Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Čiastočné boolovské funkcie

(Bakalárska práca)

Lucia Haviarová

Vedúci: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc. Bratislava, 2009

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím citovaných zdrojov a literatúry.

Bratislava, dňa Lucia Haviarová

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Eduardovi Tomanovi, CSc. za odbornú pomoc, za výber témy, študijné materiály, konzultácie a ostatnú pomoc pri vypracovaní. Ďalej by som chcela poďakovať svojim rodičom za výraznú podporu pri štúdiu a svojmu priateľovi za všetko, čo pre mňa urobil.

Abstract

Autor: Lucia Haviarová
Názov bakalárskej práce: Čiastočné boolovské funkcie
Škola: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra: Katedra informatiky
Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc.
Rozsah práce: 54 strán

Bratislava, jún 2009

Cieľom tejto bakalárskej práce je formulovať úlohu minimalizácie v triede DNF a zvládnuť základné techniky minimalizácie čiastočných boolovských funkcií.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: čiastočná boolovská funkcia, disjunktívna normálna forma, Karnaughova mapa, techniky minimalizácie, lokálny algoritmus

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Boolovská (logická) funkcia opisuje, ako určiť boolovskú hodnotu výstupu založenú na logických výpočtoch z boolovských vstupov. Sú vhodným modelom pri riešení mnohých problémov v rozličných oblastiach, napr. zohrávajú významnú úlohu v otázkach komplexnosti ako aj v návrhu logických obvodov a čipov pre počítače. Vlastnosti boolovských funkcií zohrávajú dôležitú úlohu v kryptológii, hlavne v návrhu šifrovacích algoritmov so symetrickými kľúčmi. V tejto bakalárskej práci sa budeme zaoberať čiastočnými boolovskými funkciami, teda funkciami, ktorých definičným oborom je vlastná podmnožina definičného oboru boolovskej funkcie. Každú čiastočnú boolovskú funkciu možno vyjadriť v tvare disjunktívnej normálnej formy, pričom pre každú funkciu môže existovať viacero vyjadrení pomocou DNF. Cieľom tejto práce je definovať tieto DNF a zvládnuť základné metódy minimalizácie v triede DNF. V tejto práci sa tiež budeme zaoberať vzťahmi medzi definovanými DNF.

Kapitola 1

Algebra logiky

1.1 Čiastočné logické (boolovské) funkcie

Logická (boolovská) funkcia premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ predstavuje zobrazenie, ktoré $n-$ticiam hodnôt 0, 1 priraďuje hodnotu z množiny $B = \{0, 1\}$. Funkcia teda definuje zobrazenie

$$\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n} \rightarrow B$$

Definičným oborom funkcie je množina B^n, t.j. množina všetkých $n-$tíc s prvkami 0 a 1, ktorým zodpovedajú všetky možné usporiadané $n-$tice hodnôt premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Obor hodnôt funkcie je B. Z definície boolovskej funkcie vyplýva, že existuje 2^{2^n} rôznych boolovských funkcií n premenných.

Čiastočná boolovská funkcia premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ predstavuje zobrazenie, ktoré vlastnej podmnožine množiny $n-$tíc hodnôt 0, 1 priraďuje hodnotu z množiny $B = \{0, 1\}$. Funkcia teda definuje zobrazenie

$$\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n} \rightarrow B$$

Definičný obor funkcie je vlastná podmnožina množiny B^n, funkcia nie je definovaná vo všetkých bodoch oboru B^n boolovskej funkcie n premenných. Obor hodnôt čiastočnej boolovskej funkcie je B.

Príklad 1.1.1 *Príklad čiastočnej boolovskej funkcie.*

Tabuľka 1.1: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f

x_1	x_2	x_3	f
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1

Definičný obor funkcie f je množina $\{110, 101, 100, 011, 010\}$. *Obor hodnôt funkcie f je množina* $B = \{0, 1\}$. *Funkcia nie je definovaná v bodoch* 111, 001, 000. *Tieto body sa nazývajú nedefinované body funkcie f.*

Lema 1.1.0.1 *Elementárne logické funkcie:*

1. $f_1(x) = 0$ — *konštanta* 0*;*

2. $f_2(x) = 1$ — *konštanta* 1*;*

3. $f_3(x) = x$ — *funkcia identity;*

4. $f_4(x) = \bar{x}$ — *negácia* x*;*

5. $f_5(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2)$ — *konjunkcia* x_1 *a* x_2*, táto funkcia sa nazýva logickým súčinom;*

6. $f_6(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)$ — *disjunkcia* x_1 *a* x_2*, táto funkcia sa nazýva logickým súčtom;*

7. $f_7(x_1, x_2) = (x_1 \Rightarrow x_2)$ — *implikácia* x_1 *a* x_2*, táto funkcia sa nazýva logickým dôsledkom;*

8. $f_8(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$ — *alternatíva* x_1 *a* x_2*, súčet* x_1 *a* x_2 *podľa mod* 2*;*

9. $f_9(x_1, x_2) = (x_1 \uparrow x_2)$ — *Shefferova funkcia;*

10. $f_{10}(x_1, x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$ — *Pierceova (Lukasiewiczova) funkcia;*

Definícia 1.1.1 *Nech* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *je základná abeceda premenných. Označme* P_2 *množinu všetkých logických funkcií nad abecedou X. Nech* P *je nejaká (nemusí byť konečná) podmnožina funkcií z* P_2*.*

a) *Indukčný predpoklad: Každá funkcia* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *z* P *sa nazýva formulou nad* P*.*

b) *Indukčný krok: Nech* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je funkcia z* P *a* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sú výrazy, ktoré sú alebo formulami nad* P*, alebo symbolmi premenných z* U*. Potom výraz* $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *sa nazýva formulou nad* P*.*

Definícia 1.1.2 *Nech* A *je ľubovoľná formula nad* P*. Formuly, ktoré boli použité na jej vytvorenie, budeme nazývať podformuly formuly* A*.*

1.2 Ekvivalencia formúl, vlastnosti elementárnych funkcií

Každá formula A zadáva prepis boolovskej funkcie, ktorú označíme f_A, potom tabuľku, ktorou je táto funkcia zadaná, nazývame pravdivostnou tabuľkou formuly A.

Definícia 1.2.1 *Formuly* A *a* B *sa nazývajú ekvivalentnými, ak im priradené funkcie* f_{A} *a* f_{B} *majú rovnakú pravdivostnú tabuľku (zapisujeme* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$*).*

Keď označíme $(x_1 \circ x_2)$ ľubovoľnú z funkcií $(x_1 \wedge x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$, $(x_1 + x_2)$, potom nasledujúce ekvivalencie charakterizujú vlastnosti nejakej množiny elementárnych funkcií:

1. Funkcia $(x_1 \circ x_2)$ je asociatívna práve vtedy, keď platí

   $((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$

2. Funkcia $(x_1 \circ x_2)$ je komutatívna práve vtedy, keď platí

   $(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$

3. Pre konjunkciu a disjunkciu platia distributívne zákony

   $((x_1 \vee x_2) \wedge x_3) = ((x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3))$

   $((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) = ((x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3))$

4. Medzi konjunkciou, disjunkciou a negáciou platia vzťahy

   $\bar{\bar{x}} = x$

   $\overline{(x_1 \wedge x_2)} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$

   $\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$

5. Vlastnosti konjunkcie a disjunkcie

   $(x \wedge x) = x \qquad (x \vee x) = x$

   $(x \wedge \bar{x}) = 0 \qquad (x \vee \bar{x}) = 1$

   $(x \wedge 0) = 0 \qquad (x \vee 0) = x$

   $(x \wedge 1) = x \qquad (x \vee 1) = 1$

Ekvivalencie možno ľahko overiť porovnaním funkcií priradených ľavej a pravej strane ekvivalencie.

V nasledujúcich kapitolách budeme používať označenie

Označenie 1.2.1

$$\bigwedge_{i=1}^{s} x_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_s$$

$$\bigvee_{i=1}^{s} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_s$$

Tieto zápisy majú zmysel pre $s \geq 1$.

1.3 Rozklad čiastočných boolovských funkcií podľa premenných

Označenie 1.3.1

$$x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$$

kde σ *je parameter rovnajúci sa* 0 *alebo* 1. *Je zrejmé, že*

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & ak \ \ \sigma = 0 \\ x, & ak \ \ \sigma = 1 \end{cases}$$

Vidieť, že $x^\sigma = 1$ *vtedy a len vtedy, keď* $x = \sigma$, *t.j. hodnota základu sa rovná hodnote exponentu.*

Veta 1.3.1 *(Veta o rozklade funkcií podľa premenných). Každú logickú funkciu* $f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *možno vyjadriť pre ľubovoľné* $m (1 \leq m \leq n)$ *v tvare*

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \quad (1)$$

kde sa disjunkcia berie cez všetky možné $m-$tice hodnôt premenných $x_1, \ldots, x_m$. Toto vyjadrenie sa nazýva rozklad čiastočnej boolovskej funkcie podľa m premenných $x_1, \ldots, x_m$.

Dôkaz 1.3.1 *Nech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je ľubovoľný vektor hodnôt premenných. Ukážeme, že ľavá a pravá strana vzťahu (1) nadobúda na tomto vektore rovnakú hodnotu. Na ľavej strane dostaneme $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, a na pravej*

$$\bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m} \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Ako dôsledky vety 1.3.1 dostávame dva špeciálne prípady rozkladu.

1. Rozklad podľa premennej:

   $$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x_n} \wedge f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

   Funkcie $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ a $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ sa nazývajú komponenty rozkladu. Tento rozklad je vhodný vtedy, keď sa nejaké vlastnosti boolovských funkcií určujú metódou indukcie.

2. Rozklad podľa všetkých n premenných:

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

   Pre $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ môže byť tento rozklad vyjadrený takto:

   $$\bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

   Nakoniec dostaneme:

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

Takýto rozklad sa nazýva úplnou disjunktívnou normálnou formou (úplnou DNF) a formálne ho zadefinujeme v nasledujúcej kapitole.

