_1, si vyberieme jeden z nich a odvodíme dôsledky.
- Môžu nastať dva prípady:
  - Odvodíme spor; Nejaká premenná „sa chce zobraziť“ na dve rôzne veci.
    - Backtrack; skúsíme druhú alternatívu, ak nexistuje skončíme neúspechom.
  - Úspešne skončíme; Neexistujú ďalšie dôsledky a spor nevznikol.
    - Našli sme substitúcie za niektoré premenné Q_2. Tieto si zapamätáme. Pokračujeme ďalším podcieľom, ak neexistuje, skončíme. Našli sme pohlcujúce zobrazenie.

Sariayaov algoritmus - „dôsledky“

- Ak sa $p(x_1, \dots, x_n)$ zobrazí na $p(y_1, \dots, y_n)$, potom vieme určiť na čo sa zobrazia premenné Q_2.
  V najhoršom unifikáciou, ak sú to konjunktívne dotazy s termami.
- Ak $p(x_1, \dots, x_n)$ je podcieľ Q_2, a premenná x_i sa zobrazuje na premennú z, a jediný podcieľ Q_1 s predikátom p obsahuje premennú z v i-tom argumente, potom sa $p(x_1, \dots, x_n)$ musí zobraziť na tento podcieľ.

Príklad

Q_2: p(x) ← a(x, y), b(y, z), b(z, w), a(w, x)

Q_1: p(v) ← a(u, v), a(v, u), b(u, t), b(t, v)

Začneme výberom: a(x, y) → a(u, v).
Potom x↦u a y↦v.
V ďalšom kroku sa musí b(y, z) zobraziť na nejaké b(v, _).
Ale to neexistuje. Musíme backtracknúť a zmeniť prvý výber.
Keby sme začali hlavou urobili by sme lepšie. Môže to ušetriť zopár backtrackov.

Príklad – pokračovanie

Q_2: $p(x) \leftarrow a(x, y), b(y, z), b(z, w), a(w, x)$

Q_1: $p(v) \leftarrow a(u, v), a(v, u), b(u, t), b(t, v)$

Teraz už vieme, že každé pohlcujúce zobrazenie z Q_2 do Q_1 musí zobraziť $a(x, y)$ na $a(v, u)$. Teda $x \mapsto v$ a $y \mapsto u$.

Následne $b(y, z)$ sa musí zobraziť na $b(u, t)$ a $z \mapsto t$.

Pre ďalšie b je jediná možnosť $b(z, v)$ na $b(t, v)$, ktorá generuje $w \mapsto v$. Všetky premenné Q_2 sú už definované.

Ale posledné zobrazenie $a(w, x)$ na $a(u, v)$ zlyhá, lebo premenná w je už zobrazená na v.

Definitívne zlyhanie: záver $Q_1 \not\subseteq Q_2$.

Príklad – mierná modifikácia

Q_2: $p(x) \leftarrow a(x, y), b(y, z), b(z, w), a(w, x)$

Q_1: $p(v) \leftarrow a(u, v), a(v, u), b(u, t), b(t, u)$

Algoritmus prebieha podobne ako v predošlom príklade. V predposlednom kroku sa w priradí u. Vzniklé zobrazenie $h = \{x \mapsto v, y \mapsto u, z \mapsto t, w \mapsto u\}$ je konzistentné so zobrazením posledného predikátu Q_2 na prvý predikát Q_1. Žiadne ďalšie dôsledky sa negenerujú.

Zobrazenie h je pohlcujúci homomorfizus. Teda $Q_1 \subseteq Q_2$.

Rozšírenia konjunktívnych dotazov

- Zjednotenie
- Aritmetika
- Negácie

Pohltenie pre zjednotenie CQ

Veta: $P_1 \cup \ldots \cup P_k \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ práve vtedy, keď pre každé P_i existuje Q_j také, že $P_i \subseteq Q_j$.

Dôkaz:

$(\forall P_i \exists Q_j\, P_i \subseteq Q_j \Rightarrow P_1 \cup \ldots \cup P_k \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_n)$: Zrejmé.

Naopak. Predpokladáme $P_1 \cup \ldots \cup P_k \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$.

Nech D je petrifikovaný dotaz P_i. Pretože $P_i\,(D)$ obsahuje svoju petrifikovanú hlavu a platí $P_i \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, musí nejaké $Q_j(D)$ obsahovať petrifikovanú hlavu P_i.

Teda $P_i \subseteq Q_j$.

Pohltenie konjunktívnych dotazov datalógovým programom

- Nech Q je CQ a P datalógový program.
- Pre každdú EDB dátabázu D aj P aj Q vráti reláciu, je teda zmysluplné sa pýtať, či $Q \subseteq P$. Presnejši, či platí $Q(D) \subseteq P(D)$ pre každé D.
- Test pohltenia
  - Nech D je kánonická DB pre Q.
  - Vypočítajte $P(D)$ a otestujte, či obsahuje petrifikovanú hlavu Q.
  - Ak áno, $Q \subseteq P$. V opačnom prípade D je protipríklad.

