

# Kempe ekvivalentné farbenia grafov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Matej Duník

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA INFORMATIKY

9.2.1 Informatika

Vedúci záverečnej práce  
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

BRATISLAVA 2009

Čestne prehlasujem, že túto bakalársku prácu som vypracoval samostatne, len s použitím citovanej literatúry.

Bratislava 2009

Ďakujem RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za cenné rady, pripomienky a odborné vedenie pri vypracovávaní bakalárskej práce.

Tiež ďakujem svojim priateľom, najmä Barborke Candrákovej, za morálnu podporu.

## Abstrakt

Práca sa zaoberá Kempe-grafmi farbení, najmä Kempe-ekvivalentnosťou hranových farbení kubických grafov. Najprv si zavedieme všeobecné pojmy z teórie grafov a následne tiež pojmy Kempe-prepnutie, graf farbení, Kempe-ekvivalencia.

V ďalšom texte ukážeme niekoľko teoretických výsledkov o grafoch farbení odvodených z farbenia hrán kubických grafov, ktoré sú už známe a boli publikované v [6].

Nasleduje popis algoritmov, ktoré sme používali na generovanie grafov farbení a testovanie parametrov.

V ďalšej kapitole vyslovíme a dokážeme niekoľko tvrdení o grafoch farbení, napr. odhad stupňov vrcholov. Vďaka niektorým je možné vylepšiť efektivitu algoritmov. Tiež sme sa snažili pochopiť a zjednodušiť pohľad na štruktúru grafov farbení pomocou rozdelenia množiny vrcholov na také triedy, že nimi indukované podgrafy sú navzájom izomorfné.

V poslednej kapitole sme reagovali na problém uvedený v [6], ktorý znie: „Pre ktoré kubické bipartitné grafy  $G$  je graf hranových 3-farbení súvislý?“ a ukázali sme, že podmienky, ktoré stanovil Fisk, vo svojom dôkaze špeciálneho prípadu nie sú nutné.

**Kľúčové slová:** teória grafov, grafy farbení, Kempe-ekvivalencia grafov

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Základné definície</b>	<b>5</b>
<b>2 Známe výsledky</b>	<b>9</b>
<b>3 Analýza</b>	<b>10</b>
3.1 Úvod	10
3.2 Programovací jazyk a použitý software	10
3.3 Generovanie grafov	11
3.4 Generovanie grafov farbení	11
3.4.1 Zmena reprezentácie grafu	11
3.4.2 Reguárne farbenia	12
3.4.3 Kempe prepínanie	13
3.5 Analyzovanie grafov	14
3.5.1 Počet vrcholov grafu farbení	15
3.5.2 Polomer a priemer grafu	15
3.5.3 Bipartitnosť	16
3.5.4 Stupne vrcholov grafu farbení	16
3.5.5 Stupeň vrcholovej súvislosti	16
3.5.6 Stupeň hranovej súvislosti grafu	18
3.5.7 Počet komponentov grafu	19
3.5.8 Počet trojuholníkov v grafe	19
3.5.9 Planárnosť grafu	19
3.6 Výsledky	20
<b>4 Teoretické výsledky</b>	<b>21</b>
4.1 Kubické grafy	21
4.2 Bipartitné kubické grafy	28
4.2.1 Neplanárne 3-súvislé bipartitné kubické grafy	28
4.2.2 Neplanárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy	30

4.2.3	Planárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy . . . . .	32
<b>Záver</b>		<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Výsledky testov</b>	<b>35</b>
A.1	Vysvetlivky k tabuľkám . . . . .	35
A.2	Kubické grafy, 8 vrcholov, 3 farby . . . . .	36
A.3	Kubické grafy, 10 vrcholov, 3 farby . . . . .	36
A.4	Kubické grafy, 12 vrcholov, 3 farby . . . . .	37
<b>Literatúra</b>		<b>39</b>

# Zoznam obrázkov

1.1	Príklad K-prepnutia. a) hranové 3-farbenie grafu $CL_4$ , b) K-komponent $CL_4(1, 2)$ , c) K-komponent $CL_4(1, 2)$ po K-prepnutí, d) nové hranové 3-farbenie grafu $CL_4$ . . . . .	6
3.1	Konverzia grafu do line-grafu . . . . .	12
3.2	Transformácia grafu $K_{3,3}$ na orientovaný graf pre účely testovania stupňa vrcholovej súvislosti. . . . .	18
4.1	Graf $CL_4$ (z anglického cyclic ladder) . . . . .	22
4.2	Graf farbení $F(CL_4, 3)$ s vyznačenými podgrafmi $F'$ . . . . .	23
4.3	Graf $H$ pre 3 farby je $K_{3,3}$ . . . . .	25
4.4	Graf $H$ pre 4 farby . . . . .	26
4.5	Príklad triedy neplanárnych 3-súvislých bipartitných grafov, ktoré majú súvislý graf 3-farbení . . . . .	29
4.6	Blok - všetky navzájom neizomorfné farbenia . . . . .	30
4.7	Zafixované farby troch navzájom incidentných hrán . . . . .	30
4.8	Neplanárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy so súvislým grafom farbení . . . . .	31
4.9	Všetky neizomorfné farbenia bloku (kocky) . . . . .	31
4.10	Príklady planárnych 2-súvislých bipartitných kubických grafov	33
4.11	Ďalšie príklady planárnych 2-súvislých bipartitných kubických grafov . . . . .	33

# Úvod

Nezainteresovaný pozorovateľ by mohol z letného pohľadu do teórie grafov usúdiť, že ide o vedný odbor, v ktorom nie je náročné dopracovať sa k novým zisteniam. Stačí si predsa zdefinovať novú oblasť skúmania a k nejakým elementárnym výsledkom sa predsa vždy dopracujeme. V skutočnosti to však s teóriou grafov vôbec nie je také jednoduché a problémy, ktorými sa matematici v tejto oblasti zaoberajú majú svoj reálny pôvod. Preto riešenie čiastkových úloh, ktoré zdanlivo v praxi nevieme aplikovať, má veľký význam.

Jednou zo zaujímavých oblastí teórie grafov, je problematika Kempeho prepnutí. Predstavme si graf, ktorý je zafarbený. Kempeho prepnutie je operácia, ktorá nejakým spôsobom (nižšie ho presne zdefinujeme) farby zmení a teda dostaneme nové farbenie. Hneď nám napadnú prirodzené otázky, ako napríklad: Vieme pomocou takýchto prepnutí dostať akékoľvek farbenie grafu? Ak áno, tak najmenej na koľko prepnutí? Ak by sme na podlahu každej z miestností veľkého bludiska namaľovali jedno farbenie grafu a chodbami pospájali miestnosti s obrázkami, medzi ktorými sa dá „prepnúť“, ako vlastne vyzerá také „bludisko“? Dá sa dostať z každej miestnosti do každej? A dá sa také bludisko vyrobiť na rovine alebo bude treba schody? Dopredu prezradíme, že naše bludiská budú schody potrebovať.

Skúmaním Kempeho prepnutí a Kempeho ekvivalentných farbení sa zaoberajú matematici už nejaký čas, čo samé svedčí o dôležitosti problému. Pokúsime sa teda touto prácou doplniť jestvujúce výsledky.



# Kapitola 1

## Základné definície

**Definícia 1.** *Jednoduchý neorientovaný graf*  $G$  je usporiadaná dvojica  $(V, E)$ , kde  $V$  je množina a  $E$  je množina dvojprvkových podmnožín množiny  $V$ . Ak nie je napísané inak, tak sa grafom myslí jednoduchý neorientovaný graf. Prvky množiny  $V$  sa nazývajú *vrcholy* a prvky množiny  $E$  sa nazývajú *hrany*. Množinu vrcholov grafu  $G$  označujeme aj  $V(G)$ . Množinu hrán grafu  $G$  označujeme aj  $E(G)$ .

**Definícia 2.** Hrana  $\{u, v\}$  je *incidentná* s vrcholom  $w$ , ak platí,  $w \in \{u, v\}$ .

**Definícia 3.** *Stupeň vrchola*  $v$  v grafe je počet hrán incidentných s vrcholom. Stupeň vrchola  $v$  v grafe  $G$  sa označuje  $\deg_G(v)$

**Definícia 4.** Dve hrany  $\{u_1, u_2\}$  a  $\{v_1, v_2\}$  sú *incidentné*, ak nie sú totožné a súčasne ak v grafe existuje vrchol  $w$ , s ktorým sú incidentné.

**Definícia 5.** *Excentricita* vrchola grafu  $e(v)$  v súvislom grafe je maximálna vzdialenosť medzi  $v$  a ľubovoľným vrcholom grafu. Pre nesúvislý graf majú všetky vrcholy definatoricky excentricitu nekonečno. ( $e(v) = \infty$ )

**Definícia 6.** *Polomer* grafu je definovaný ako minimum zo všetkých excentricít vrcholov grafu.

**Definícia 7.** *Priemer* grafu je definovaný ako maximum zo všetkých excentricít vrcholov grafu.

**Definícia 8.** *Regulárne hranové farbenie* grafu je zobrazenie  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  také, že pre každé dve incidentné hrany  $e, e'$  platí,  $c(e) \neq c(e')$ . Hranovým  $k$ -farbením sa myslí regulárne hranové  $k$ -farbenie, ak nie je napísané inak. Číslo  $c(v)$  sa nazýva *farba* vrchola  $v$ .

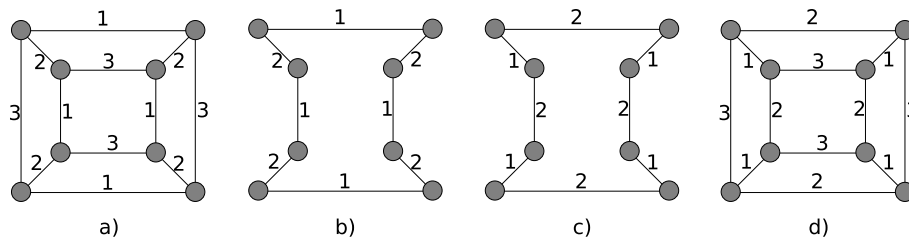
**Definícia 9.** Najmenšie  $k$  také, že existuje regulárne hranové  $k$ -farbenie grafu  $G$  sa nazýva *chromatický index* grafu  $G$  a označuje sa  $\chi'(G)$ .

**Definícia 10.** Graf  $G'(V', E')$  je *podgraf* grafu  $G(V, E)$ , ak platí  $V' \subset V$  a súčasne  $E' \subset (E \cap \binom{V'}{2})$ .

**Definícia 11.** Graf  $G'(V', E')$  je *podgraf* grafu  $G(V, E)$  *indukovaný množinou hrán*  $D \subset E$ , ak platí  $E' = D$  a súčasne  $v \in V' \Leftrightarrow v \in V \wedge \exists e \in E'$  taká, že  $e$  a  $v$  sú incidentné. Graf  $G'$  označujeme  $G(D)$ .

**Definícia 12.** Majme graf  $G$  a farbenie  $c$ . Nech  $a, b \in 1, \dots, k$  sú rôzne farby. Označme  $G(a, b)$  podgraf grafu  $G$  indukovaný množinou tých hrán  $\{e_1, \dots, e_i, \dots\}$ , pre ktoré platí, že ich farba  $c(e_i)$  je  $a$  alebo  $b$ .

**Definícia 13.** Každý súvislý komponent  $K$  grafu  $G(a, b)$ , kde  $a, b$  sú rôzne farby, nazývame *K-komponent* (skratka od Kempe komponent). Výmennou farieb  $a$  a  $b$  v niektorom komponente dostaneme nové regulárne hranové farbenie. Túto operáciu nazývame *K-prepnutie*.