1.4 Úplný systém logických spojok

Definícia 1.4.1 *Množina logických spojok* Δ *tvorí úplný systém logických spojok, ak pre každú formulu* A *existuje formula* B *s ňou ekvivalentná, ktorá používa len spojky z množiny* Δ*.*

Veta 1.4.1 *Spojky negácia, konjunkcia a disjunkcia tvoria úplný systém.*

Dôkaz 1.4.1 *1. Nech* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$*. Potom zrejme*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge \bar{x}_1$$

2. Nech $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$*. Potom ju možno vyjadriť v tvare úplnej DNF*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

Takto sa v obidvoch prípadoch vyjadruje čiastočná boolovská funkcia f *formulou nad negáciou, konjunkciou a disjunkciou.*

Uvedená veta má konštruktívny charakter a umožňuje pre každú funkciu zostrojiť formulu, ktorá ju realizuje v tvare úplnej DNF. Z tabuľky funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$ ($f \neq 0$) vyberieme všetky riadky $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, v ktorých $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$, pre každý takýto riadok vytvárame logický súčin

$$x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

potom spojíme všetky získané konjunkcie znakom disjunkcie.

Príklad 1.4.1 *Nájdite úplnú DNF čiastočnej boolovskej funkcie danej nasledujúcou tabuľkou:*

Tabuľka 1.2: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Definičný obor funkcie f je množina $\{000, 001, 010, 100, 101, 110\}$. *Obor hodnôt funkcie f je množina* $B = \{0, 1\}$. *Funkcia nie je definovaná v bodoch* $011, 111$.

$$DNF \;\; N = \bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee x_1\bar{x_2}x_3$$

Kapitola 2

Disjunktívne normálne formy

2.1 Pojem disjunktívnej normálnej formy, konjunktívnej normálnej formy

Definícia 2.1.1 *Výraz*

$$\mathrm{K} = x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\sigma_r}, \ \ (i_v \neq i_u \ \ pre \ \ v \neq u)$$

sa nazýva elementárnou konjunkciou. Číslo r sa nazýva rádom elementárnej konjunkcie. Definitoricky považujeme konštantu 1 za konjunkciu rádu 0.

Definícia 2.1.2 *Výraz*

$$\mathrm{N} = \vee_{i=1}^{s} \mathrm{K}_i \ \ (\mathrm{K}_i \neq \mathrm{K}_j \ \ pre \ \ i \neq j)$$

kde K_i $(i = 1, \ldots, s)$ je elementárna konjunkcia rádu r_i, sa nazýva disjunktívna normálna forma (DNF).

Definícia 2.1.3 *Výraz*

$$\mathrm{D} = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}, \ \ (i_v \neq i_u \ \ pre \ \ v \neq u)$$

sa nazýva elementárnou disjunkciou. Číslo r sa nazýva rádom elementárnej disjunkcie. Definitoricky považujeme konštantu 1 za disjunkciu rádu 0.

Definícia 2.1.4 *Výraz*

$$\mathrm{N} = \wedge_{i=1}^{s} \mathrm{D}_i \ \ (\mathrm{D}_i \neq \mathrm{D}_j \ \ pre \ \ i \neq j)$$

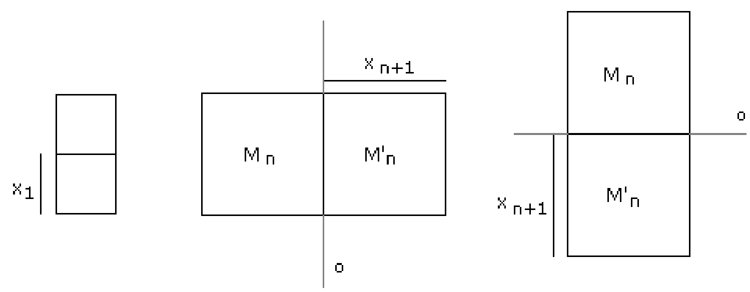
kde D_i $(i = 1, \ldots, s)$ *je elementárna disjunkcia rádu* r_i*, sa nazýva konjunktívna normálna forma (KNF).*

2.2 Karnaughove mapy

Karnaughova mapa je dvojrozmerné pole, slúžiace na zápis boolovskej funkcie, ktorá mi umožní jednoduché grafické vyznačenie DNF tejto funkcie.

Definícia 2.2.1 *Karnaughova mapa pre čiastočné boolovské funkcie n premenných* $x_1, \ldots, x_n$ *je tabuľka pozostávajúca z* 2^n *štvorčekov, pričom ku každému štvorčeku je priradená práve jedna hodnota z* B^n*.*

Obr. 2.1: Spôsob zostavenia Karnaughových máp



Karnaughovu mapu o veľkosti 1 tvoria dva štvorce nad sebou, pričom štvorčeku, ktorý je zľava vyznačený zvislou čiarou, je priradená hodnota 1 a štvorčeku nad ním hodnota 0. Nech M_n je Karnaughova mapa pre čiastočnú boolovskú funkciu n premenných $x_1, \ldots, x_n$. Mapa M_{n+1} sa skladá z mapy M_n a jej súmerne združeného obrazu M'_n podľa osi o. Vodorovná resp. zvislá kódovacia čiara pri M'_n označená premennou x_{n+1} vyjadruje, že ku každému štvorčeku z M'_n je priradená hodnota $(x_1, \ldots, x_n) \in B^{n+1}$, pre ktorú $x_{n+1} = 1$, a ku každému štvorčeku z M_n zas hodnota, pre ktorú $x_{n+1} = 0$. Kódovacie čiary pri M'_n rovnobežné s osou, ktoré vznikli súmernosťou podľa tejto osi, sa nevykresľujú.

Ak v Karnaughovej mape pre n premenných do každého štvorčeka, ktorý zodpovedá bodu $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, vpíšeme hodnotu čiastočnej boolovskej funkcie f (ak je v danom bode definovaná, "-" v opačnom prípade), získame Karnaughovu mapu čiastočnej boolovskej funkcie f.

Obr. 2.2: Karnaughova mapa čiastočnej boolovskej funkcie f

		x_3	x_4	
	(0,0,0,0)	(0,0,1,0)	(0,0,1,1)	(0,0,0,1)
x_1	(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)
x_2	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)	(1,1,0,1)
	(0,1,0,0)	(0,1,1,0)	(0,1,1,1)	(0,1,0,1)

2.3 Minimálna DNF, najkratšia DNF, problém minimalizácie čiastočných boolovských funkcií

Príklad 2.3.1 *Uvažujeme čiastočnú boolovskú funkciu* $f(x_1, x_2, x_3)$ *danú nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

Obr. 2.3: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f

		x_2	x_2	
			x_3	x_3
	1	0	-	-
x_1	1	1	1	1

Definičný obor funkcie f je množina $\{000, 010, 100, 101, 110, 111\}$*. Obor hodnôt funkcie f je množina* $B = \{0, 1\}$*. Funkcia nie je definovaná v bodoch* $011, 001$*.*

Úplná DNF funkcie f:

$$\mathrm{N}_1 = \bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1\bar{x_2}x_3 \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$$

Táto funkcia sa dá vyjadriť aj inou DNF:

$$\mathrm{N}_2 = \bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1$$

Uvedený príklad ukazuje, že ľubovoľná čiastočná boolovská funkcia môže byť vo všeobecnosti vyjadrená vo forme DNF nejednoznačne. V súvislosti s tým vzniká možnosť výberu najvhodnejšej realizácie. Preto zavedieme index jednoduchosti L(N) charakterizujúci zložitosť DNF. Pre funkcionál L(N) vyžadujeme splnenie týchto axióm:

I. Axióma nezápornosti. Pre ľubovoľnú DNF L(N) ≥ 0.

II. Axióma monotónnosti (vzhľadom na násobenie). Nech $\mathrm{N} = \mathrm{N}' \vee x_i^{\sigma_i}\mathrm{K}'$. Potom $\mathrm{L}(\mathrm{N}) \geq \mathrm{L}(\mathrm{N}' \vee \mathrm{K}')$.

III. Axióma vypuklosti (vzhľadom na sumáciu). Nech $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 \vee \mathrm{N}_2$. Ak $\mathrm{N}_1 \wedge \mathrm{N}_2 \equiv 0$, tak platí $\mathrm{L}(\mathrm{N}) \geq \mathrm{L}(\mathrm{N}_1) + \mathrm{L}(\mathrm{N}_2)$.

IV. Axióma invariantnosti (vzhľadom na izomorfizmus). Nech DNF N' bola získaná z DNF N premenovaním premenných (bez stotožnenia). Potom $\mathrm{L}(\mathrm{N}) = \mathrm{L}(\mathrm{N}')$.

Príklady rozličných indexov jednoduchosti DNF:

1. $\mathrm{L}_P(\mathrm{N})$ je počet symbolov premenných, ktoré sa vyskytujú v zápise DNF N. Ak vezmeme DNF N_1 a N_2 z príkladu 2.1.1, tak $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_1) = 15$ a $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_2) = 3$, t.j. v zmysle tohoto indexu je DNF N_1 jednoduchšia ako DNF N_2.

2. $\mathrm{L}_K(\mathrm{N})$ je počet elementárnych konjunkcií vyskytujúcich sa v DNF. Pre DNF N_1 a N_2 je zrejme $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_1) = 5$ a $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_2) = 2$, t.j. v zmysle tohoto indexu je DNF N_1 jednoduchšia ako DNF N_2.

3. $\mathrm{L}_0(\mathrm{N})$ je počet symbolov s negáciou vyskytujúcich sa v zápise DNF N. Pre DNF N_1 a N_2 je $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_1) = 7$ a $\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_2) = 2$, t.j. v zmysle tohoto indexu je DNF N_1 jednoduchšia ako DNF N_2.

Každý z uvedených indexov vyhovuje axiómam $I - IV$. Nad abecedou premenných $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ môžeme zostrojiť 3^n rôznych elementárnych konjunkcií, každé x_i do konjunkcie dáme, dáme negované alebo nedáme (prázdnej konjunkcii priradíme konštantu 1). Každú z 3^n konjunkcií potom do DNF dáme alebo nie, z toho vyplýva, že počet DNF nad touto abecedou z n písmen sa rovná 2^{3n}.

Definícia 2.3.1 *DNF* N*, ktorá realizuje čiastočnú boolovskú funkciu* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a má minimálny index* L(N)*, sa nazýva minimálnou DNF vzhľadom na* L*.*

Minimálna DNF vzhľadom na index jednoduchosti $L_P(N)$ sa nazýva jednoducho minimálna DNF. Minimálna DNF vzhľadom na index jednoduchosti $L_K(N)$ sa nazýva najkratšou DNF.