Príklad

Q : p(x,y) $\leftarrow$ a(x,z), a(z,w), a(w,y)
P : p(x,y) $\leftarrow$ a(x,y)
p(x,y) $\leftarrow$ p(x,z), p(z,y)

- Intuitívne: Q = cesty dĺžky 3; P = všetky cesty.
- Petrifikované Q : $D = \{a(x_p,z_p), a(z_p,w_p), a(w_p,y_p)\}$.

$D = \{a(x_p,z_p), a(z_p,w_p), a(w_p,y_p)\}$
- Podľa prvého pravidla: $p(x_p,z_p)$, $p(z_p,w_p)$, $p(w_p,y_p)$
- Podľa druhého pravidla: $p(x_p,w_p)$, $p(z_p,w_p)$; $p(x_p,y_p)$
- Petrifkovaná hlava Q. Teda $Q \subseteq P$.

Iné subsumcie

- Je dvojite exponenciálny problém $O\left(2^{2^n}\right)$ rozhodnúť, či konjunktívny dotaz pohltí datalógový program.
- Je nerozhodnuteľné, či datalógový program pohltí iný datalógový program.

Konjunktívne dotazy s negáciou

- Dovolíme aj negované podciele
- Príklad:

Q_1: $p(x,y) \leftarrow a(x,z), a(z,y), \neg a(x,y)$ cesta dĺžky práve dva

Q_2: $p(x,y) \leftarrow a(x,y), \neg a(y,x)$ hrana len jedným smerom

Levy-Sagivov test

- Testuje či $Q_1 \subseteq Q_2$:
  1. Ako množinu kánonických databáz $\mathcal{Can}(Q_1)$ pre Q_1 uvažujeme množinu všetkých databáz s reláciami pre predikáty Q_1, s doménou zo symbolov 1, …, n, kde n je počet premenných dotazu Q_1.
  2. Ak existuje $D \in \mathcal{Can}(Q_1)$ také, že $Q_1(D) \not\subseteq Q_2(D)$. Potom $Q_1 \not\subseteq Q_2$.
  3. V opačnom prípade $Q_1 \subseteq Q_2$.

Príklad

Q_1: $p(x,y) \leftarrow a(x,z), a(z,y), \neg a(x,y)$

Q_2: $p(x,y) \leftarrow a(x,y), \neg a(y,x)$

- Skúsime D = {a(1,2), a(2,3)}.
- Q1(D) = {p(1,3)}.
- Q2(D) = {p(1,2), p(2,3)}.
- Teda $Q_1 \not\subseteq Q_2$.

Intuícia

- Nestačí uvažovať len petrifikované telo dotazu Q_1.
- Dôvod je, že v prípade negácie subsumcia môže byť narušená aj tým, že niektorým premenným je priradená tá istá konštanta.

Konjunktívne dotazy so zabudovanými predikátmi

- Špeciálny prípad: aritmetické predikáty usporiadania ako napr. <.
  - Úplné usporiadanie na doménach.
  - Coddova relačná algebra
- Všeobecný prípad: predikáty, ktoré majú pevný matematický význam, ale môžu byť zložitejšie ako jednoduché aritmetické porovnanie.
  - Príklady:
    - aritmetika, sčítanie, násobenie, …
    - množinové premenné a množinové inklúzie
    - operácie s reťazcami a dátumami

Konjunktívne dotazy s predikátom <

- Na testovaniet Q1 ⊆ Q2, uvažujeme kánonické bázy dát – všetky databázy vytvorené z obyčajných (nie aritmetických) podcieľov Q_1, nad doménou 1, …, n. Kde n je počet premených v Q_1.
- Ekvivalentné je: rozdeliť premenné Q_1 do blokov a usporiadať bloky podľa relácie <.

Príklad

Q_1: $p(x,z) \leftarrow a(x,y), a(y,z), x<y$

Q_2: $p(u,w) \leftarrow a(u,v), a(v,w), u<w$

- Existuje 13 usporiadaných skupín:
  - 6 usporiadaní pre skupiny po jednom {x}{y}{z}.
  - 3×2 usporiadaní pre tri 2-1 skupiny, ako {X}{Y,Z}.
  - 1 jediná skupina po troch {X,Y,Z}.
- Zvolme skupinu: {x,z}{y}; nech napr. x =z =1 and y =2.
- Potom sa telo Q_1 transformuje na D ={a(1,2), a(2,1)}, a x<y platí, teda hlava p(1,1) je v $Q_1(D)$.