Obr. 1.1: Príklad K-prepnutia. a) hranové 3-farbenie grafu  $CL_4$ , b) K-komponent  $CL_4(1, 2)$ , c) K-komponent  $CL_4(1, 2)$  po K-prepnutí, d) nové hranové 3-farbenie grafu  $CL_4$

**Definícia 14.** Dve  $k$ -farbenia  $c_1, c_2$  sú *K-ekvivalentné* (Kempe ekvivalentné, označujeme aj  $K^k$ -ekvivalentné, ak chceme zdôrazniť počet farieb vo farbení), ak existuje postupnosť K-prepnutí, pomocou ktorých zmeníme farbenie  $c_1$  na  $c_2$ .

**Definícia 15.** Majme graf  $G$ . Množinu všetkých regulárnych hranových  $k$ -farbení grafu  $G$  označíme  $V'$ . Nech  $E'$  je taká množina dvojprvkových podmnožín  $V'$ , že platí  $c_1, c_2 \in E'$  práve vtedy, keď existuje K-prepnutie, pomocou ktorého z  $c_1$  dostaneme  $c_2$ . Dvojicu  $(V', E')$  nazveme *graf k-farbení grafu  $G$*  a označíme  $F(G, k)$ .

Rozhodli sme sa pre úplnosť ponúknuť dôkaz toho, že K-ekvivalencia je reláciou ekvivalencie. Táto vlastnosť je implicitne používaná v [6].

**Veta 1.1.** *Relácia K-ekvivalentný je reláciou ekvivalencie.*

*Dôkaz.* Relácia je zjavne reflexívna - môžeme použiť prázdnu postupnosť K-prepnutí. Majme tri  $k$ -farbenia  $c_1, c_2, c_3$ . Ak sú K-ekvivalentné  $c_1$  a  $c_2$ , tak existuje postupnosť K-prepnutí, ktorá  $c_1$  zmení na  $c_2$ . Podobne ak sú K-ekvivalentné  $c_2$  a  $c_3$ , tak existuje postupnosť K-prepnutí, ktorá  $c_2$  zmení na  $c_3$ . Spojením týchto dostávame postupnosť, ktorá zmení  $c_1$  na  $c_3$ , čiže relácia je tranzitívna. Ak  $c_1$  je K-ekvivalentné s  $c_2$ , tak existuje postupnosť, túto aplikujeme v opačnom poradí, vďaka čomu dostaneme z  $c_2$  naspäť  $c_1$ . Teda relácia je symetrická.  $\square$

**Definícia 16.** *Komponent* grafu  $G$  je neprázdna množina vrcholov  $A \subset V(G)$  taká, že pre každú dvojicu vrcholov  $\{v, w\} \subset A$  platí, že v grafe  $G$  existuje cesta, ktorá ich spája a pre každú dvojicu vrcholov  $\{v, w\}$  takú, že  $v \in A, w \in V(G) - A$  platí, že v grafe  $G$  neexistuje cesta, ktorá ich spája.

**Definícia 17.** *Stupeň vrcholovej súvislosti* je  $|V|-1$  ak je graf kompletný a ak je graf nekompletný, je to minimálny počet vrcholov, ktoré treba odstrániť, aby počet komponentov bol viac ako 1. Stupeň vrcholovej súvislosti grafu  $G$  označujeme  $\kappa(G)$ .

**Definícia 18.** *Stupeň hranovej súvislosti* je minimálny počet hrán, ktoré treba odstrániť, aby počet komponentov bol viac ako 1. Stupeň hranovej súvislosti grafu  $G$  označujeme  $\lambda(G)$ .

**Definícia 19.** Grafy  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  sú *izomorfné*, ak existuje bijektívne zobrazenie  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , že pre každú dvojicu vrcholov  $\{v, w\} \subset V_1$  platí  $\{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E_2$

**Definícia 20.** Dve *vrcholové farbenia*  $c_1, c_2$  grafu  $G$  sú *izomorfné*, ak  $\forall v, w \in V(G)$  platí  $c_1(v) = c_1(w) \Leftrightarrow c_2(v) = c_2(w)$ .

**Definícia 21.** Dve *hranové farbenia*  $c_1, c_2$  grafu  $G$  sú *izomorfné*, ak  $\forall e_1, e_2 \in E(G)$  platí  $c_1(e_1) = c_1(e_2) \Leftrightarrow c_2(e_1) = c_2(e_2)$ .

**Definícia 22.** Grafy (vrcholové farbenia, hranové farbenia) sú *neizomorfné* práve vtedy, keď nie sú izomorfné.

**Definícia 23.** *Trojuholník* v grafe  $G$  je taká trojica vrcholov  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V(G)$ , že  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\} \subset E(G)$

**Definícia 24.** Graf je *planárny* ak existuje k nemu izomorfný graf  $G$ , pre ktorý platí:

1.  $V(G) \subset \mathbb{R}^2$
2. každá hrana je krivka medzi dvomi vrcholmi

3. rôzne hrany majú rôzne množiny koncových bodov
4. pre každý bod každej hrany okrem jej koncových bodov platí, že nepatrí inej hrane
5. pre každý bod každej hrany okrem jej koncových bodov platí, že nie je vrcholom

# Kapitola 2

## Známe výsledky

Za základ práce sme si vzali článok [6] Bojana Mohara. Uvádza v ňom zaujímavé výsledky o farbení hrán grafov, ktoré sa pokúsime zhrnúť v tejto kapitole.

**Veta 2.1.** *Nech  $\Delta$  je maximálny stupeň grafu  $G$ . Ak  $k \geq \chi'(G) + 2$  potom  $F(G, k)$  je súvislý.*

Dôkaz je uvedený v [6].

Mohar vyslovil aj hypotézu, ktorá sa viaže na Vetu 2.1.

**Hypotéza 2.2.** *Ak  $G$  je graf s  $\Delta(G) \leq 3$ , potom  $F(G, 4)$  je súvislý.*

Moharovi sa v článku teda nepodarilo tvrdenie dokázať, nebudeme sa o to pokúšať ani my, overíme však v práci niekoľko grafov s úmyslom nájsť protipríklad k danej hypotéze.

Ďalšie tvrdenie, ktoré Mohar vyslovil a dokázal je nasledovné.

**Veta 2.3.** *Nech  $\Delta$  je maximálny stupeň bipartitného grafu  $G$ . Ak  $k \geq \Delta + 1$   $F(G, k)$  je súvislý.*

Dôkaz je opäť uvedený v [6].

Ďalej sa pýta, pre ktoré kubické bipartitné grafy  $G$  je graf farbení  $F(G, 3)$  súvislý. Uvádza riešenie pre špeciálny prípad, ktoré dokázal Fisk v [5]. Týmto riešením je tvrdenie: 3-súvislé kubické planárne bipartitné grafy majú súvislý graf farbení  $F(G, 3)$ .

Mohar vyslovil predpoklad, že planarita grafu je v tomto prípade dôležitá, pretože graf farbení  $F(K_{3,3}, 3)$  grafu  $K_{3,3}$  nie je súvislý, ale má dva komponenty.

Uvedené tvrdenia a predpoklady nás viedli k presvedčeniu, že skúmanie grafov farbení kubických grafov pre farbenie 3 a 4 farbami môže viesť k odpoveďiam na dané otázky a pomôcť k zaplneniu medzier v teórii.

# Kapitola 3

## Analýza

### 3.1 Úvod

Ďalšou časťou práce je analýza niektorej triedy grafov. Vybrali sme si kubické grafy, ktoré budeme farbiť 3 a 4 farbami. Pre každý bude treba vygenerovať graf farbení a ten následne otestovať na nami vybrané parametre. Zo zistených výsledkov pre dostatočný počet grafov vyslovíme hypotézy o grafoch farbení tejto triedy grafov.

### 3.2 Programovací jazyk a použitý software

Určite je potrebné naprogramovať niekoľko nástrojov, pomocou ktorých môžeme triedu grafov farbení generovať a analyzovať. Na tento účel sme si vybrali jazyk C. Jeho jednoznačnými výhodami oproti iným jazykom sú rýchlosť a prenositeľnosť. Totiž na všetkých počítačoch, ktoré sme mohli používať bol k dispozícii kompilátor C. Navyše aj ďalšie programy, z ktorých sme používali knižnice alebo výstupy, boli napísané v jazyku C, takže práca s nimi bola o to jednoduchšia.

Krátky výpis programov, ktoré sme používali pri práci s grafovými štruktúrami (v zátvorke je autor alebo vlastník programu):

- Genreg (Dr. Markus Meringer, 2004)
- yEd (yWorks, 2000-2009)
- Simplified  $O(n)$  Planarity by Edge Addition. (John M. Boyer 2005) [1]

Všetky programy výborne plnili svoju úlohu a môžeme ich vrelo odporučiť. Použitie programov bude podrobnejšie vysvetlené vždy v príslušnej sekcii.

### 3.3 Generovanie grafov

Cieľom tejto fázy je vygenerovať niekoľko navzájom neizomorfných grafov, na ktorých budeme testovať atribúty. Pre tento účel je použitý hotový program `genreg`<sup>1</sup>, autorom je Dr. Markus Meringer. Tento pre zadané  $k, n$  generuje  $k$ -regulárne grafy na  $n$  vrchoch. Výborne sa hodil pre účely tejto bakalárskej práce vzhľadom k tomu, že je veľmi rýchly a jeho výstup vieme priamo používať ako vstup pre ďalší program. Navyše je naprogramovaný v programovacom jazyku C, takisto ako ďalšie programy, ktoré vznikali pre účely bakalárskej práce.

Vstup:  $n, k$ , kde  $n$  je počet vrcholov grafu a  $k$  je stupeň každého vrchola grafu

Výstup: Všetky  $k$ -regulárne  $n$ -vrcholové grafy zapísané ako zoznam susedných vrcholov.

### 3.4 Generovanie grafov farbení

Pre každý vygenerovaný graf  $G$  je potrebné nájsť jeho graf farbení. Na to je potrebné vykonať niekoľko krokov.

1. Transformácia zoznamu susedných vrcholov pre každý vrchol na zoznam susedných hrán pre každú hranu.
2. Nájdenie všetkých regulárnych farbení grafu  $G$ .
3. Nájdenie tých dvojíc farbení, pre ktoré existuje K-prepnutie.

Vstup: 3-regulárne  $n$ -vrcholové grafy

Výstup: Graf farbení pre každý vstupný graf zapísaný ako zoznam susedných vrcholov pre každý vrchol.

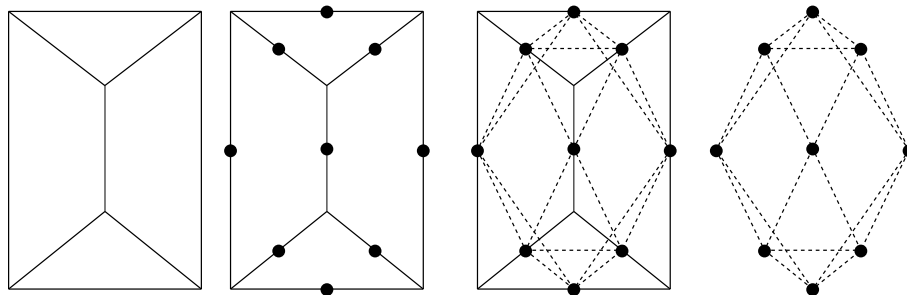
#### 3.4.1 Zmena reprezentácie grafu

Pre farbenie hrán je veľmi vhodné, aby sme mali k dispozícii graf reprezentovaný ako zoznam susedných hrán pre každú hranu. Toto riešenie vedie k lepšej výpočtovej zložitosti, ako keby sme mali k dispozícii pôvodnú reprezentáciu grafu.