K príkladu 2.3.1:

DNF $N_2 = \bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1$ je minimálna. Funkcia $f(x_1, x_2, x_3)$ ktorá je realizovaná touto DNF závisí od premenných x_1, x_2, x_3, a preto nemôže byť realizovaná DNF, ktorá by obsahovala menej ako tri premenné.

DNF $N_2 = \bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1$ je najkratšou DNF, pretože funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$, ktorá je realizovaná touto DNF nemožno vyjadriť len elementárnou konjunkciou.

Základná otázka spočíva v tom, ako pre ľubovoľnú čiastočnú boolovskú funkciu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zostrojiť minimálnu DNF vzhľadom na L. Táto úloha sa nazýva problém minimalizácie čiastočných boolovských funkcií. Úloha pripúšťa triviálne riešenie: Najskôr v ľubovoľnom poradí vytvoríme všetky DNF nad premennými $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom vyberieme z tohto súboru tie DNF, ktoré realizujú danú čiastočnú boolovskú funkciu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nakoniec sa pre vybrané DNF vyčísluje hodnota indexu jednoduchosti a jeho porovnaním nájdeme minimálnu DNF (vzhľadom na L).

Uvedený algoritmus je veľmi náročný z hľadiska jeho realizácie, pretože je založený na prezeraní všetkých DNF, t.j. vyžaduje si vo všeobecnosti veľké množstvo jednoduchších operácií. Nedá sa prakticky použiť pre $n \geq 3$[1].
Z toho vyplýva záver, že algoritmy úplného prezerania, t.j. algoritmy podobné

[1]Pretože všetkých DNF pre 4 premenné je $2^{3^4} = 2.41785164 \times 10^{24}$

triviálnemu algoritmu, prezerajúce všetky DNF, sú nepoužiteľným prostriedkom pri riešení problémov minimalizácie čiastočných boolovských funkcií.

2.4 Iredundantné DNF, algoritmus zjednodušenia DNF

Nech N je ľubovoľná DNF a

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}' \vee \mathrm{K} \qquad a \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}' \vee x_i^{\sigma_i}\mathrm{K}'$$

kde K je nejaká elementárna konjunkcia z N, N′ je DNF vytvorená z ostatných konjunkcií nachádzajúcich sa v N, $x_i^{\sigma_i}$ je neurčitý činiteľ z K a K′ je súčin zvyšných činiteľov z K. Poznáme dva typy transformácií z K:

I. Operácia vynechania elementárnej konjunkcie. Prechod od DNF N k DNF N′ sa nazýva transformácia, ktorá spočíva vo vynechaní elementárnej konjunkcie K. Táto transformácia je definovaná vtedy a len vtedy, keď $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$.

II. Operácia vynechania činiteľa. Prechodom od DNF N k DNF $\mathrm{N}' \vee \mathrm{K}'$ je transformácia, ktorá spočíva vo vynechaní činiteľa $x_i^{\sigma_i}$. Táto transformácia je definovaná vtedy a len vtedy, keď $\mathrm{N}' \vee \mathrm{K}' = \mathrm{N}$.

Definícia 2.4.1 *DNF* N*, ktorú nemožno zjednodušiť pomocou transformácií* 1 *a* 2 *sa nazýva iredundantnou DNF vzhľadom na transformácie I a II.*

K príkladu 2.3.1:
Je zrejmé, že DNF $\mathrm{N} = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ je iredundantná vzhľadom na uvedené transformácie.

Na základe uvedených dvoch transformácií môžeme sformulovať algoritmus zjednodušenia DNF. Tento algoritmus je názorný, pretože $\mathrm{L(N)} \geq \mathrm{L(N)}'$, L(N) $\geq$ L(N$'$ $\vee$ K$'$). Ľahko vidieť, že medzi iredundantnými DNF funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nachádzajú aj minimálne DNF.

1. Vyberieme ľubovoľnú DNF funkciu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ako východiskovú. Možno napr. vziať úplnú DNF, pretože existuje jednoduchý spôsob jej zostrojenia.

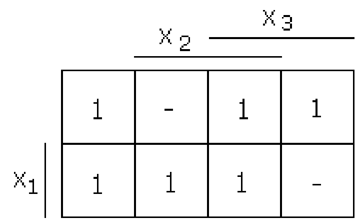
2. Usporiadame elementárne konjunkcie a v každej konjunkcii usporiadame činitele. Toto usporiadanie možno zadať zápisom DNF.

3. Potom prezrieme zápis DNF zľava doprava. Pre každú konjunkciu K_i $(i = 1, \dots, s)$ skúšame najskôr použitie operácie vynechania elementárnej konjunkcie K_i. Ak to nie je možné, tak prezeráme členy $x_{i_v}^{\sigma_{i_v}}$ konjunkcie K_i zľava doprava $(v = 1, \dots, r)$ $\mathrm{K}_i = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$ a aplikujeme operáciu vynechania činiteľa dovtedy, kým je to možné. Potom prechádzame k nasledujúcej elementárnej konjunkcii. Po ukončení spracovania poslednej elementárnej konjunkcie ešte raz prezrieme získanú DNF zľava doprava a skúšame možnosť použitia operácie vynechania elementárnej konjunkcie.

Ako výsledok tohto procesu dostaneme hľadanú DNF. DNF, ktorá sa získa použitím algoritmu zjednodušenia, je iredundantná DNF (vzhľadom na transformácie I a II).

Príklad 2.4.1 *Uvažujme funkciu* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *danú nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

Obr. 2.4: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f



Ako východiskovú DNF vezmeme jej úplnú DNF v dvoch usporiadaniach:

1. N = $\bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$

2. N = $\bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_3\bar{x_1}\bar{x_2} \vee x_2\bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$

Algoritmus zjednodušenia pracuje nasledovne:

Tabuľka 2.1: Popis jednotlivých krokov algoritmu pre východiskovú DNF 1

Číslo kroku	Získaná DNF
1	$\bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
2	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
3	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
4	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
5	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
6	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$
7	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1\bar{x_3} \vee x_2x_3$
	Opakované prezeranie nemení DNF
	Koniec algoritmu

1. *Konštrukcia úplnej DNF čiastočnej boolovskej funkcie ako vstup algoritmu*

2. *Z konjunkcie $\bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3}$ možno vynechať činiteľ $\bar{x_1}$, pretože $\bar{x_2}\bar{x_3} = \bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$. V dôsledku toho dostávame konjunkciu $\bar{x_2}\bar{x_3}$.*

3. *Konjunkciu $\bar{x_1}\bar{x_2}x_3$ tiež nemožno vynechať, možno z nej vynechať činiteľ $\bar{x_2}$, pretože $\bar{x_1}x_3 = \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3$. V dôsledku toho dostávame konjunkciu $\bar{x_1}x_3$.*

4. *Konjunkciu $\bar{x_1}x_2x_3$ môžeme vynechať, pretože $\bar{x_1}x_3 = \bar{x_1}\bar{x_2}x_3 \vee \bar{x_1}x_2x_3$.*

5. *Konjunkciu $x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$ môžeme taktiež vynechať.*

6. *Z konjunkcie* $x_1x_2\bar{x_3}$ *možno vynechať činiteľ* x_2. *V dôsledku toho dostávame konjunkciu* $x_1\bar{x_3}$.

7. *Z konjunkcie* $x_1x_2x_3$ *možno vynechať činiteľ* x_1. *V dôsledku toho dostávame konjunkciu* x_2x_3.

Dostaneme tak DNF

$$\mathrm{N}_1 = \bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1\bar{x_3} \vee x_2x_3$$

Opakované prezeranie tejto DNF za účelom vynechania konjunkcií už neumožňuje zjednodušenie. Z toho vyplýva, že získaná DNF je výsledkom použitia algoritmu zjednodušenia.

Tabuľka 2.2: Popis jednotlivých krokov algoritmu pre východiskovú DNF 2

Číslo kroku	Získaná DNF
	Prvé prezeranie DNF
1	$\bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_3\bar{x_1}\bar{x_2} \vee x_2\bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
2	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_3\bar{x_1}\bar{x_2} \vee x_2\bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
3	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee x_2\bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
4	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
5	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x_3}x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
6	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}$
	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$
	Druhé prezeranie DNF
7	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$
8	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}\bar{x_2} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$
9	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$
10	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$
11	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2$
12	$\bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2$
	Koniec algoritmu

V tabuľke 2.4.3 sú uvedené základné etapy činnosti algoritmu pre východiskovú DNF 2 (v kroku 7, 9 a 11 nie je použiteľná žiadna z operácií I, II). V tomto prípade dostávame ako výsledok algoritmu zjednodušenia DNF

$$\mathrm{N}_2 = \bar{x_2}\bar{x_3} \vee \bar{x_1}x_3 \vee x_1x_2$$

.

$$\mathrm{L}_P(\mathrm{N}_1) = 8, \;\; \mathrm{L}_P(\mathrm{N}_2) = 6, \;\; \mathrm{L}_P(\mathrm{N}_1) \neq \mathrm{L}_P(\mathrm{N}_2)$$

Z uvedeného príkladu vyplýva, že výsledok použitia algoritmu zjednodušenia závisí od výberu usporiadania východiskovej DNF. Iredundantné DNF môžu mať rôznu zložitosť a môžu sa líšiť od minimálnych DNF. V súvislosti s tým vzniká otázka, či môžeme pre ľubovoľnú čiastočnú boolovskú funkciu, vychádzajúc z niektorého usporiadania, získať po použití algoritmu zjednodušenia minimálnu DNF.