Príklad - dokončenie

Q_2: $p(u,w) \leftarrow a(u,v), a(v,w), u<w$

$D = \{a(1,2), a(2,1)\}$

- Tvrdenie $Q_2(D) = \emptyset$, pretože existujú dva spôsoby ako splniť prvé dva podciele
  - $u = w = 1$ a $v = 2$, alebo
  - $u = w = 2$ a $v = 1$.
- V oboch prípadoch, $u < w$ neplatí.
- Teda $Q_1 \not\subseteq Q_2$.

Aritmetika všeličo kazí

- Veta o zjednotení CQ neplatí.
- Príklad:

  $P : p(x) \leftarrow a(x), 10 \leq x, x \leq 20$

  $Q : p(x) \leftarrow a(x), 10 \leq x, x \leq 15$

  $R : p(x) \leftarrow a(x), 15 \leq x, x \leq 20$

  $P \subseteq Q \cup R$, ale ani $P \subseteq Q$ ani $P \subseteq R$ neplatí.
- Veta o pohlcujúcom homomorfizme neplatí.
- Príklad:

  Q_1: panic $\leftarrow$ a(x,y), a(y,x)

  Q_2: panic $\leftarrow$ a(u,v), $u \leq v$

Q_1 je cyklus dĺžky 2, Q_2 neklesajúca hrana. Očákavali by sme $Q_1 \subseteq Q_2$, ale zabudovaný predikát $\leq$ sa nemá na čo zobraziť.

Pohlcujúci homomorfizmus pre zabudované predikáty

- „Rektifikované“ pravidlá a normálna forma pre CQ s zabudovanými predikátmi.
- Varianta vety o pohlcujúcom homomorfizme platí aj pre zabudované predikáty.Táto veta platí aj pre iné predikáty ako aritmetické porovnania, ale na rektifikáciu potrebujeme aspoň rovnosť „=“.
- Rektifikácia:
  1. Žiadná premenná sa nesmie medzi argumentami obyčajných predikátov tela a argumentami hlavy vyskytnúť viac než raz.
  2. V hlave ani v obyčajných predikátoch tela sa nesmia vyskytovať konštanty.

Pravidlá pre rektifikáciu

- Zavedieme nové premenné namiesto násobne sa vyskytujúcich premenných a konštánt.
- Nové premenné „previažeme“ s pôvodnými a konštantami pomocou predikátu rovnosti.
- Príklady:

  $panic \leftarrow a(x,y), a(y,x)$ sa transformuje na
  $panic \leftarrow a(x,y), a(u,v), u=y, v=x$

  $p(x) \leftarrow q(x,y,x), r(y,a)$ sa transformuje na
  $p(z) \leftarrow q(x,y,w), r(v,u), x=w, x=z, y=v, u=a$

Gupta-Zhang-Ozsoyogluov test

- Nech Q_1 a Q_2 sú rektifikované pravidlá.
- Nech M je množina všetkých pohlcujúcich homomorfiz-mov z obyčajných (nezabudovaných) podcieľov Q_2 do obyčajných podcieľov Q_1. Pre rektifikované pravidlá je každé zobrazenie podcieľov do podcieľov s rovnakými predikátmi pohlcujúci homomorfizmus.

Veta: $Q_1 \subseteq Q_2$ práve vtedy, keď zo zabudovaných podcielov Q_1 logicky vyplýva zjednotenie cez všetky h z *M* h-obrazov zabudovaných podcieľov Q_2.

Príklad

Q_2: panic $\leftarrow$ a(u,v), u $\leq$ v

h_1 h_2

Q_1: panic $\leftarrow$ a(x,y), a(z,w), z=y, w=x

$M=\{h_1=\{u \mapsto x,\ v \mapsto y\},\ h_2=\{u \mapsto z,\ v \mapsto w\}\}$

$(u \leq v)[h_1] = x \leq y$

$(u \leq v)[h_2] = y \leq x$

Treba ukázať $((z=y) \wedge (w=x)) \Rightarrow ((x \leq y) \vee (z \leq w))$

Dôkaz:

$(w \leq z) \vee (z \leq w)$ veta o úplnom usporiadaní

$(x \leq y) \vee (z \leq w)$ v prvej zátvorke sme nahradili rovné rovným

Axiomy pre nerovnosti

1. $x \leq x$.
2. $x < y$ implikuje $x \leq y$.
3. $x < y$ implikuje $x \neq y$.
4. $x \leq y$ a $x \neq y$ implikuje $x < y$.
5. $x \neq y$ implikuje $y \neq x$.
6. $x < y$ a $y < z$ implikuje $x < z$.
7. $x \leq y$ a $x \leq y$ implikuje $x \leq z$.
8. $x \leq z$, $z \leq y$, $x \leq w$, $w \leq y$ a $w \neq z$ implikuje $x \neq y$.

Veta: Systém axióm 1 – 8 je zdravý a úplny.

Dôkaz: Je to netriviálna veta z elementárnej aritmetiky.
Pozrite do knihy.