Inými slovami potrebujeme pre daný graf  $G$  vygenerovať line-graph  $H = L(G)$ . Tzn.  $V(H) = E(G)$  a  $\{e_i, e_j\} \in E(H)$  práve vtedy, keď  $e_i$  a  $e_j$  sú incidentné v  $G$ . Príklad takejto transformácie vidíme na obrázku 3.1.

---

<sup>1</sup>Program `genreg` je možné zadarmo stiahnuť z internetovej stránky autora: <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/markus/reggraphs.html>.



Obr. 3.1: Konverzia grafu do line-grafu

Pre každú dvojicu vrcholov algoritmus zisťuje, či tvoria hranu a ak áno, priradí hrane susedné hrany. Pomocný algoritmus, ktorý pre zadané dva vrcholy vráti číslo hrany (toto buď nájde v poli, alebo pridá do poľa ak sa s hranou ešte nepracovalo) potrebuje  $O(|E|)$  krokov. Na ľubovoľnú hranu sa pýta maximálne 4-krát, teda celkovo treba  $O(|V|^2 + |E|^2)$  krokov.

Grafy, pre ktoré riešime tento problém, sú malé, majú maximálne 20 vrcholov a 30 hrán, preto nebola snaha algoritmus optimalizovať.

### 3.4.2 Reguárne farbenia

Nájdenie všetkých regulárnych farbení. Na to je použitý algoritmus back-track.

Funkcia *skontroluj* zistí, či aktuálne zadávaná farba vyhovuje doterajšiemu zafarbeniu grafu. Pracuje v konštantnej časovej zložitosti.

Funkcia *g2n* zmení reprezentáciu grafu v poli na prirodzené prirodzené číslo od 0 do  $k^n - 1$ , kde  $k$  je počet farieb a  $n$  počet vrcholov. Nech vrcholy sú označené  $v_0, \dots, v_{n-1}$  a  $c(v)$  je farba vrchola  $v$ . Potom číslo farbenia je  $C(c) = c(v_0) \cdot k^0 + \dots + c(v_{n-1}) \cdot k^{n-1}$ .

```
int koniec = 0;
```

```
while (!koniec) {
```

```
    //MAXFARABA obsahuje maximalny pocet farieb
    //t.j. bud cislo 3 alebo 4
```

```
    //POCET_HRAN je pocet hran povodneho grafu
    //count sluzi na ratanie farbeni
```

```
    while (!skontroluj(i) && farba[i] < MAXFARABA)
        farba[i]++;
```



```

if (farba[i] >= MAXFARBA) {
    farba[i] = 0;
    i--;
    farba[i]++;
}
else i++;

if (i == PO CET_HRAN) {
    farbenie[count] = g2n(farba);
    count++;
    i--;
    farba[i]++;
}

if (i == -1) {
    koniec = 1;
}
}

```

### 3.4.3 Kempe prepínanie

Úlohou je nájsť také dvojice farbení  $a, b$ , že sa dá z  $a$  do  $b$  dostať jedným K-prepnutím. K-prepnutie je jednoznačne určené hranou a farbou, na ktorú sa má hrana „prepnúť“.

Funkcia *kempe\_switching* teda pre každú trojicu (farbenie, hrana, nová farba) skúša K-prepnúť. O toto prepnutie sa postará funkcia *kempe\_switch*, ktorá pre dané prepnutie a pôvodnú farbu vráti novú farbu.

Ďalšie pomocné funkcie *n2e*, *n2farba*: prvá z číselného vyjadrenia farbenia a čísla hrany vráti farbu hrany v danom farbení a druhá naplní pole farba takými farbami, ktoré sú zakódované v danom prirodzenom čísle.

```

long long kempe_switch(long in, int hrana, int nova_farba)
{
    short int stara_farba = n2e(in, hrana);
    int i;

    for (i = 0; i < PO CET_HRAN; i++)
        zmenena[i] = 0;
}

```

```

        n2farba(in);
        zmenena[hrana]=1;
        vymen(hrana, stara_farba, nova_farba);

        return g2n(farba);
    }

short int zmenena[MAX_POCET_HRAN];

void vymen(short int hrana, short int sf, short int nf) {
    if (farba[hrana]==sf)
        farba[hrana]=nf;

    else if (farba[hrana]==nf)
        farba[hrana]=sf;

    int i;
    for (i=0; i<4; i++) {
        if ( ((farba[hrany[i][hrana]]==sf) ||
            (farba[hrany[i][hrana]]==nf)) &&
            (zmenena[hrany[i][hrana]]==0) )
        {
            zmenena[hrany[i][hrana]]=1;
            vymen(hrany[i][hrana], sf, nf);
        }
    }
}

```

### 3.5 Analyzovanie grafov

Pôvodné grafy aj grafy farbení boli testované na niekoľko atribútov:

1. Počet vrcholov grafu
2. Polomer a priemer grafu
3. Bipartitnosť
4. Stupne vrcholov grafu
5. Stupeň vrcholovej súvislosti grafu

6. Stupeň hranovej súvislosti grafu
7. Počet komponentov grafu
8. Počet trojuholníkov v grafe
9. Planárnosť grafu

### 3.5.1 Počet vrcholov grafu farbení

Algoritmus má konštantnú výpočtovú zložitosť. Počet vrcholov je priamo zapísaný vo formáte, ktorý som použil na zápis grafov farbení.

### 3.5.2 Polomer a priemer grafu

Použili sme Floyd-Warshallov algoritmus na hľadanie najkratšej cesty medzi každou dvojicou vrcholov.

Časová zložitosť algoritmu je  $O(|V|^3)$ .

```

int floyd_warshall () {
    int cesta [N] [N];
    int i , j , k;
    int e [N];

    for (i=0; i<N; i++) {
        for (j=0; j<N; j++) {
            if (i==j) cesta [i] [j]=0;
            else if (gf_get (i , j)==1) cesta [i] [j]=1;
            else cesta [i] [j]=12*N;
        }
    }

    for (k=0; k<N; k++)
        for (i=0; i<N; i++)
            for (j=0; j<N; j++)
                if (cesta [i] [j] > cesta [i] [k]+cesta [k] [j])
                    cesta [i] [j]=cesta [i] [k]+cesta [k] [j];

    for (i=0; i<N; i++) {
        e [i]=0;
        for (j=0; j<N; j++)

```

```

        if (cesta[i][j]>e[i]) e[i]=cesta[i][j];
    }

    int priemer=0, polomer=12*N;
    for (i=0; i<N; i++) {
        if (e[i]>priemer) priemer=e[i];
        if (e[i]<polomer) polomer=e[i];
    }

    fprintf(g, "%d;%d;", polomer, priemer);

    return 0;
}

```

### 3.5.3 Bipartitnosť

Použitý je algoritmus prehľadávania do šírky. Vrcholy sa označujú greedy (pažravo) dvomi farbami a ak niektorý vrchol nemožno označiť (pretože susedí s vrcholmi oboch farieb), graf nie je bipartitný. Backtrack nemá v tomto prípade význam, pretože jediná zmena, ktorú by mohol vykonať pri návrate, je farba prvého vrchola, čo ale neovplyvní celkový výsledok.

Výpočtová zložitosť prehľadávania do šírky a teda daného algoritmu je  $O(|V| + |E|)$ .

### 3.5.4 Stupne vrcholov grafu farbení

Algoritmus má lineárnu výpočtovú zložitosť v závislosti od počtu hrán grafu farbení. Je triviálny, stačí zrátať incidentné hrany.

O teoretických výsledkoch hovoria Vety 4.1 a 4.5.

### 3.5.5 Stupeň vrcholovej súvislosti

Na rátanie stupňa vrcholovej súvislosti pôvodného grafu a grafu farbení bol použitý Dinic algoritmus - verzia vyvinutá S. Evenom a J. Hopcroftom [4]. Algoritmus hľadá maximálny tok na sieti.

Nech v orientovanom grafe  $G$  je každej hrane  $e$  priradená kapacita  $c(e) \geq 0$ . Jeden z vrcholov je zdroj (označený  $s$ ) a jeden je ústie (označený  $t$ ). Úlohou je nájsť funkciu maximálneho toku, to znamená nájsť funkciu  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  takú, že  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  a celkový tok, ktorý vstupuje do vrchola rôzneho od  $s$  a  $t$  a celkový tok, ktorý z neho vychádza sa musia rovnať. Zo všetkých takých tokov chceme ten, pre ktorý je celkový tok, ktorý vychádza z  $s$ , maximálny.

Beží v nanajvyšš  $|V| - 1$  fázach. Začínáme s nulovým tokom, teda  $\forall e \in E: f(e) = 0$ . V kažej fáze behu algoritmu sa celkový tok zvýši. Ďalšie fázy sú aplikované až kým zvýšenie nie je možné. V tom momente je dôkaz maximality toku rovnaký ako pri Ford-Fulkerson algoritme.

Predpokladajme, že máme tok  $f(e)$ . Hrana je použiteľná v prednom smere, ak  $f(e) < c(e)$  a v zadnom smere ak  $f(e) > 0$ .

Každá fáza začne prehľadávaním grafu do šírky z vrchola  $s$ . Vrcholy začneme označovať od  $s$ , teda  $\lambda(s) = 0$ . Ďalej označíme  $\lambda(v) = 1$  všetky vrcholy  $v$  dosiahnuteľné z  $s$  jednou hranou použiteľnou v smere z  $s$  do daného vrchola. Táto akcia sa nazýva skenovanie (z angl. scanning). Keď sa naskenuje vrchol  $v$ , všetky neoznačené vrcholy dosiahnuteľné z  $v$  sa označia  $\lambda(v) + 1$ . Keď sa označí  $t$  počas skenovania vrchola  $w$ , pokračujeme so skenovaním všetkých označených nenaskenovaných vrcholov  $v$ , pre ktoré  $\lambda(v) = \lambda(w)$ . Prehľadávanie prerušíme v momente, keď dosiahneme vrchol  $v$  čakajúci na naskenovanie, pre ktorý platí  $\lambda(v) > \lambda(w)$ .

Pripravíme si kópiu všetkých vrcholov a hrán, ktoré sme prehľadali. Pre každý vrchol  $v$  budeme mať zoznam hrán, ktoré sú z neho použiteľné do vrchola, ktorý je označený  $\lambda(v)+1$ . Celkový počet krokov, ktoré na toto treba, je  $O(|E|)$ , ak dátová štruktúra grafu je daná ako zoznam incidentných hrán pre každý vrchol. Novopripravenú štruktúru nazvime *pomocný graf*. Všetky cesty z  $s$  do  $t$  v pomocnom grafe majú dĺžku  $\lambda(t)$  hrán.