Veta 2.4.1 *Nech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ľubovoľná čiastočná boolovská funkcia $(f \not\equiv 0)$ a $\mathrm{N} = \bigvee_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}} \mathrm{K_i}$ je jej ľubovoľná iredundantná DNF (vzhľadom na transformácie I a II). Potom existuje také usporiadanie úplnej DNF, z ktorého sa pomocou algoritmu zjednodušenia získa iredundantná DNF N.*

Dôkaz 2.4.1 *Vezmeme úplnú DNF čiastočnej boolovskej funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v prirodzenom poradí konjunkcií a činiteľov*

$$\mathrm{N}_0 = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_\mathrm{n} \\ \mathrm{f}(\sigma_1,\ldots,\sigma_\mathrm{n})=1}} \mathrm{x}_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{x}_\mathrm{n}^{\sigma_\mathrm{n}}$$

Nech $x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ je jej ľubovoľná konjunkcia. Pretože $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ existuje v krajnom prípade aspoň jedna konjunkcia K_i, $i = i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ z iredundantnej DNF taká, že

$$K_{i(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} = 1$$

Z toho vyplýva, že $K_i = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$. V konjunkcii $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}^{\sigma_{i_n}}$ vyberieme usporiadanie činiteľov tak, aby spočiatku nasledovali činitele nevyskytujúce sa v K_i a až potom v ľubovoľnom poradí činitele z K_i. Z toho vyplýva

$$x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} = K_\sigma \cdot K_{i(\sigma)} \qquad (\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$$

Získali sme úplné usporiadanie úplnej DNF, charakteristické zápisom N'. Algoritmus zjednodušenia pre každú konjunkciu $K_\sigma \cdot K_{i(\sigma)}$ v DNF N' vedie k jednému z výsledkov: alebo ju vynechá, alebo ju transformuje na konjunkciu

$K_{i(\sigma)}$. *Takto získaná DNF* N'_1 *ktorá je výsledkom práce algoritmu, pozostáva jedine z elementárnych konjunkcií vyskytujúcich sa v* N'. *Na druhej strane, v dôsledku iredundantnosti DNF* N' *platí* $N'_1 = N'$.

Pretože sa medzi iredundantnými DNF nevyhnutne vyskytujú aj minimálne DNF vzhľadom na L, algoritmus zjednodušenia pri príslušnom usporiadaní úplnej DNF umožňuje nájdenie aj minimálnej DNF.

2.5 Formulácia úlohy v geometrickej forme

Množinu všetých binárnych n-tíc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ označíme B^n. Možno ju považovať za množinu všetkých vrcholov n-rozmernej jednotkovej kocky. Množinu B^n budeme nazývať n-rozmernou kockou a n-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vrcholmi kocky.

Definícia 2.5.1 *Nech* $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_r}$ *je pevne zvolená r-tica čísel z 0 a 1 taká, že* $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$. *Množina všetkých vrcholov* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *kocky* B^n *takých, že* $\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}, \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} = \sigma_{i_r}$ *sa nazýva (n-r)-rozmernou hranou.*

(n-r)-rozmerná hrana je (n-r)-rozmernou podkockou kocky B^n.

Nech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ľubovoľná čiastočná boolovská funkcia. Priradíme jej podmnožinu N_f vrcholov kocky B^n tak, že

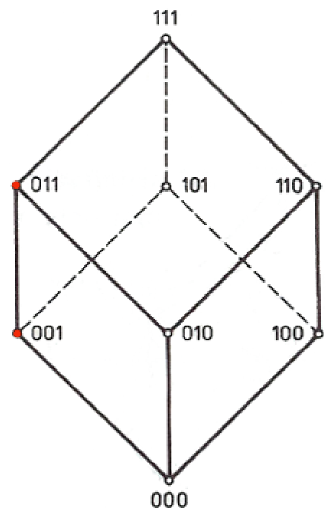
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_f$$

vtedy a len vtedy, keď

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$$

Množinu vrcholov kocky, v ktorých funkcia nie je definovaná znázorníme na obrázku červenou farbou. Z podmnožiny N_f a z množiny nedefinovaných bodov sa pôvodná čiastočná funkcia určuje spätne jednoznačne.

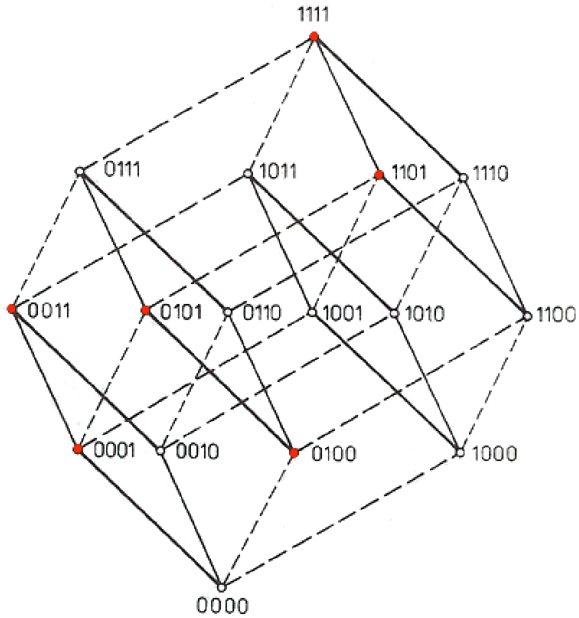
Obr. 2.5: Projekcia 3-rozmernej kocky do roviny a Karnaghova mapa čiastočnej boolovskej funkcie 3 premenných



		x_2	x_2, x_3	x_3
	1	0	-	-
x_1	1	1	1	1

$N_f = \{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\}$

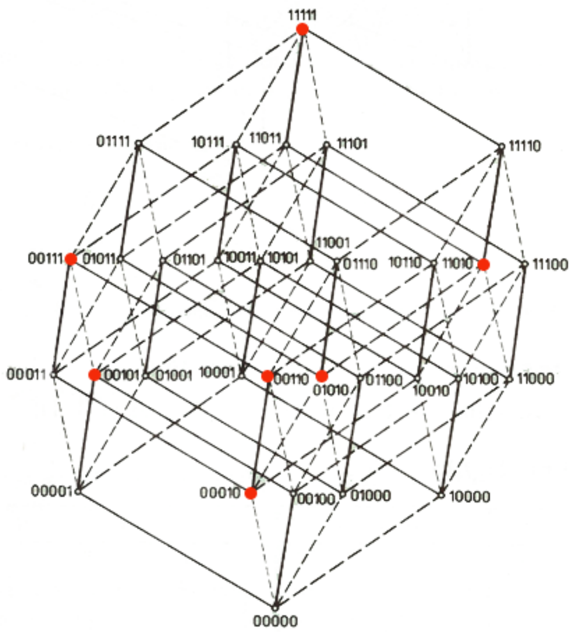
Obr. 2.6: Projekcia 4-rozmernej kocky do roviny a Karnaghova mapa čiastočnej boolovskej funkcie 4 premenných



		x_3	x_3 x_4	x_4
	1	0	-	-
x_1	0	1	1	1
x_1 x_2	1	0	-	-
x_2	-	1	1	-

$$N_f = \{(0,0,0,0),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,1,1)\}$$

Obr. 2.7: Projekcia 5-rozmernej kocky do roviny a Karnaghova mapa čiastočnej boolovskej funkcie 5 premenných



x_3 x_4 x_5 x_3

	1	0	-	-	1	-	0	1
x_1	0	1	0	1	0	1	1	0
x_1, x_2	1	0	1	-	0	-	0	1
x_2	0	1	0	-	1	0	0	-

$N_f = \{(0,0,0,0,0),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1),(1,0,1,0,0),(1,0,1,1,1),$
$(1,0,0,1,0),(1,0,1,0,1),(1,1,0,0,0),(0,1,1,0,0),(0,1,0,1,1),(1,1,1,0,1),$
$(1,1,1,1,0)\}$

Definícia 2.5.2 *Nech $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je elementárna konjunkcia dĺžky r, kde $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$. Množina N_K, odpovedajúca konjunkcii K, sa nazýva interval r-tého rádu.*

Interval r-tého rádu N_K je vlastne (n-r)-rozmerná hrana.

Príklad 2.5.1 *Konjunkciám*

$$K_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$$

$$K_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge \bar{x}_2$$

$$K_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

odpovedajú intervaly

$$N_{K_1} = \{(0,0,0),(1,0,0)\}$$

$$N_{K_2} = \{(1,0,0),(1,0,1)\}$$

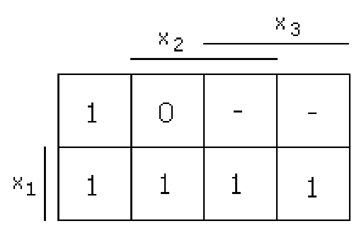
$$N_{K_3} = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

ktoré majú príslušné rády 2, 2 a 1. Tieto intervaly odpovedajú jednorozmernej hrane (N_{K_1}), jednorozmernej hrane (N_{K_2}) a dvojrozmernej hrane (N_{K_3}).

DNF čiastočnej boolovskej funkcie f odpovedá pokrytie N_f intervalmi $N_{K_1}, \ldots, N_{K_s}$ a ku každému pokrytiu množiny N_f intervalmi, nachádzajúcimi sa vnútri množiny N_f, odpovedá DNF funkcie.

Príklad 2.5.2 *Vezmeme DNF čiastočnej boolovskej funkcie $f(x_1, x_2, x_3)$, ktorá je daná nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

Obr. 2.8: Karnaughova mapa čiastočnej boolovskej funkcie f



$$N_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$N_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$$

Týmto DNF odpovedajú dve pokrytia množiny N_f

$$N_{f1} = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup N_{K_3} \cup N_{K_4} \cup N_{K_5}$$

$$N_{f2} = N_{K_1^0} \cup N_{K_2^0}$$

kde $N_{K_1} = \{(0,0,0)\}$, $N_{K_2} = \{(1,0,0)\}$, $N_{K_3} = \{(1,0,1)\}$, $N_{K_4} = \{(1,1,0)\}$, $N_{K_5} = \{(1,1,1)\}$, $N_{K_1^0} = \{(0,0,0),(1,0,0)\}$, $N_{K_2^0} = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$. *Jedno z týchto pokrytí je bodové a druhé pozostáva z jednorozmernej a dvojrozmernej hrany.*

Nech r_i označuje rád intervalu N_{K_i}, číslo r, kde $r = \sum_{i=1}^{s} r_i$, budeme nazývať rádom pokrytia. Toto umožňuje sformulovať v geometrickom jazyku úlohu, úlohu o pokrytí, ktorá je ekvivalentná s úlohou minimalizácie čiastočnej boolovskej funkcie. Nájsť pre danú množinu N_f také pokrytie intervalmi, patriacimi do N_f

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup N_{K_3} \ldots \cup N_{K_s}$$

aby jeho rád bol minimálny.

K príkladu 2.5.2
Rád pokrytia r pre množinu N_{f1} danej čiastočnej boolovskej funkcie je 15, pre množinu N_{f2} 3.