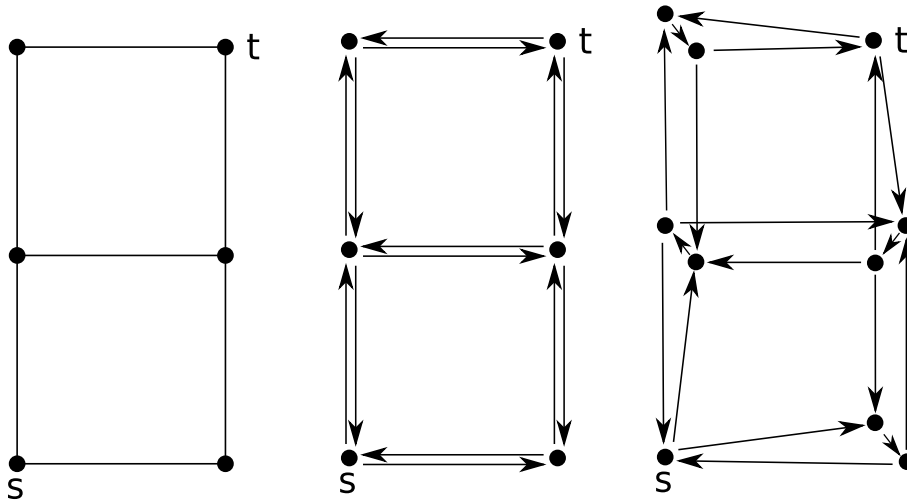
Teraz použijeme pomocný graf na hľadanie zlepšujúcich ciest z  $s$  do  $t$ . Tieto nájdeme pomocou prehľadávania do hĺbky. Začneme z vrchola  $s$ , prechádzame cez použiteľnú hranu do vrchola označeného 1, odtiaľ do vrchola označeného 2 atď. Ak dosiahneme  $t$ , máme zlepšujúcu cestu a pošleme ňou maximálny možný tok. Všetky hrany, ktoré prestali byť použiteľné (v danom smere), vymažeme z pomocného grafu. Zjavne taká hra existuje aspoň jedna. Ak prehľadávanie do hĺbky skončí v slepej uličke, teda nájde vrchol  $v$ , z ktorého neexistuje použiteľná cesta do vrchola označeného  $\lambda(v) + 1$ , tak sa vrátíme na vrchol, z ktorého sme sa dostali do  $v$  a poslednú hranu vymažeme z potenciálnej zlepšujúcej cesty aj z pomocného grafu a pokračujeme v prehľadávaní. Ak nevieme pokračovať z  $s$ , fáza je skončená.

Pri testovaní stupňa súvislosti je vhodné použiť model, v ktorom  $\forall e \in E: c(e) = 1$ . Popísaný algoritmus nikdy nezavedie neceločíselný tok. Takže bude platiť  $\forall e \in E: f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ .

To znamená, že vždy, keď nájdeme zlepšujúcu cestu, tak prírastok do celkového toku bude práve 1 a každá hrana v pomocnom grafe, ktorú sme použili, už nebude použiteľná, takže ju možno hneď odstrániť. Taktiež vždy, keď sa vrátíme o niektorú hranu (lebo z vrchola nevedie použiteľná hrana), tak vymažeme danú hranu.

Tento algoritmus aplikujeme na hľadanie stupňa vrcholovej súvislosti.

Pre neorientovaný graf  $G(V, E)$  skonštruujeme orientovaný graf  $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$  tak, že  $V = \overline{V}$  a  $\overline{E}$  je množina orientovaných hrán. Pre každú hranu  $e \in E$  budú v  $\overline{E}$  hrany  $e', e''$ , pričom tieto budú spájať tie isté dva vrcholy ako hrana  $e$  orientovane v opačných smeroch. Každý vrchol rôzny od  $s, t$  bude mať kapacitu 1. Túto pretransformujeme na kapacitu hrany tak, že pre každý vrchol  $v \in V$  budú v novom grafe dva vrcholy  $v', v''$ . Hrany, ktoré boli pôvodne incidentné s  $v$  rozdelíme na tie, ktoré do vrchola vchádzajú a v novom grafe budú vchádzať do  $v'$  a na tie, ktoré z vrchola  $v$  vychádzajú a v novom grafe budú vychádzať z  $v''$ . Nakoniec pridáme jednu hranu, z  $v'$  do  $v''$  s kapacitou rovnou 1. Príklad tejto zmeny pre graf  $K_{3,3}$  je možné vidieť na obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Transformácia grafu  $K_{3,3}$  na orientovaný graf pre účely testovania stupňa vrcholovej súvislosti.

Maximálny tok v takomto grafe je rovný minimálnemu počtu vrcholov, ktoré treba odstrániť na to, aby  $s$  a  $t$  boli v rôznych komponentoch. To znamená, že stačí pre všetky dvojice  $s$  a  $t$  spustiť popísaný algoritmus a minimum z vrátených hodnôt je stupeň vrcholovej súvislosti.

Algoritmus na hľadanie stupňa vrcholovej súvislosti podľa [4] vykoná  $O(|V|^{\frac{5}{2}}|E|)$  krokov.

### 3.5.6 Stupeň hranovej súvislosti grafu

Pri testovaní stupňa hranovej súvislosti postupujeme podobne ako pri vrcholovej súvislosti. Netreba však aplikovať transformáciu popísanú na konci prechádzajúcej časti. Navyše si stačí vybrať jeden vrchol  $v$  a skúšať len dvojice  $v, w$  pre všetky  $w \in G$ . Vyplýva to z toho, že ak existuje množina hrán,

ktorá rozdelí súvislý graf na viac komponentov, a vrchol  $v$  patrí do jedného z týchto komponentov, musí existovať vrchol z množiny  $V(G) - v$ , ktorý patrí do iného komponentu.

Algoritmus na hľadanie stupňa hranovej súvislosti podľa [4] vykoná  $O(|V| \cdot |E| \min\{|V|^{\frac{3}{2}}, |E|^{\frac{1}{2}}\})$  krokov.

### 3.5.7 Počet komponentov grafu

Na testovanie počtu komponentov grafu farbení bol použitý algoritmus, ktorý postupne z izolovaných vrcholov tvorí také stromy, že ak existuje cesta medzi dvomi vrcholmi v pôvodnom grafe, tak sa dané dva vrcholy budú nachádzať v jednom strome. Nakoniec stačí sčítať počet stromov.

Nech testujeme  $n$ -vrcholový graf. Množinu stromov budeme reprezentovať tak, že pre každý vrchol si budeme pamätať jeho rodiča. Ak je rodičom vrchola samotný vrchol, tak je vrchol koreňom stromu. Na začiatku teda bude teda rodičom každého vrchola ten istý vrchol.

Pre každú hranu  $\{v, w\}$  spojíme strom, v ktorom sa nachádza vrchol  $v$  so stromom, v ktorom sa nachádza  $w$  tak, že koreňu jedného zo stromov nastavíme ako rodiča koreň druhého stromu. (Ak sa oba vrcholy nachádzajú v jednom strome, tak sa nič nezmení, pretože koreňovému vrcholu  $k$  sa nastaví ako rodič opäť  $k$ , takže je stále koreňom.)

**Definícia 25.** ([3]) Nech  $F(0) = 1$  a nech  $F(i + 1) = 2^{F(i)}$  pre  $i \geq 0$ . Potom  $\log^*(n) = \min\{k | F(k) \geq n\}$ .

Časová zložitosť je  $O(n \log^*(n))$  podľa [3].

### 3.5.8 Počet trojuholníkov v grafe

Algoritmus pre každú dvojicu (hrana, vrchol) testuje, či hrana spolu s vrcholom tvoria trojuholník. Zložitosť je  $O(|E| \cdot |V|)$

O počte trojuholníkov v grafe farbení 3 farbami hovorí Veta 4.11.

### 3.5.9 Planárnosť grafu

Na zisťovanie informácie, či graf je alebo nie je planárny sme použili hotový program [1] od John M. Boyera.

### 3.6 Výsledky

V samotnej realizácii sme najprv vygenerovali všetky kubické grafy s počtom vrcholov menším alebo rovným 20. Ku všetkým sme vygenerovali grafy farbení pre 3 farby. Na oboch triedach grafov sme previedli všetky dostupné testy, teda testy na: polomer, priemer, bipartitnosť, stupeň hranovej, vrcholovej súvislosti, počet komponentov, počet trojuholníkov, planárnosť.

Ďalej sme s použitím Vety 4.11 zistili počet komponentov grafov farbení  $F(G, 4)$  pre kubické grafy  $G$  so 14 a menej vrcholmi. Na tejto vzorke sme nenašli kontrapríklad k Moharovej hypotéze 2.2.

V nasledujúcej prehľadnej tabuľke uvádzame, pre ktoré triedy grafov sme dosiahli výsledky:

$ V(G) $	počet grafov $G$	$G, F(G, 3)$ polomer, priemer, bipartitnosť, stupeň hranovej, vrcholovej súvislosti, počet komponentov, trojuholníkov, planárnosť	$F(G, 4)$ počet komponentov
4	1	✓	✓
6	2	✓	✓
8	5	✓	✓
10	19	✓	✓
12	85	✓	✓
14	509	✓	✓
16	4060	✓	
18	41301	✓	
20	510489	✓	



# Kapitola 4

## Teoretické výsledky

### 4.1 Kubické grafy

Najprv vyslovíme Vetu, ktorá hovorí o stupňoch vrcholov v grafe farbení. Toto obmedzenie stupňa sme si uvedomili už pri vytváraní programu, takže poskytlo isté vylepšenie pamäťovej náročnosti.

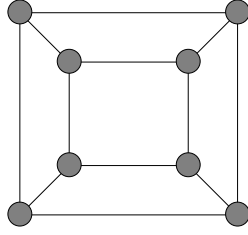
**Veta 4.1.** *Majme graf  $G$ . Pre ľubovoľný vrchol  $w$  v grafe farbení  $F(G, k)$  platí:  $\deg_{F(G,k)}(w) \leq |E(G)| \cdot (k - 1)$ . Pre kubický graf  $G$  a vrchol  $w$  v grafe farbení  $F(G, 3)$  platí  $\deg_{F(G,3)}(w) \leq \frac{|E(G)| \cdot 2}{3} = V(G)$ .*

*Dôkaz.* Každé  $K$ -prepnutie sa dá určiť hranou a novou farbou, ktorú má nadobúdať hrana v novom farbení. Hrán v grafe je  $|E(G)|$  a nových farieb (bez tej, ktorú má hrana práve teraz) je  $k - 1$ .

V kubickom grafe s hranovým regulárnym 3-farbením  $c$  pre ľubovoľné dve farby  $a, b$  platí, že každá hrana, ktorá má farbu  $a$  je incidentná s dvomi hranami, ktoré majú farbu  $b$ . Teda pre každú dvojicu (hrana, nová farba) existujú aspoň 2 ďalšie takéto dvojice, ktoré určujú to isté  $K$ -prepnutie. Preto  $\deg_{F(G,3)}(v) \leq \frac{|E(G)| \cdot 2}{3} = V(G)$ .  $\square$

Grafy farbení môžu byť relatívne neprehľadné už pre malý počet farbení, ak sa na ne chceme ručne pozrieť. Preto je užitočné zaujímať sa o to, ako vyzerá podgraf  $F'$  grafu farbení  $F$ , ktorý je tvorený takými vrcholmi, že každá dvojica vrcholov z  $F'$  reprezentuje navzájom neizomorfné farbenia a množina vrcholov  $F'$  je maximálna vzhľadom na inklúziu. Príklad grafu  $G$  a príslušného grafu farbení  $F$  s vyznačenými podgrafmi  $F'$  je možné vidieť na obrázkoch 4.1 a 4.2.