2.6 Skrátená DNF

Definícia 2.6.1 *Interval N_K, obsiahnutý v N_f, sa nazýva maximálny (vzhľadom na N_f), ak neexistuje interval N'_K taký, že*

1. $N_K \subseteq N'_K \subseteq N_f$
2. *Rád intervalu N'_K je menší ako rád intervalu N_K.*

Definícia 2.6.2 *Konjunkcia K, odpovedajúca maximálnemu intervalu N_K množiny N_f, sa nazýva prostý implikant čiastočnej boolovskej funkcie f.*

Definícia 2.6.3 *DNF, ktorá je disjunkciou všetkých prostých implikantov funkcie f, sa nazýva skrátená DNF.*

$$N_s = K_1^0 \vee K_2^0 \vee \ldots \vee K_m^0$$

Geometrický prístup umožňuje aj spôsob zostavenia skrátenej DNF. Algoritmus zostrojenia funguje nasledovne. Vezmeme ľubovoľnú konjunktívnu normálnu formu čiastočnej boolovskej funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (napr. úplnú KNF). Potom rozpíšeme zátvorky, t.j. realizujeme distributívne zákony. V získanom výraze vynecháme nulové členy, odstránime pohltené a násobné členy, t.j. uskutočňujeme transformácie typu $K_1K_2 \vee K_1 = K_1$, $K_1 \vee K_1 = K_1$. Aplikovaním tohoto postupu dostaneme skrátenú DNF.

Príklad 2.6.1 *Uvažujeme funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$ danú nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

Obr. 2.9: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f

x_3

x_2

	1	0	1	-
x_1	-	-	1	0

Úplná KNF funkcie:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$

Po roznásobení zátvoriek a zjednodušení dostaneme

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = x_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$$

$$\vee x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

2.7 Iredundantnosť na základe geometrických znázornení, algoritmus zostrojenia iredundantných DNF

Definícia 2.7.1 *Pokrytie množiny N_f, pozostávajúce z maximálnych hrán (vzhľadom na N_f), sa nazýva ireducibilné, ak množina hrán, ktorá sa získa z pôvodnej vynechaním ľubovoľnej hrany, nebude pokrytím N_f.*

Definícia 2.7.2 *DNF, odpovedajúca ireducibilnému pokrytiu množiny N_f, sa nazýva iredundantná (v geometrickom zmysle).*

Príklad 2.7.1 *Pre čiastočnú boolovskú funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$ danú Karnaughovou mapou 2.4.1 je*

$$N_f = N_{\bar{x}_2\bar{x}_3} \cup N_{\bar{x}_1 x_3} \cup N_{x_1 x_2}$$

ireducibilným pokrytím a

$$N = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$$

je iredundantnou DNF (v geometrickom zmysle).

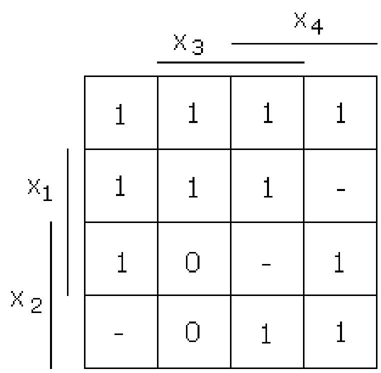
Pojem iredundantnej DNF vzhľadom na transformácie I a II a iredundantnej DNF v geometrickom zmysle sú ekvivalentné.

Medzi definovanými DNF - skrátenou, iredundantnou a minimálnou existujú nasledujúce vzťahy. Iredundantná DNF sa získa zo skrátenej vynechaním niektorých jej členov. Minimálna DNF (vzhľadom na index L_P) je iredundantná. Medzi iredundantnými DNF sa nachádza minimálna DNF (vzhľadom na L).

V tejto kapitole ukážeme zložitejší príklad zostrojenia iredundantnej DNF, pri ktorom využijeme geometrické predstavy.

Príklad 2.7.2 *Nech $f(x_1, x_2, x_3)$ je čiastočná boolovská funkcia daná nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

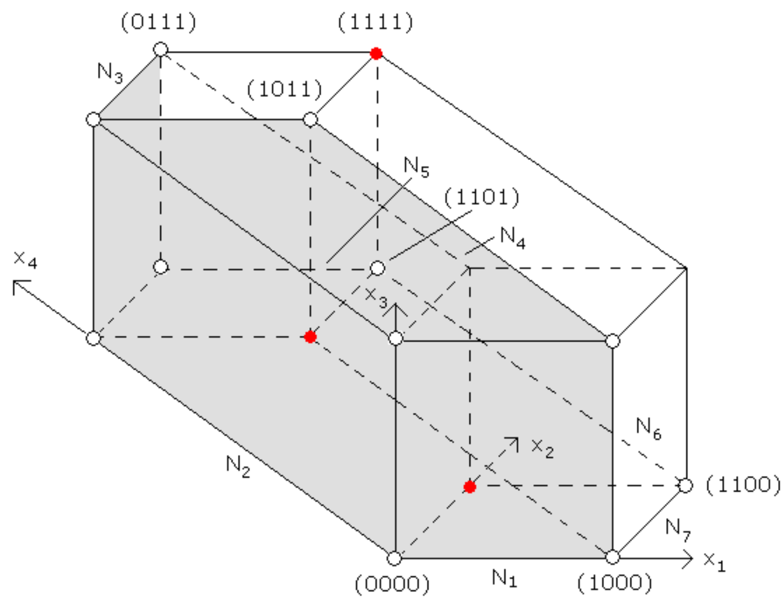
Obr. 2.10: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f



Definičný obor funkcie f je množina $\{1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 1000, 0111, 0110, 0101, 0011, 0010, 0001, 0000\}$. *Obor hodnôt funkcie f je množina* $B = \{0, 1\}$. *Funkcia nie je definovaná v bodoch* $0100, 1111, 1001$.

Na nasledujúcom obrázku je znázornená množina N_f.

Obr. 2.11: Množina N_f a maximálne hrany



$N_f = \{(1,1,0,1),(1,1,0,0),(1,0,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,1,1),$
$(0,1,0,1),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,0,0)\}$

Do N_f patria maximálne hrany: N_5, N_6, N_7 - jednoduché hrany a N_1, N_2, N_3, N_4 - dvojrozmerné hrany. Pokrytiu $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_6 \cup N_7$ teda odpovedá skrátená DNF. Dve hrany - N_3 a N_4 patria do ľubovoľného pokrytia, pretože iba ony pokrývajú vrcholy (0111) a (1011). Na pokrytie vrchola (0000) treba vziať hranu N_1 alebo hranu N_2.

a) Vezmeme hranu N_1. Zostáva pokryť vrcholy (1100) a (1101), čo možno urobiť dvoma spôsobmi: Alebo vezmeme hrany N_5 a N_7, alebo vezmeme hranu N_6. Dostaneme takto dve ireducibilné pokrytia

$$N_1 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_7, \qquad N_1 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_6$$

b) Vezmeme hranu N_2. Zostáva pokryť vrcholy (1000), (1100) a (1101), čo možno urobiť dvoma spôsobmi: Alebo vezmeme hrany N_5 a N_7, alebo vezmeme hrany N_6 a N_7. Dostávame ďalšie dve ireducibilné pokrytia

$$N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_7, \qquad N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_6 \cup N_7$$

Pri zostrojení iredundantných DNF si všimnime, že maximálnym hranám $N_1, \ldots, N_7$ odpovedajú prosté implikanty

$$K_1 = \bar{x}_2\bar{x}_4, \;\; K_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2, \;\; K_3 = \bar{x}_1 x_4, \;\; K_4 = \bar{x}_2 x_3$$

$$K_5 = x_2\bar{x}_3 x_4, \;\; K_6 = x_1 x_2 \bar{x}_3, \;\; K_7 = x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Dostaneme

$$N_1 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$N_2 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3$$

$$N_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$N_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$L_P(N_2) = 9, \;\; L_P(N_1) = L_P(N_3) = L_P(N_4) = 12$$

Teraz uvedieme algoritmus zostrojenia iredundantných DNF, na základe využitia geometrických predstáv:

Vychádzae z pokrytia množiny N_f sústavou všetkých jej maximálnych intervalov

$$N_{{K_1}^0}, \ldots, N_{{K_m}^0}$$

Nech $N_f = \{P_1, \ldots, P_\lambda\}$ a P_0 je ľubovoľný vrchol taký, že $P_0 \notin N_f$ (predpokladáme, že $f \neq 1$). Zostavíme tabuľku, v ktorej

$$\sigma_{i_j} = \begin{cases} 0, \;\; ak \;\; P_j \notin N_{{K_i}^0} & (i = 1, \ldots, m) \\ 1, \;\; ak \;\; P_j \in N_{{K_i}^0} & (j = 0, 1, \ldots, \lambda) \end{cases}$$

Prvý stĺpec je zrejme nulový, pretože $P_0 \notin N_f$, a v každom stĺpci rôznom od prvého je aspoň jedna jednotka. Pre každé j ($0 \leq j \leq \lambda$) nájdeme množinu E_j všetkých čísel riadkov, v ktorých sa v stĺpci P_j nachádza 1 (líši sa od stĺpca P_0). Nech $E_j = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_{\mu(j)}}\}$. Zostavíme výraz

$$\bigwedge_{j=1}^{\lambda} (e_{j_1}, \ldots, e_{j_{\mu(j)}})$$

a realizujeme transformáciu $\wedge\vee \rightarrow \vee\wedge$ pričom uvažujeme symboly e ako boolovské premenné. Potom v získanom výraze vylúčime pohlcované a násobné členy, t.j. realizujeme transformácie typu $A \wedge B \vee A = A$, $A \vee A = A$. Dostali sme výraz $\vee\wedge'$, ktorý je časťou výrazu $\vee\wedge$. Každý sčítanec v $\vee\wedge'$ bude určovať ireducibilné pokrytie.