Prakticky pre hranové 3-farbenia a hranové 4-farbenia kubických grafov dostaneme  $F'$  tak, že si vyberieme tri navzájom incidentné hrany v pôvodnom grafe a zvolíme ich farby. Označme si teda hrany  $e_1, e_2, e_3$  a ich farby  $a_1, a_2, a_3$



Obr. 4.1: Graf  $CL_4$  (z anglického cyclic ladder)

v tomto poradí. Hrany  $e_1, e_2, e_3$  budeme v ďalšom texte nazývať *zafixované*. Ďalej budeme uvažovať len tie farbenia  $c$ , pre ktoré  $c(e_i) = a_i$  pre  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Graf farbení, ktorý obsahuje len farbenia  $c$ , je podgrafom daného označme  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  alebo ak farby nebudú dôležité, zostaneme pri označení  $F'$ . (pozn.: Pre hranové 3-farbenia by stačilo uviesť dve farby a tretia by už bola jednoznačne určená, takže by sme si vystačili so zápisom  $F'_{a_1 a_2}$ . Pre zjednotenie zápisu aj s hranovými 4-farbeniami sme sa však rozhodli pre  $F'_{a_1 a_2 a_3}$ .)

V nasledujúcom texte vyslovíme a dokážeme niekoľko tvrdení o novodefinovaných podgrafoch  $F'$  grafu farbení  $F$ . Viackrát budeme potrebovať všetky „prípustné“ postupnosti  $a_1, a_2, a_3$ , najprv si ich teda zdefinujeme.

**Definícia 26.** *Prípustné postupnosti*  $a_1, a_2, a_3$  pre  $F(G, k)$ , kde  $k \in \{3, 4\}$  sú také, že  $a_i \in \{1, \dots, k\}$  a  $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$  pre  $i \in 1, 2, 3$ .

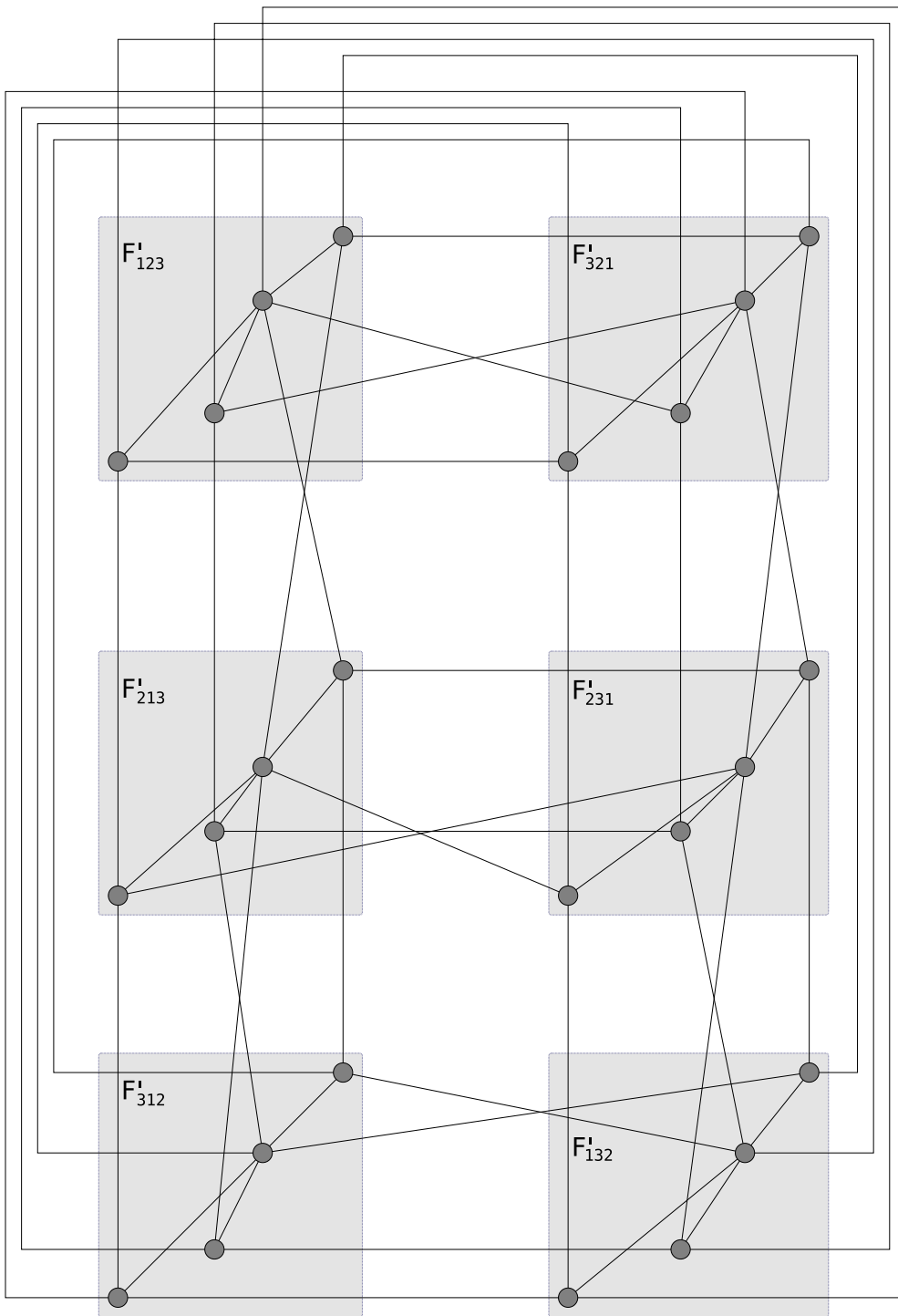
Inými slovami sú to farby  $a_1, a_2, a_3$  zafixovaných hrán  $e_1, e_2, e_3$ .

**Veta 4.2.** *Množiny vrcholov*  $V(F'_{a_1 a_2 a_3})$  *pre všetky prípustné postupnosti*  $a_1, a_2, a_3$  *tvoria rozklad množiny vrcholov grafu farbení*  $V(F)$ .

*Dôkaz.* Dokážeme, že každé farbenie sa nachádza práve v jednej z množín vrcholov  $V(F'_{a_1 a_2 a_3})$ . Toto vyplýva priamo z konštrukcie  $F'$ . Stačí sa pozrieť na zafixované hrany  $e_1, e_2, e_3$ . Ich farby v danom poradí priamo určujú podmnožinu  $V(F'_{a_1 a_2 a_3})$ .  $\square$

Množinu farbení grafu (vrcholov grafu farbení) môžeme rozložiť na triedy ekvivalencií podľa relácie, ktorú si definujeme nasledovne. Dva vrcholy grafu farbenia sú v relácii práve vtedy, ak farbenia, ktoré reprezentujú, sú navzájom izomorfné. Ak v  $F'$  je  $n$  vrcholov, potom je týchto tried  $n$  a môžeme ich označiť  $A_1, \dots, A_n$ .

Každý vrchol grafu farbení teda môžeme jednoznačne určiť príslušnosťou k niektorému podgrafu  $F'$  a k niektorej triede  $A_i$ .  $V(F'_{a_1 a_2 a_3}) \cap A_i$  je teda množina obsahujúca jeden vrchol, ktorý si môžeme označiť  $v_{a_1 a_2 a_3 - i}$ .



Obr. 4.2: Graf farbení  $F(CL_4, 3)$  s vyznačenými podgrafmi  $F'$

**Veta 4.3.** Grafy  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  pre všetky prístupné postupnosti  $a_1, a_2, a_3$  sú izomorfné.

*Dôkaz.* Zjavne ak do  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  patrí vrchol  $v_{a_1 a_2 a_3 - i}$ , potom existuje vrchol  $v_{b_1 b_2 b_3 - i} \in F'_{b_1 b_2 b_3}$ . Ďalej ak sú vrcholy  $v_{a_1 a_2 a_3 - i}$  a  $v_{a_1 a_2 a_3 - j}$  spojené hranou v  $F'_{a_1 a_2 a_3}$ , potom aj  $v_{b_1 b_2 b_3 - i}$  a  $v_{b_1 b_2 b_3 - j}$  sú spojené hranou v  $F'_{b_1 b_2 b_3}$ .  $\square$

**Veta 4.4.** Počet vrcholov  $|V(F(G, k))|$  je násobok  $k!$ .

*Dôkaz.* Pre  $k$  farieb existuje  $k!$  permutácií farieb, to znamená  $k!$  vrcholovo disjunktných podgrafov  $F'$  grafu farbení  $F$ . Z Vety 4.3 vyplýva, že počet vrcholov v každom podgrafe  $F'$  je rovnaký, nech je  $n$ , potom  $|V(F(G, k))| = n \cdot k!$ .  $\square$

Vďaka rozkladu množiny farbení (alebo vrcholov grafu farbení) môžeme zlepšiť odhad stupňa vrchola grafu farbení z Vety 4.1.

**Veta 4.5.** Majme kubický graf  $G$ . Pre  $k \in \{3, 4\}$  nech existuje  $n$  rôznych hranových  $k$ -farbení grafu  $G$  (t.j.  $|V(F(G, k))| = n$ ), potom pre všetky vrcholy v grafu farbení  $F(G, k)$  platí:

$$\binom{k}{2} \leq \deg_{F(G, k)}(v) \leq \frac{n}{k!} - 1 + \binom{k}{2}$$

*Dôkaz.* Vezmime si jeden podgraf  $F'_{123}$  (nezáleží na tom, ktorý). V tomto podgrafe je  $\frac{n}{k!}$  vrcholov. Čiže každý môže mať stupeň nanajvyš  $\frac{n}{k!} - 1$ . V grafe  $F$  majú vrcholy  $V(F'_{123})$  navyše ešte tie hrany, ktoré sú incidentné s vrcholmi z iných podgrafov  $F'_{a_1 a_2 a_3}$ ,  $a_1 \neq 1$  alebo  $a_2 \neq 2$  alebo  $a_3 \neq 3$ . Počet týchto hrán vieme určiť presne. Takáto hrana existuje práve vtedy, keď pre niektoré dva vrcholy existuje K-prepnutie, ktoré zmení farbu reprezentovaných vrcholom z  $F'_{123}$  na farbu reprezentovanú vrcholom z iného podgrafu  $F'$ .

Pozrime sa na zafixované hrany. Do iného  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  sa dostaneme tak, že zmeníme farby týchto hrán. To môžeme urobiť K-prepnutím, ktoré vymení farby dvoch z troch zafixovaných hrán, alebo takým, ktoré vymení farbu niektorej zafixovanej hrany za štvrtú farbu, ktorá nie je v množine  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Teda v prípade 3-farbenia ide o výber dvojice z troch farieb a v prípade 4-farbenia o výber dvojice zo štyroch farieb. Preto je takýchto K-prepnutí  $\binom{k}{2}$ .

Spolu je teda maximálny stupeň  $\frac{n}{k!} - 1 + \binom{k}{2}$  a minimálny stupeň (v prípade, že by v podgrafe  $F'_{123}$  mal vrchol stupeň 0) je  $\binom{k}{2}$ .  $\square$

**Poznámka 4.6.** Pozrime sa, ako vyzerá nerovnica  $\binom{k}{2} \leq \deg(v) \leq \frac{n}{k!} - 1 + \binom{k}{2}$  z Vety 4.5 pre kubické grafy, ktoré nie sú zafarbitelné 3 farbami pre  $k = 3$ . Počet vrcholov grafu farbení  $|V(F(G, k))| = n = 0$  a teda po dosadení  $k = 3$  a  $n = 0$  dostávame nerovnosť  $3 \leq \deg(v) \leq 2$ . Zjavne žiadny vrchol nevyhovuje takejto nerovnici. Treba si však uvedomiť, že Veta platí pre všetky vrcholy grafu farbení, ktorý je v tomto prípade prázdny.