Tabuľka 2.3: Tabuľka algoritmu zostrojenia iredundantných DNF

-	P_0	P_1	$\ldots$	P_j	$\ldots$	P_1
$N_{K_1{}^0}$	σ_{10}	σ_{11}	$\ldots$	σ_{1j}	$\ldots$	$\sigma_{1\lambda}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$N_{K_i{}^0}$	σ_{i0}	σ_{i1}	$\ldots$	σ_{ij}	$\ldots$	$\sigma_{1\lambda}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$N_{K_m{}^0}$	σ_{m0}	σ_{m1}	$\ldots$	σ_{mj}	$\ldots$	$\sigma_{m\lambda}$

K príkladu 2.4.1

Množina N_f danej čiastočnej boolovskej funkcie pozostáva zo šiestich vrcholov:

$$\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}$$

Vrcholy očíslujeme postupne $I, II, \ldots, VI$. Maximálnymi intervalmi sú hrany $N_1 = \{(0,0,1),(0,0,0)\}$, $N_2 = \{(0,1,1),(0,0,1)\}$, $N_3 = \{(1,1,1),(0,1,1)\}$, $N_4 = \{(1,1,1),(1,1,0)\}$, $N_5 = \{(1,1,0),(1,0,0)\}$, $N_6 = \{(1,0,0),(0,0,0)\}$,

ktorým odpovedajú prosté implikanty
$K_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2$, $K_2 = \bar{x}_1 x_3$, $K_3 = x_2 x_3$, $K_4 = x_1 x_2$, $K_5 = x_1\bar{x}_3$, $K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_3$.
Zostavíme podľa algoritmu nasledujúcu tabuľku:

Tabuľka 2.4: Výsledok algoritmu zostrojenia iredundantných DNF

-	0	I	II	III	IV	V	VI
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	1
6	0	1	0	0	0	0	1

Dostaneme

$$E_1 = \{1,6\},\ \ E_2 = \{1,2\},\ \ E_3 = \{2,3\}$$

$$E_4 = \{3,4\},\ \ E_5 = \{4,5\},\ \ E_6 = \{5,6\}$$

Potom

$$\vee\wedge = (1 \vee 6) \wedge (1 \vee 2) \wedge (2 \vee 3) \wedge (3 \vee 4) \wedge (4 \vee 5) \wedge (5 \vee 6) =$$

$$= (1 \vee 2 \wedge 5) \wedge (3 \vee 2 \wedge 4) \wedge (5 \vee 4 \wedge 6) =$$

$$= (1 \wedge 3 \vee 2 \wedge 3 \wedge 6 \vee 1 \wedge 2 \wedge 4 \vee 2 \wedge 4 \wedge 6) \wedge (5 \vee 4 \wedge 6) =$$

$$= 1 \wedge 3 \wedge 5 \vee 2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge 6 \vee 1 \wedge 2 \wedge 4 \wedge 5 \vee \underline{2 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6} \vee$$

$$\vee 1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 6 \vee \underline{2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 6} \vee \underline{1 \wedge 2 \wedge 4 \wedge 6} \vee 2 \wedge 4 \wedge 6 =$$

$$= 1 \wedge 3 \wedge 5 \vee 2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge 6 \vee 1 \wedge 2 \wedge 4 \wedge 5 \vee 1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 6 \vee 2 \wedge 4 \wedge 6$$

Dostávame päť ireducibilných pokrytí alebo päť iredundantných DNF

$$N_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3$$

$$N_2 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$N_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$$

$$N_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$N_5 = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

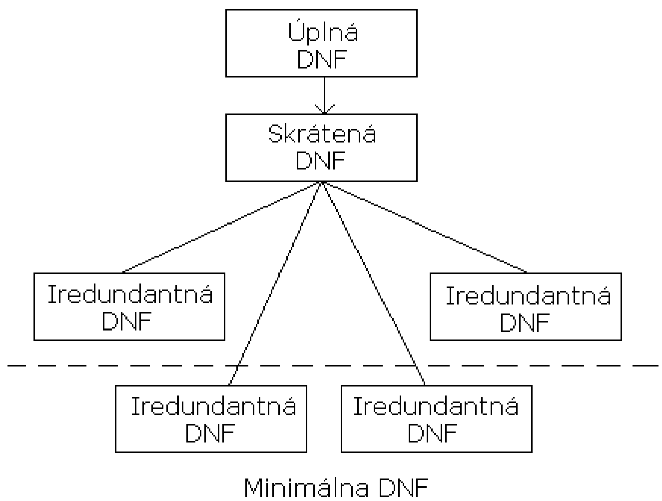
Dve z nich, N_1 a N_5, sú minimálne.

Uvedený algoritmus je efektívny pre tento príklad, avšak už pre funkcie neveľkého počtu premenných sa môže stať, že časová zložitosť algoritmu je vysoká, a teda je nevhodný. Súvisí to s rozsiahlosťou tabuľky, zložitosťou transformácií $\wedge\vee \to \vee\wedge$ a v neposlednom rade aj s veľkým počtom iredundantných DNF.

2.8 Quinova DNF, DNF typu ΣT

Proces zostrojovania minimálnych DNF, ktorý vychádza z úplnej DNF, možno charakterizovať nasledujúcou schémou:

Obr. 2.12: Schéma procesu minimalizácie



Najskôr sa získa skrátená DNF, (pritom v danom kroku sa zložitosť DNF môže zväčšiť), ďalej prechádza jednoznačný proces do vetviaceho sa procesu získavania iredundantných DNF a nakoniec sa z iredundantných DNF vyčleňujú minimálne DNF. Veľmi náročná časť tohto procesu je práve vetviaca sa časť, zostrojenie iredundantných DNF. Možno sa pokúsiť zjednodušiť ho, použitím dvoch okolností.

a) Vopred vylúčiť časť členov skrátenej DNF, ktoré sa nezúčastňujú pri zostrojovaní iredundantných DNF a tým skrátiť prezeranie.

b) Vynechanie časti členov skrátenej DNF realizovať tak, aby zvyšujúca časť umožnila zostrojiť aspoň jednu minimálnu DNF. Najvhodnejšie je, aby sa tento krok realizoval jednoznačne.

V tejto kapitole opíšeme zostrojovanie dvoch takýchto jednoznačne určovaných DNF - Quinova DNF a DNF typu ΣT.

Definícia 2.8.1 *Hrana N_K, maximálna vzhľadom na množinu N_f, sa nazýva jadrová hrana, ak existuje taký vrchol $\tilde{\alpha}$ z N_f, že $\tilde{\alpha} \in N_K$ a $\tilde{\alpha}$ nepatrí žiadnej inej maximálnej hrane (vzhľadom na N_f).*

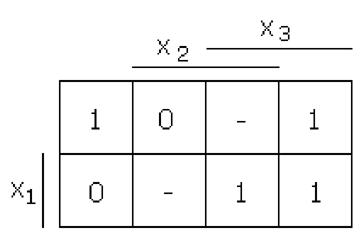
Definícia 2.8.2 *Množina všetkých jadrových hrán vzhľadom na N_f sa nazýva jadro (vzhľadom na N_f).*

Definícia 2.8.3 *DNF N_Q, ktorá sa získa z úplnej DNF vynechaním všetkých prostých implikantov odpovedajúcim maximálnym hranám, ktoré sa pokrývajú jadrom, sa nazýva Quinova DNF.*

Pre každú čiastočnú boolovskú funkciu existuje jediná Quinova DNF. Definícia Quinovej DNF dáva sformulovanie algoritmu umožňujúcemu zostrojiť Quinovu DNF.

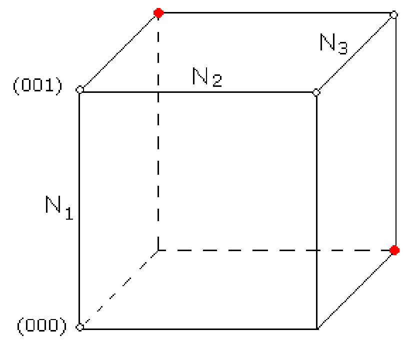
Príklad 2.8.1 *Uvažujme funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$ danú nasledujúcou Karnaughovou mapou:*

Obr. 2.13: Hodnoty čiastočnej boolovskej funkcie f



Definičný obor funkcie f je množina $\{111, 101, 100, 000, 001, 010\}$. *Obor hodnôt funkcie f je množina* $B = \{0, 1\}$. *Funkcia nie je definovaná v bodoch* $011, 110$.

Obr. 2.14: Množina N_f a maximálne hrany



Na obrázku sú znázornené maximálne hrany - N_1, N_2 a N_3. N_1 a N_3 sú jadrové hrany, pretože vrchol (0,0,0) pokrýva iba hrana N_1 a vrchol (1,1,1) iba hrana N_3. Jadro je $\{N_1, N_3\}$. Jadro patrí do každého ireducibilného pokrytia, z toho vyplýva, že hrany pokrývané jadrom nepatria do žiadneho pokrytia, ktoré nie je ireducibilné.

Skrátená DNF tejto čiastočnej boolovskej funkcie je

$$N_S = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3$$

Jadro $\{N_1, N_3\}$ pokrýva hranu N_2, ktorej odpovedá prostý implikant $\bar{x}_2 x_3$. To znamená, že Quinova DNF má tvar

$$N_Q = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_3$$

Uvedený príklad ukazuje, že od skrátenej DNF čiastočnej boolovskej funkcie vynechaním niektorých prostých implikantov možno prejsť ku Quinovej DNF, ktorá realizuje tú istú funkciu a pokrýva všetky jej iredundantné DNF.

Definícia 2.8.4 *DNF $N_{\Sigma\mathrm{T}}$, ktorá odpovedá pokrytiu množiny N_f súborom všetkých takých maximálnych hrán (vzhľadom na N_f), ktoré v krajnom prípade patria aspoň do jedného ireducibilného pokrytia, sa nazýva DNF typu $\Sigma\mathrm{T}$ a označuje $N_{\Sigma\mathrm{T}}$.*

DNF $N_{\Sigma\mathrm{T}}$ sa získava logickým súčtom (t.j. disjunkciou) všetkých iredundantných DNF čiastočnej boolovskej funkcie f a následným zlúčením rovnakých členov. Pre každú čiastočnú boolovskú funkciu existuje práve jedna DNF typu ΣT, ktorá ju realizuje. Získava sa zo skrátenej DNF vynechaním niektorých jej členov.

Definícia 2.8.5 *Nech $\tilde{\alpha} \in N_f$, potom súbor $\Pi_{\tilde{\alpha}}$ všetkých maximálnych hrán (vzhľadom na N_f), obsahujúcich vrchol $\tilde{\alpha}$, sa nazýva zväzok prechádzajúci cez $\tilde{\alpha}$.*

Definícia 2.8.6 *Nech $\tilde{\alpha} \in N_f$ a N_{K^0} je niektorá maximálna hrana taká, že $\tilde{\alpha} \in N_{K^0}$. Vrchol $\tilde{\alpha}$ sa nazýva regulárny vrchol (vzhľadom na N_f a N_{K^0}), ak existuje vrchol $\tilde{\beta} \in N_f \setminus N_{K^0}$ a $\Pi_{\tilde{\beta}} \subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}}$.*

Definícia 2.8.7 *Maximálna hrana N_{K^0} sa vzhľadom na N_f nazýva regulárna, ak každý jej vrchol je regulárny (vzhľadom na N_f a N_{K^0}).*

Veta 2.8.1 *(J. I. Žuravlev) Na to, aby prostý implikant K^0 funkcie f nepatril do DNF typu ΣT, je nutné a stačí, aby odpovedajúca maximálna hrana N_{K^0} bola regulárna.*

Dôkaz 2.8.1 *Nutná podmienka: Nech K^0 je prostý implikant funkcie f, K^0 nepatrí do DNF typu ΣT a N_{K^0} nie je (opačne ako tvrdí veta) regulárna hrana. V takomto prípade existuje vrchol $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \in N_{K^0}$, ktorý nie je regulárny. Označíme $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_q$ vrcholy z množiny $N_f \setminus N_{K^0}$:*

$$N_f \setminus N_{K^0} = \{\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_q\}$$

Podľa predpokladu

$$\Pi_{\tilde{\beta}_1} \not\subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}}, \ldots, \Pi_{\tilde{\beta}_q} \not\subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}}$$

preto existujú hrany $N_{K_1^0}, \ldots, N_{K_q^0}$, patriace postupne do zväzkov $\Pi_{\tilde{\beta}_1}, \ldots, \Pi_{\tilde{\beta}_q}$ také, že

$$\tilde{\alpha} \ \bar{\in} \ \Pi_{K_1^0}, \ldots, \tilde{\alpha} \ \bar{\in} \ \Pi_{K_q^0}$$

Zrejme

$$N_{K^0} \cup N_{K_1^0} \cup \ldots \cup N_{K_q^0} = N_f$$

Toto pokrytie umožňuje zostrojiť ireducibilné pokrytie množiny N_f. Pritom sa môžu vynechať niektoré z hrán $N_{K_1^0} \ldots N_{K_q^0}$. Zároveň však bude hrana N_{K^0} nevyhnutne patriť do ireducibilného pokrytia, pretože iba ona pokrýva vrchol $\tilde{\alpha}$. Dostávame, že N_{K^0} patrí do niektorej iredundantnej DNF, a teda nevyhnutne aj do DNF typu $\Sigma\mathrm{T}$, čo je spor s predpokladom. Hrana N_{K^0} je teda regulárna.

Postačujúca podmienka: Nech N_{K^0} je regulárna hrana. Ukážeme, že K^0 nepatrí do DNF typu $\Sigma\mathrm{T}$. Označíme $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_t$ vrcholy množiny N_{K^0}, t.j.

$$N_{K^0} = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_t\}$$

V dôsledku regulárnosti N_{K^0} existujú vrcholy $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_t$ z $N_f \setminus N_{K^0}$ také, že

$$\Pi_{\tilde{\beta}_1} \subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}_1}, \ldots, \Pi_{\tilde{\beta}_t} \subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}_t} \qquad (1)$$

Vezmeme ľubovoľnú iredundantnú DNF N funkcie f a príslušné ireducibilné pokrytie. Toto pokrytie $N_f = N_1 \cup \ldots \cup N_m$ zrejme pokrýva vrcholy $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_t$ postupne hranami $N_{i_1}, \ldots, N_{i_t}$. V dôsledku vzťahov (1) tie isté hrany pokrývajú vrcholy $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_t$, t.j.

$$N_{i_1} \cup \ldots \cup N_{i_t} \supseteq N_{K^0}$$

Preto hrana N_{K^0} nepatrí do daného ireducibilného pokrytia a prostý implikant K^0 do DNF N.

Uvedená veta tvorí základ pre sformulovanie algoritmu umožňujúceho vytvárať DNF typu $\Sigma\mathrm{T}$. Zo skrátenej DNF je potrebné vynechať všetky konjunkcie, ktoré odpovedajú regulárnym hranám. DNF $N_{\Sigma\mathrm{T}}$ čiastočnej boolovskej funkcie sa získava z Quinovej DNF N_Q tejto funkcie vynechaním niektorých prostých implikantov. Vyplýva to zo skutočnosti, že každá maximálna hrana, ktorá je pohltená jadrom, je regulárna.

K príkladu 2.8.1

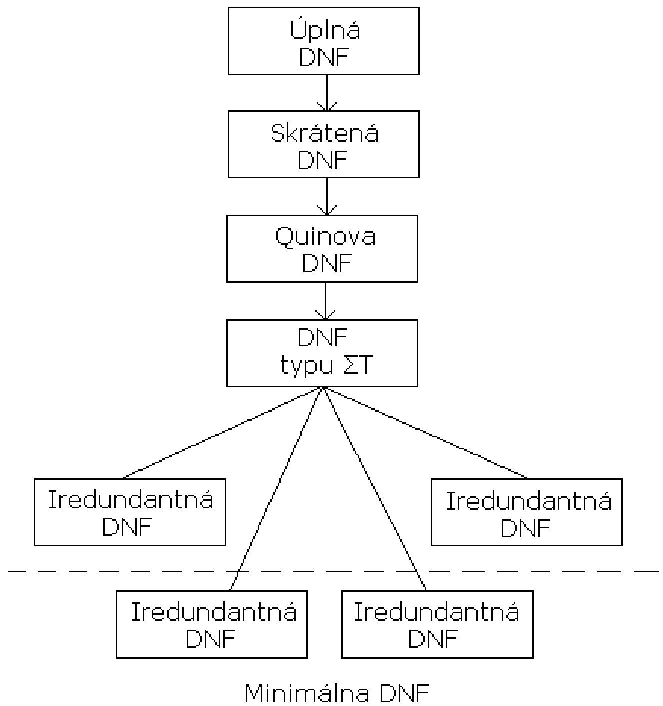
Vezmeme si pre danú čiastočnú boolovskú funkciu za vrchol $\tilde{\alpha}$ vrchol (0,0,1) a za maximálnu hranu N_2. Zrejme $\tilde{\alpha} \in N_2$. Ukážeme, že vrchol $\tilde{\alpha}$ je regulárny vrchol (vzhľadom na N_f a N_2). Nech $\tilde{\beta} = (0{,}0{,}0)$. Dostávame

$$\Pi_{\tilde{\alpha}} = \{N_1, N_2\}, \;\; \Pi_{\tilde{\beta}} = \{N_1\}, \;\; \Pi_{\tilde{\beta}} \subseteq \Pi_{\tilde{\alpha}}$$

Maximálna hrana N_2 je regulárna hrana, ale N_1 a N_3 nie sú regulárne hrany. Jej vynechaním dostaneme $N_1 \cup N_3$, čo je DNF typu ΣT, ktorá je zhodná s iredundantnou DNF tejto funkcie.

Teraz môžeme proces minimalizácie charakterizovať schémou na nasledujúcom obrázku:

Obr. 2.15: Schéma procesu minimalizácie



2.9 Lokálne skúmanie pokrytia pri úlohách minimalizácie, pojem lokálneho algoritmu

Algoritmy zostrojenia DNF N_Q a DNF $N_{\Sigma T}$ vychádzajú zo špeciálneho skúmania pokrytia N_f sústavou všetkých maximálnych hrán, v dôsledku čoho sa zhromažďuje určitá informácia o každej maximálnej hrane. Napr. sa zisťuje, či je daná hrana jadrová (patrí do každého ireducibilného pokrytia) alebo regulárna (nepatrí ani do jedného ireducibilného pokrytia). Vychádzajúc z tejto informácie, realizuje sa ďalej vynechanie niektorých maximálnych hrán.

Definícia 2.9.1 *Množina* $S_0(N_{K^0}) = \{N_{K^0}\}$ *sa nazýva okolie rádu 0 maximálnej hrany* N_{K^0}. *Nech sú definované okolia rádov* $0, 1, \ldots, u-1$ *maximálnej hrany* N_{K^0}. *Potom okolie* $S_u(N_{K^0}) = \{N_{K^0}\}$ *rádu u maximálnej hrany* N_{K^0} *sa definuje ako množina všetkých maximálnych hrán z* N_f, *ktorých prienik s* $S_{u-1}(N_{K^0}) = \{N_{K^0}\}$ *je neprázdny. Je zrejmé, že*

$$S_0(N_{K^0}) \cup S_1(N_{K^0}) \cup \ldots \cup S_{u-1}(N_{K^0}) \cup \ldots$$

Definícia 2.9.2 *Hrany* $N_{K_i^0}$ *a* $N_{K_j^0}$ *sa nazývajú viazanými, ak existuje také u, že* $N_{K_j^0} \in S_u(N_{K_i^0})$

K príkladu 2.8.1

Ako K^0 vezmeme konjunkciu $\bar{x}_1\bar{x}_2$, potom

$$S_0(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = \{N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\}$$

$$S_1(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = \{N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, N_{\bar{x}_2\bar{x}_3}, N_{\bar{x}_1x_3}\}$$

$$S_2(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = \{N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, N_{\bar{x}_2\bar{x}_3}, N_{\bar{x}_1x_3}, N_{x_1\bar{x}_3}, N_{x_2x_3}\}$$

$$S_3(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = \{N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, N_{\bar{x}_2\bar{x}_3}, N_{\bar{x}_1x_3}, N_{x_1\bar{x}_3}, N_{x_2x_3}, N_{x_1x_2}\}$$

$$S_u(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = S_3(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}), \qquad u \geq 3$$

Platí

$$S_0(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) \subset S_1(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) \subset S_2(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) \subset S_3(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = S_4(N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) = \ldots$$

Označíme u_0 maximálny rád takého okolia, že

$$S_0(N_{K^0}) \subset S_1(N_{K^0}) \subset \ldots \subset S_{u_0}(N_{K^0}) = S_{u_0+1}(N_{K^0}) = \ldots$$

pričom každé okolie rádu u ($u > 0$) obsahuje v krajnom prípade jeden vrchol, ktorý nepatrí do okolia rádu $u - 1$, ak $u \geq u_0 - 1$. Z toho dostávame, že $u_0 \leq 2^n$.