Takýto odhad je úplne tesný ak sa v podgrafe  $F'$  nachádza vrchol spojený so všetkými ostatnými vrcholmi daného podgrafu  $F'$ . (t.j. aj vtedy, ak  $F'$  tvorí len jeden vrchol). Odporovali sme s výsledkov, že čím je pôvodný graf  $G$  väčší, tým je odhad menej dobrý. Pri programovaní algoritmov pracujúcich s grafmi farbení je však odhad napriek tomu užitočný, pretože značne obmedzuje množstvo používanej pamäte, ak grafy farbení reprezentujeme ako zoznamy susedných vrcholov pre každý vrchol a miesto v pamäti chceme alokovať iba raz.

Pozrime sa teraz na to, ako sú navzájom spojené grafy  $F'$ .

**Definícia 27.** Graf  $H$  definujeme nasledovne. Nech grafy  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  pre všetky prístupné postupnosti  $a_1, a_2, a_3$  sú vrcholmi grafu  $H$  a dva vrcholy  $F'_{a_1 a_2 a_3}$  a  $F'_{b_1 b_2 b_3}$  sú v  $H$  spojené hranou práve vtedy, ak existuje hrana  $\{v.w\} \in E(F)$  taká, že  $v \in F'_{a_1 a_2 a_3}$  a  $w \in F'_{b_1 b_2 b_3}$ .

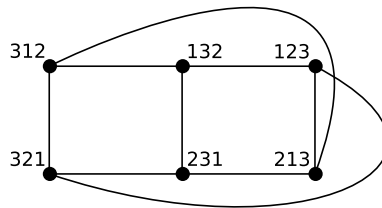
**Veta 4.7.** Graf  $H$  je súvislý.

*Dôkaz.* Vrcholmi grafu  $H$  sú  $F'_{a_1 a_2 a_3}$ , pre všetky prípustné postupnosti  $a_1, a_2, a_3$ .

Z postupnosti  $1, 2, \dots, k$  vieme dostať postupnosť  $2, 1, \dots, k$  tak, že vo všetkých  $K$ -komponentoch grafu farbení pre farby 1 a 2 vykonáme  $K$ -prepnutie.

Teda na to, aby bol  $H$  súvislý, stačí vedieť dostať každú permutáciu z usporiadanej postupnosti  $1, 2, \dots, k$  pomocou postupnosti vzájomných výmien 2 farieb. Toto je triviálne.  $\square$

Graf  $H$  pre 3 farby je  $K_{3,3}$  a je ho možné aj s označenými postupnosťami  $a_1 a_2 a_3$  vidieť na obrázku 4.3. Pre 4 farby tvorí graf, ktorý je zložený zo 4 grafov  $K_{3,3}$  ako to možno vidieť na obrázku 4.4.

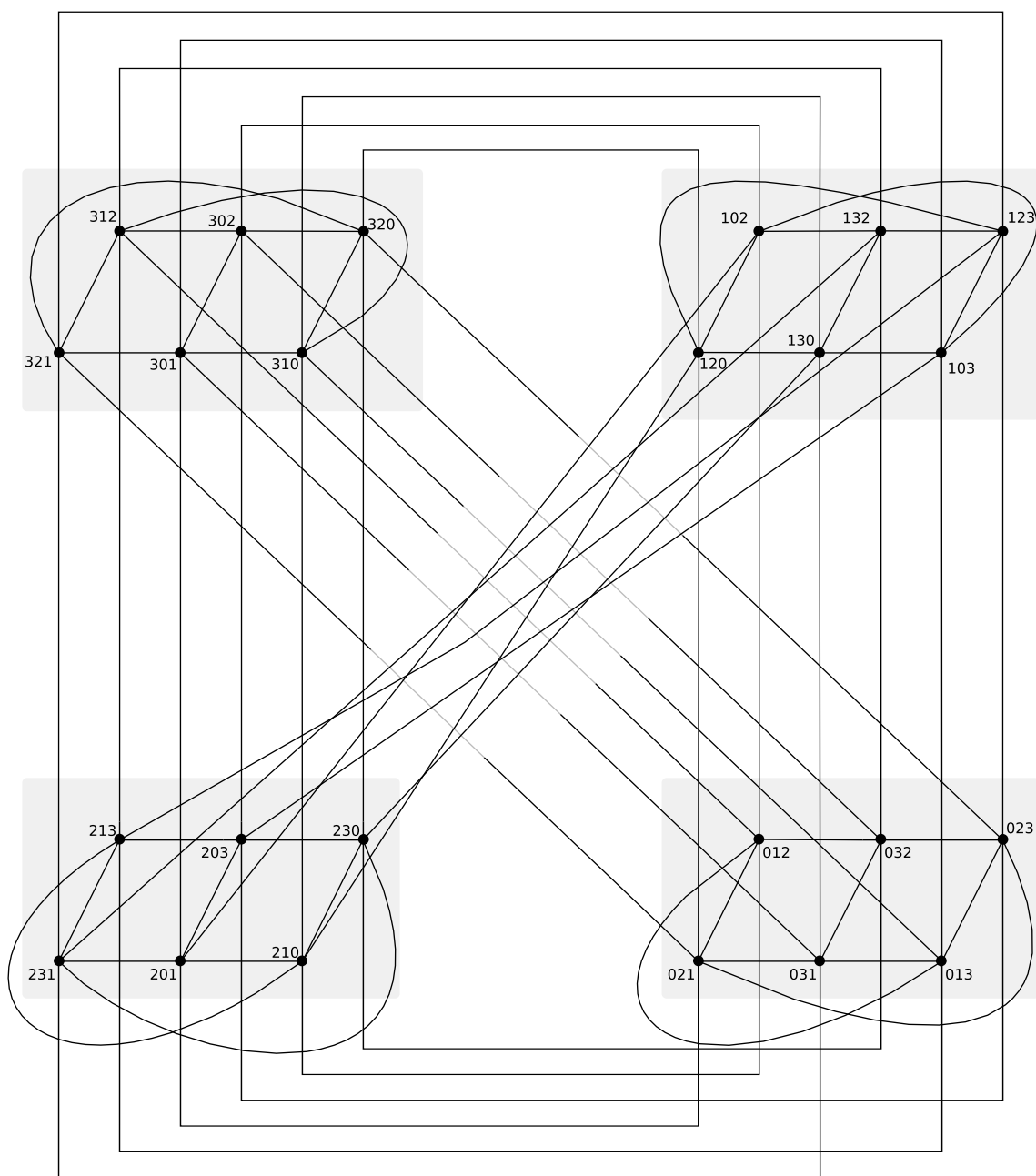


Obr. 4.3: Graf  $H$  pre 3 farby je  $K_{3,3}$

**Veta 4.8.** Ak je graf  $F'$  súvislý, je súvislý aj graf farbení  $F$ .

*Dôkaz.* Dokážeme, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi  $v, w \in F$  existuje cesta. Ak sú oba z rovnakého  $F'$ , existencia cesty vyplýva z predpokladu vety.

Nech sú z rôznych  $F'$ . Podľa Vety 4.7 je  $H$  súvislý. To znamená, že pre ľubovoľné podgrafy  $F'$  existujú vrcholy  $v', w'$  z týchto podgrafov, medzi ktorými vedie cesta. Zo súvislosti podgrafov  $F'$  vyplýva, že existuje cesta medzi  $v$  a  $v'$  a cesta medzi  $w$  a  $w'$ .  $\square$



Obr. 4.4: Graf  $H$  pre 4 farby

Tento výsledok má pre testovanie grafov farbení na súvislosť veľký význam. Totiž ak farbíme kubický graf  $G$  tromi farbami, netreba generovať a testovať celý graf farbení  $F$ , ale stačí jeden podgraf  $F'$ , ktorý má 6-krát menej vrcholov. Pri farbení štyrmi farbami je to dokonca 24-krát menej vrcholov

v grafe  $F'$  oproti grafu  $F$ , o ktorom keď zistíme, že je súvislý, vieme, že je súvislý aj graf farbení  $F$ .

Vyslovíme hypotézu, ktorá je zosilnením Vety 4.8.

**Hypotéza 4.9.** *Počet komponentov  $F'$  je rovný počtu komponentov  $F$ .*

Hypotéza 4.9 je overená pre všetky grafy farbení  $F(G, 3)$ , kde  $G$  je kubický graf s 20 alebo menej vrcholmi.

**Veta 4.10.** *Každý  $K$ -komponent kubického grafu pri farbení 3 farbami je kružnica párnej dĺžky.*

*Dôkaz.* Každý vrchol v kubickom grafe je incidentný s 3 hranami, ktoré musia mať rôzne farby. Takže podgraf  $G(a, b)$ , grafu  $G$  obsahuje všetky vrcholy, ale každý má len stupeň 2 a je incidentný s hranami, ktoré majú farbu  $a$  alebo  $b$ . Každý komponent grafu  $G(a, b)$  (t.j.  $K$ -komponent) je teda súvislý graf, ktorého všetky vrcholy sú stupňa 2, teda je to kružnica. Má párnú dĺžku, inak by sa na nej nemohli striedať farby.  $\square$

Ďalšou zistenou informáciou o grafoch farbení pre 3 farby bolo, že takýto graf nemôže obsahovať trojuholníky. Toto si ľahko dokážeme.

**Veta 4.11.** *Nech  $G$  je kubický graf. Potom počet trojuholníkov v  $F(G, 3)$  je 0.*

*Dôkaz.* Nech pre rôzne hranové 3-farbenia  $c_1$  a  $c_2$  grafu  $G$ , existuje  $K$ -prepnutie, ktoré zmení  $c_1$  na  $c_2$ .

Hrany, ktoré majú v  $c_1$  a  $c_2$  rôzne farby si označíme  $e_1, \dots, e_n$ . (Inými slovami sú to hrany príslušného  $K$ -komponentu). Farby hrán nech sú bez ujmy na všeobecnosti 1 a 2 v oboch farbeniach.

Nech existuje  $c$  také, že existujú  $K$ -prepnutia medzi  $c, c_1, c_2$ . Zjavne  $c$  musí byť rôzne od oboch farbení  $c_1, c_2$ .

Teraz preskúmame, aké môžu byť farby hrán  $e_1, \dots, e_n$  vo farbení  $c$ . Ak sú rovnaké ako vo farbení  $c_1$ , tak jedným  $K$ -prepnutím dostaneme z  $c$  farbenie  $c_2$  iba ak ostatné hrany sú v  $c$  tiež rovnako zafarbené ako v  $c_1$ , čo je spor s predpokladom, že  $c$  je rôzne od  $c_1$ . Z rovnakého dôvodu nemôžu mať hrany  $e_1, \dots, e_n$  v  $c$  rovnakú farbu ako v  $c_2$ .

Z toho teda vyplýva, že aspoň jedna z hrán  $e_1, \dots, e_n$  má farbu 3, nech je to  $e_i$ . Musíme teda využiť  $K$ -prepnutie na to, aby sme farbu hrany  $e_i$  vo farbení  $c$  zmenili na  $c_1(e_i)$  (resp.  $c_2(e_i)$ ).

Hrana  $e_{i-1}$  (teda hrana  $K$ -komponentu, ktorá je incidentná s  $e_i$ ) nemôže mať farbu  $c_1(e_i)$  (teda  $c_1(e_i) \neq c(e_{i-1})$ ), pretože po  $K$ -prepnutí, ktoré má zmeniť  $c$  na  $c_1$  by táto mala farbu 3. Nemôže mať ani farbu  $c_2(e_i)$ , lebo

pri K-prepnutí, ktoré má zmeniť  $c$  na  $c_2$ , by opäť nadobudla farbu 3, teda  $c_2(e_i) \neq c(e_{i-1})$ .

Ostáva už len farba 3, ale farbenie  $c$  má byť regulárne a teda  $c(e_{i-1}) \neq c(e_i)$ .

Také farbenie  $c$  teda neexistuje.  $\square$

Vyslovíme ešte jednu hypozézu, ktorou je možné v budúcnosti sa zaoberať a overená je pre triedu grafov farbení  $F(G, 3)$ , kde  $G$  sú kubické grafy s maximálne 20 vrcholmi.

**Hypotéza 4.12.** *Nech  $G$  je kubický graf. Potom pre graf farbení  $F(G, 3)$  platí, že sa jeho vrchlový a hranový stupeň súvislosti rovnajú  $\kappa(F) = \lambda(F)$ .*

## 4.2 Bipartitné kubické grafy

Mohar sa v [6] pýta, pre ktoré kubické bipartitné grafy  $G$  je graf farbení  $F(G, 3)$  súvislý. Uvádza tiež riešenie pre špeciálny prípad, ktoré dokázal Fisk v [5]. Týmto riešením je tvrdenie: 3-súvislé kubické planárne bipartitné grafy majú súvislý graf farbení  $F(G, 3)$ .

My overíme, že tieto predpoklady (graf má byť 3-súvislý a planárny) nie sú nutnými podmienkami, aby bol graf 3-farbení bipartitného grafu súvislý.

Teda nájdeme také bipartitné grafy, ktoré sú planárne 2-súvislé, neplanárne 2-súvislé a neplanárne 3-súvislé tak, že ich graf farbení  $F(G, 3)$  je súvislý.

V skutočnosti je jednoduché nájsť také grafy pomocou výsledkov analýzy. Stačí ich vyfiltrovať z tabuliek. Pre konkrétne príklady však vždy ponúkneme dôkazy, nech sú tvrdenia zrejmé aj bez kontrolovania správnosti programu.

### 4.2.1 Neplanárne 3-súvislé bipartitné kubické grafy

Existuje nekonečná trieda neplanárnych nesúvislých bipartitných grafov, ktoré majú súvislý graf 3-farbení. Prvé tri grafy z takej triedy možno vidieť na obrázku 4.5. Označme takéto grafy  $P_i$ , kde  $i$  je počet štvorvrcholových blokov.

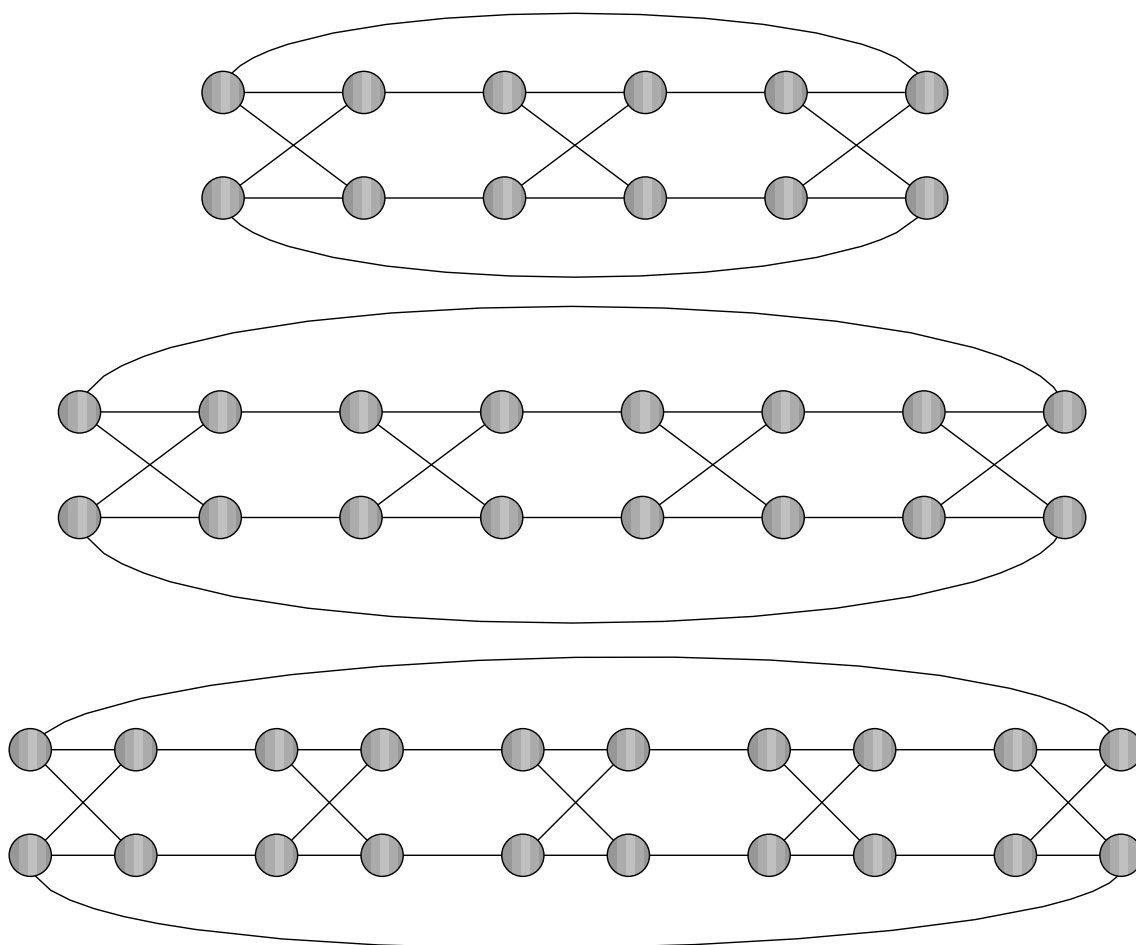
Pre túto triedu dokážeme, že ich grafy 3-farbení sú súvislé.

**Veta 4.13.** *Grafy  $P_i$  pre  $i > 3$  majú súvislý graf 3-farbenia.*

*Dôkaz.* Grafy sa skladajú zo 6-hranových blokov (na obrázkoch sú aj 2 hrany z ďalšieho bloku), aké vidíme na obrázku 4.6. Na tomto obrázku tiež vidíme všetky možné neizomorfné hranové 3-farbenia bloku.

Všimnime si, že hrany, ktoré spájajú bloky, majú buď všetky rovnakú farbu, alebo sú naľavo dve rôzne farby a napravo tie isté dve farby (v rôznom poradí). Z toho priamo vyplýva, že farbenia môžeme rozložiť do dvoch tried.



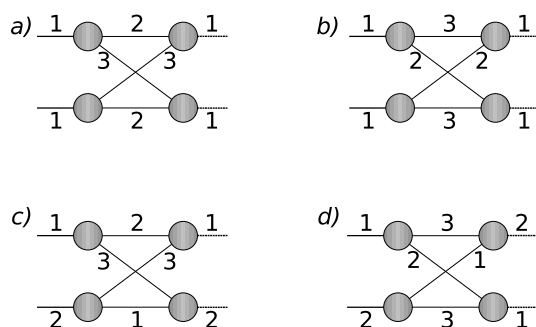


Obr. 4.5: Príklad triedy neplanárnych 3-súvislých bipartitných grafov, ktoré majú súvislý graf 3-farbení

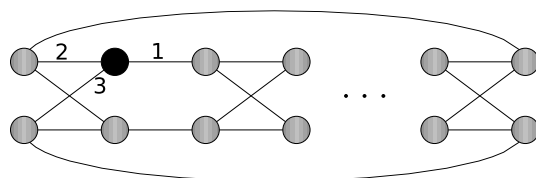
1. všetky spojovacie hrany majú tú istú farbu
2. každé dva susediace bloky spojené hranami dvoch farieb, pričom tieto dve farby sú pre všetky dvojice susediacich blokov rovnaké

V tomto momente využijeme techniku z predchádzajúcej sekcie, kedy sme zafixovali farby okolo jedného vrhola. To znamená, že zafixujeme aj farbu jednej spojovacej hrany. Nech sú farby tak ako na obrázku 4.7 a ďalej budeme pracovať len s farbeniami, ktoré majú tie farby, ktoré sú na danom obrázku. Ak ukážeme, že tieto farbenia sú  $K$ -ekvivalentné, potom podľa Vety 4.8 sú  $K$ -ekvivalentné všetky farbenia.

Najprv ukážeme, že farbenia z prvej triedy sú  $K$ -ekvivalentné. Teda všetky spojovacie hrany majú farbu 1. Dve takéto farbenia sa líšia farbami vo vnútri



Obr. 4.6: Blok - všetky navzájom neizomorfné farbenia



Obr. 4.7: Zafixované farby troch navzájom incidentných hrán

bloku (farbenia  $a$  a  $b$  z obrázku 4.6), pričom tieto sú navzájom nezávislé a možno ich prepínať  $K$ -prepnutiami. Takže takéto farbenia sa dajú popísať ako postupnosť  $i-1$  núl a jednotiek, kde  $i$  je počet blokov. (Núl a jednotiek nie je  $i$ , ale len  $i-1$  pretože jeden blok má zafixované farby.) Každá postupnosť znamená jedno také farbenie, výmena nuly za jednotku znamená jedno  $K$ -prepnutie. Zjavne graf farbení tvorí  $i-1$ -rozmernú kocku pre  $P_i$  a táto je súvislá.

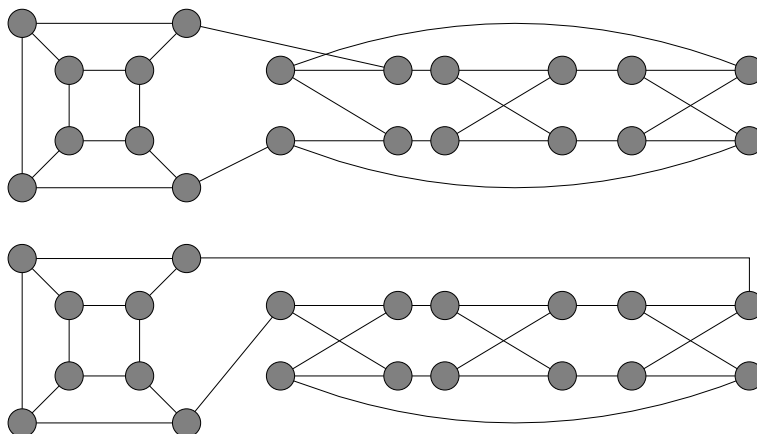
Teraz dokážeme, že pre každé farbenie z druhej triedy existuje  $K$ -prepnutie, ktoré zmení farbenie na niektoré z prvej triedy.