Na nasledujúcom príklade objasníme zmysel lokálneho skúmania pokrytí. Nech $K_1^0 \vee \ldots \vee K_m^0$ je skrátená DNF funkcie f a $N_{K_1^0} \cup \ldots \cup N_{K_m^0}$ je pokrytie maximálnymi hranami množiny N_f. Množina všetkých hrán $\{K_{K_i}\}$ sa jednoznačne delí na komponenty súvislosti, t.j. na také dve podmnožiny, z ktorých sú každé dve hrany viazané a hrany z rôznych podmnožín nie sú viazané.

Vzniká otázka, ako pre ľubovoľnú hranu N_{K_0} nájsť komponent súvislosti, do ktorého patrí. Označíme konjunkciu K_0 a začneme prezeranie konjunkcií v poradí ich nasledovania v skrátenej DNF. Ak $N_{K_0} \in S_1(N_{K_1^0})$, označíme konjunkciu K_1^0. Ak $N_{K_0} \notin S_1(N_{K_1^0})$, konjunkciu neoznačíme a prejdeme ku konjunkcii K_2^0. Konjunkciu K_2^0 označíme práve vedy, keď $S_1(N_{K_2^0})$ obsahuje hrany označených konjunkcií. Takto prezrieme celú skrátenú DNF a označíme konjunkcie. Proces opakujeme dovtedy, kým sa nedostaneme k prípadu, keď sa pri niektorom prezeraní počet konjunkcií nezväčší. Vynecháme potom všetky neoznačené konjunkcie. Množina konjunkcií, ktoré nám ostanú, určujú hľadaný komponent súvislosti. Spočiatku sa skúma pokrytie pomocou okolia prvého rádu a na jeho základe sa označujú konjunkcie. Je teda potrebné si pre každú konjunkciu pamätať, či je alebo nie je označená a pamätať si, či sa pri danom prezeraní zvyšuje počet označení alebo nie. Ako druhý parameter vezmeme číslo v, počet prípustných buniek v binárnej pamäti pre každú konjunkciu.

Prejdeme teraz k popisu lokálnych algoritmov[2] nad pokrytiami z maximálnych hrán s parametrami u a v. Činnosť algoritmu sa delí na dve časti.

1. Skúmanie pokrytia. V určenom poradí sa prezerá skrátená DNF a na základe toho, čo sa vyskytuje v okolí $S_u(N_{K^0})$ konjunkcie K^0, t.j. časti skrátenej DNF a informácie získanej pre konjunkciu z tohto okolia, vypočítavajú sa nové hodnoty $\gamma_1^0, \ldots, \gamma_l^0$ pamäťových buniek

[2]Pojem Lokálneho algoritmu zaviedol J.I.Žuravlev

pre K^0. Pritom sa vyžaduje, aby sa tento proces realizoval rovnako pre ľubovoľné dve DNF, obsahujúce konjunkciu K^0, pri ktorých sú okolia konjunkcie K^0 zhodné s hodnotami pamäťových buniek pre konjunkciu daného okolia (lokálnosť zhromažďovania informácie). Pri splnení uvedených požiadaviek je proces zhromažďovania informácie konvergentný, a teda môže byť ukončený. V takýchto prípadoch získavame finálnu informáciu danú hodnotami pamäťových buniek pre konjunkciu zo skrátenej DNF.

2. Prijatie riešenia. Podľa vypočítaných hodnôt pamäťových buniek pre konjunkcie z $S_u(N_{K^0})$ sa určuje možnosť vynechania konjunkcie K^0. Táto procedúra sa uskutočňuje taktiež lokálnym spôsobom, t.j. je rovnaká pre ľubovoľné dve DNF obsahujúce K^0, pri ktorých sú dve okolia K^0 zhodné s hodnotami pamäťovych buniek pre konjunkcie z tohto okolia.

Sformulovaný algoritmus na nájdenie komponentu súvislosti v skrátenej DNF, obsahujúcej danú konjunkciu K^0, je lokálnym algoritmom s parametrami u = 1, v = 1.

Nech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je taká funkcia, že pokrytie množiny N_f sústavou všetkých jej maximálnych hrán vytvára komponent súvislosti (v opačnom prípade sa úloha minimalizácie s využitím lokálnych algoritmov rieši nezávisle pre každý komponent súvislosti). Existuje lokálny algoritmus s parametrami u = 1, a v = 2^n, ktorý umožňuje zostrojiť minimálnu DNF.

1. etapa. Priradíme jednoznačne n-ticiam $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leftrightarrow i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
Každej konjunkcii K^0 zo skrátenej DNF funkcie F priradíme binárny

vektor

$$(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_{2^n}^0)$$

kde $\gamma_{i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}^0 = 1$ práve vtedy, keď $K^0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Je zrejmé, že $(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_{2^n}^0)$ bude kódom hrany K^0. Potom nasleduje skúmanie pokrytia pomocou okolia prvého rádu a nové hodnoty $(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_{2^n}^0)$ pre K^0 sa vypočítavajú ako disjunkcia vektorov jednotlivých komponentov pre dané okolie. Vedie to k tomu, že pre každú konjunkciu skrátenej DNF vypočítame binárny vektor a ten bude rovnaký pre všetky konjunkcie - bude kódom pre funkcie.

2. etapa. Riešiace pravidlo definujeme takto: Vezmeme ľubovoľnú minimálnu DNF funkcie f a danú konjunkciu vynecháme práve vtedy, keď nepatrí tejto minimálnej DNF. Toto riešiace pravidlo spĺňa požiadavku lokálnosti a vedie k minimálnej DNF.

Na záver kapitoly si ukážeme, že Quinov algoritmus a algoritmus zostrojenia DNF typu ΣT sú lokálne a ohodnotíme ich parametre.

V Quinovom algoritme sa najskor zisťujú jadrové konjunkcie, na to je nevyhnutné poznať okolie prvého rádu konjunkcií skrátenej DNF a pamätať si označenia. Ak konjunkcia nie je jadrová, je označená 0, ak je jadrová, tak je označená 1. Na prijatie riešenia o možnosti vynechania konjunkcie je potrebné opäť poznať okolie prvého rádu a pozrieť sa, či sa pokrýva označenými konjunkciami z tohoto okolia. Jedná sa vlastne o lokálny algoritmus s parametrami u = 1, v = 1.

V algoritme zostrojenia DNF typu ΣT sa najskôr určuje, či je daná konjunkcia regulárna, na to treba porovnávať zväzky prechádzajúce vrcholmi danej hrany (konjunkcie) a zväzky prechádzajúce vrcholmi z okolia prvého rádu danej hrany a neležiacich v nej (t.j. ležiacich v okolí druhého rádu). Regulárne hrany označíme symbolom 1, hranu, ktorá nie je regulárna symbolom 0. Potom realizujeme prijatie riešenia. Vynechávajú sa hrany so symbolom 1. Tento algoritmus je lokálny s parametrami u = 2 a v = 1.

Záver

V tejto práci definujeme rôzne DNF, pomocou ktorých môžeme vyjadriť čiastočné boolovské funkcie. Na určenie zložitosti DNF sa zavádza index jednoduchosti. Je to funkcionál, ktorý vyžaduje splnenie štyroch axióm - axiómy nezápornosti, axiómy vypuklosti, axiómy invariantnosti a axiómy monotónnosti. Ukázali sme vybrané algoritmy na minimálizáciu v triede DNF. Spôsob konštrukcie minimálnej DNF pripúšťa triviálne riešenie, avšak je veľmi náročné z hľadiska realizácie, pretože je založené na prezeraní všetkých DNF. Sú známe aj iné algoritmy, ako algoritmus zjednodušenia DNF, ktorý pracuje v troch fázach. V prvej fáze sa skonštruuje ľubovoľná DNF ako východisková. V druhej fáze sa preusporiadajú konjunkcie a v každej sa preusporiadajú činitele. V poslednej fáze sa aplikujú operácie vynechania elementárnej konjunkcie a vynechania činiteľa. Ako výsledok procesu dostaneme iredundantnú DNF. Vychádzajúc z niektorého usporiadania konjunkcií a činiteľov v DNF, dostaneme týmto algoritmom minimálnu DNF. Ďalej sme popísali algoritmus zostrojenia skrátenej DNF na základe geometrických znázornení, ktorý vychádza z konjunktívnej normálnej formy čiastočnej boolovskej funkcie a algoritmus zostrojenia iredundantnej DNF. Neskôr sme uviedli algoritmy zostrojenia Quinovej DNF a DNF typu ΣT, ktoré vychádzajú zo špeciálneho skúmania pokrytia N_f sústavou všetkých maximálnych hrán. Na základe informácie o danej hrane (teda či je daná hrana regulárna alebo jadrová) sa neskôr realizujú vynechanie niektorej maximálnej hrany. Vhodné je aj použiť lokálne algoritmy, ktoré zahrňujú mnohé známe triedy algoritmov a lokálne algoritmy s parametrami u a v, pretože majú ohraničenú náročnosť.

Literatúra

[1] Sergej Vsevolovic Jablonski, Úvod do diskrétnej matematiky, Alfa, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1984.

[2] Doc. RNDr. Jana Galanová, CSc., RNDr. Peter Kaprálik, CSc., Diskrétna matematika, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1997

[3] A. D. Friedman, P. R. Menon, Teorie a návrh logických obvodů, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1983

[4] S. J. Hong and R. G. Cain and D. L. Ostapko, A heuristic approach for logic minimization, IBM Journal of Research and Development, 1974, Vol. 18, pp. 443-458

[5] W. V. Quine, The Problem of Simplifying Truth Functions, The American Mathematical Monthly, Vol. 59, No. 8 (Oct., 1952), pp. 521-531

[6] David Belton, Minimisation of Boolean Functions, Combinational Logic & Systems Tutorial Guide, University of Surrey, Surrey-UK, April 1998

[7] Shrish Verma and K. D. Permar, A Novel Method for Minimization of Boolean Functions using Gray Code and development of a Parallel Algorithm, http://www.informatik.tu-freiberg.de/prof2/ws_bp6/slides/Verma_S.pdf