Každé farbenie z druhej triedy je určené dvojicou farieb, informáciou hovoriacou o tom, v ktorých blokoch ostanú farby rovnaké na tých istých líniach, a v ktorých sa farby vymenia (farbenia  $c$  a  $d$  z obrázku 4.6). Tých blokov, v ktorých sa farby vymenia, je zjavne párny počet (aby bol graf spojený). Preto sú v grafe dva vrcholovo disjunktné  $K$ -komponenty  $G(1, 2)$ . Vyberiem si na prepnutie ten, ktorý neobsahuje zafixovaný vrchol. Po jeho prepnutí sa farby v tomto komponente posunú tak, že na všetkých spájajúcich hranách budú rovnaké farby a teda dostaneme farbenie z prvej triedy.  $\square$

#### 4.2.2 Neplanárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy

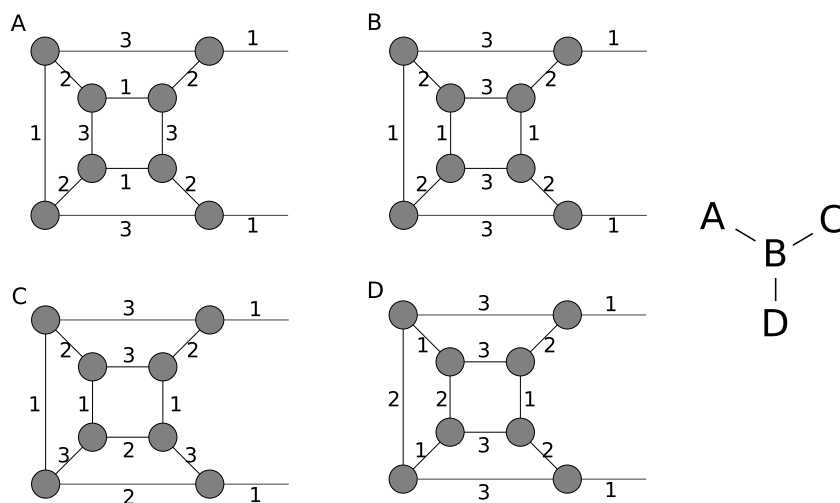
V množine testovaných grafov (kubické s 20 a menej vrcholmi) boli 2 grafy spĺňajúce vlastnosti: neplanárny 2-súvislý bipartitný kubický grafy so súvislým

grafom farbení. Grafy je možné vidieť na obrázku 4.8 Už len objavením týchto grafov sme potvrdili, že 3-súvislosť nie je nutná podmienka. Vieme však povedať viac.



Obr. 4.8: Neplanárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy so súvislým grafom farbení

Dokážeme súvislosť grafu farbení pre tieto grafy. Z obrázkov je vidno, ako grafy vznikli - jedna hrana v  $P_3$  sa odstráni, jedna hrana v kocke sa odstráni a spoja sa vrcholy vzniknutých grafov. Alebo inak sa dá povedať, že jednu hranu v  $P_3$  sme nahradili blokom, o ktorom aj teraz dokážeme, že sa naozaj „správa“ ako hrana.



Obr. 4.9: Všetky neizomorfné farbenia bloku (kocky)

Všetky neizomorfné farbenia bloku (kocky) je možné vidieť na obrázku 4.9.

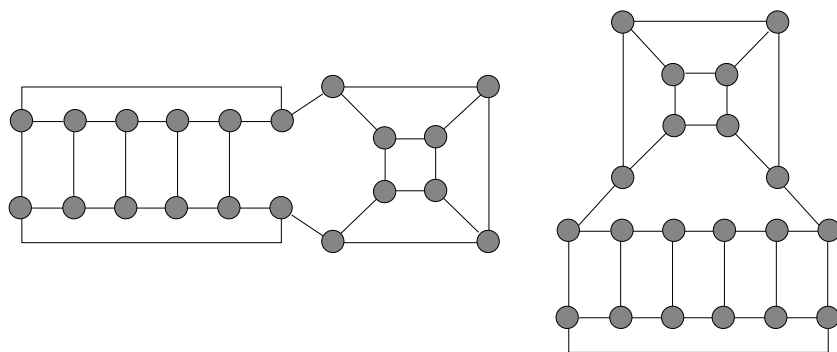
Koncové (spojovacie) hrany majú vždy rovnakú farbu. V každom zo 4 farbení bloku platí, že  $K$ -komponent, ktorý obsahuje jednu koncovú hranu, obsahuje aj druhú koncovú hranu. Čiže navonok sa skutočne môžeme na takýto blok pozeráť ako na hranu. Medzi farbeniami  $A, B, C, D$  je možné prepínať bez toho, aby sme zmenili koncové hrany. (Graf farbení bloku je tiež na obrázku 4.9.) Akékoľvek farbenie viem dostať z pôvodného tak, že natavím farby v grafe  $P_3$  s tým, že na blok (kocku) sa pozerám ako na hranu a nakoniec nastavím farby vo vnútri bloku.

Takto možno zrejme pokračovať ďalej a ľubovoľnú hranu grafu opäť nahradiť „kockovým“ blokom tak, že sa zachovajú všetky vlastnosti. Toto dokonca môžeme aplikovať aj na ľubovoľný iný graf z predchádzajúcej sekcie a dostaneme graf s požadovanými vlastnosťami. Skonstruovali sme teda nekonečne veľa grafov, ktoré sú neplanárne 2-súvislé bipartitné kubické so súvislým grafom farbení.

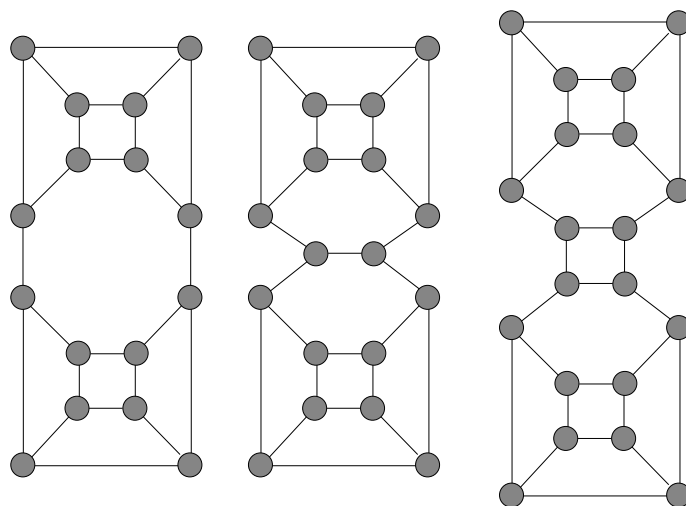
### 4.2.3 Planárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy

Ak existujú planárne bipartitné 3-súvislé grafy a tiež neplanárne bipartitné 2-súvislé grafy, nemohli by existovať aj planárne 2-súvislé bipartitné kubické grafy so súvislým grafom farbení?

Medzi grafmi, ktoré sme analyzovali sa aj také vyskytujú: stačí podobne ako v predchádzajúcej sekcii spojiť dva planárne grafy (v každom odobrať hranu a potom prepojiť vrcholy). Na obrázkoch 4.10 a 4.11 sú všetky takéto grafy s 20 a menej vrcholmi.



Obr. 4.10: Příklady planárných 2-súvislých bipartitných kubických grafov



Obr. 4.11: Ďalšie príklady planárných 2-súvislých bipartitných kubických grafov

# Záver

V práci sme sa venovali hranovým farbeniam kubických grafov. Našou úlohou bolo naprogramovať program na testovanie rôznych parametrov grafu Kempeho farbení. Tento sme vytvorili a vykonali sme experimenty.

V rámci snahy pochopiť štruktúru grafov sme ponúkli spôsob, akým je možné pozrieť sa len na časť vrcholov, pričom celý graf farbení sa skladá z niekoľkých takýchto častí a tieto sú navzájom izomorfné. Je to teda veľmi praktický prístup k nahliadaniu na grafy farbení, ktorý sa dá ďalej využívať aj pri analýze iných tried grafov farbení. Dokázali sme tiež implikáciu, že ak je jedna zo spomínaných častí súvislá, tak celý graf farbení je súvislý.

Dokázali sme niekoľko tvrdení o štruktúre grafov farbení, napríklad že počet trojuholníkov v grafe 3-farbení kubických grafov je rovný nule. Tiež sme odhadli stupeň vrcholov v kubických grafoch pomocou celkového počtu farbení pôvodného grafu.

Našli sme niekoľko nekonečných tried grafov so zaujímavými vlastnosťami, t.j. bipartitné grafy, ktoré sú 2-súvislé, 3-súvislé, planárne, neplanárne (kombinácie možností).

Zdá sa, že ďalšie experimentovanie by mohlo viesť k všeobecnejším výsledkom.

Vyslovili sme v práci aj niekoľko hypotéz vyplývajúcich priamo z vykonaných experimentov na veľkej vzorke grafov, napríklad hranová a vrcholová súvislosť grafov 3-farbení kubických grafov sa rovná. Ďalšou zaujímavou hypotézou je zosilnenie spomínanej implikácie o súvislosti grafu farbení na tvrdenie, že počet komponentov jednej časti je rovnaký ako počet komponentov celého grafu farbení. Dôkazy týchto tvrdení by priniesli dobré výsledky pre zlepšenie algoritmickej zložitosti testovania parametrov prípadne by mohli viesť k všeobecnejším zisteniam o daných grafoch farbení.

# Dodatok A

## Výsledky testov

### A.1 Vysvetlivky k tabuľkám

V tabuľkách sú v riadkoch všetky neizomorfné grafy danej triedy. Stĺpce sú:

- id - identifikátor grafu
- r, r' - polomer (radius) grafu  $G$ , polomer grafu farbení  $F$
- d, d' - priemer (diameter) grafu  $G$ , priemer grafu farbení  $F$
- B - bipartitnosť grafu  $G$ . 1 - je bipartitný, 0 - nie je bipartitný
- $\lambda$  - stupeň hranovej (edge) súvislosti grafu  $G$
- $\kappa$  - stupeň vrcholovej súvislosti grafu  $G$
- N - počet vrcholov v grafe  $G$
- T - počet trojuholníkov grafu  $G$
- P - planarita grafu  $G$ . 1 znamená planárny graf, 0 znamená, že nie je planárny
- B' - bipartitnosť grafu farbení  $F$ . 1 - je bipartitný, 0 - nie je bipartitný
- $\lambda'$  - stupeň hranovej súvislosti grafu farbení  $F$
- $\kappa'$  - stupeň vrcholovej súvislosti grafu farbení  $F$
- N' - počet vrcholov v grafe farbení  $F$
- K' - počet komponentov grafu farbení  $F$

- $K''$  počet komponentov v jednom podgrafe  $F'$  grafu farbení  $F$
- $\delta'$  minimálny stupeň vrchola v grafe
- $\Delta'$  maximálny stupeň vrchola v grafe

## A.2 Kubické grafy, 8 vrcholov, 3 farby

graf $G$									graf farbení $F(G, 3)$									
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
0	3	3	0	2	2	8	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
1	2	3	0	3	3	8	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
2	2	2	0	3	3	8	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
3	3	3	1	3	3	8	0	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
4	2	2	0	3	3	8	0	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5

## A.3 Kubické grafy, 10 vrcholov, 3 farby

graf $G$									graf farbení $F(G, 3)$									
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
1	2	4	0	2	2	10	8	1	3	3	0	5	5	24	1	1	5	5
2	3	4	0	2	2	10	6	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
3	3	3	0	2	2	10	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
4	3	3	0	2	2	10	4	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
5	3	3	0	3	3	10	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
6	3	3	0	3	3	10	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
7	3	3	0	3	3	10	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
8	3	3	0	3	3	10	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
9	2	3	0	3	3	10	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
10	3	3	0	3	3	10	2	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
11	2	3	0	3	3	10	6	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
12	2	3	0	3	3	10	2	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
13	3	3	1	3	3	10	0	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	24	4	4	3	3
14	3	3	0	3	3	10	0	1	3	3	0	5	5	30	1	1	5	5
15	3	3	0	3	3	10	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	18	2	2	3	4
16	3	3	1	3	3	10	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	36	2	2	3	5
17	2	3	0	3	3	10	0	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3



## A.4 Kubické grafy, 12 vrcholov, 3 farby

graf $G$									graf farbení $F(G, 3)$									
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
4	3	5	0	2	2	12	8	1	3	4	0	6	6	48	1	1	6	6
5	3	5	0	2	2	12	6	1	3	3	0	5	5	24	1	1	5	5
6	3	4	0	2	2	12	8	1	3	3	0	5	5	24	1	1	5	5
7	3	4	0	2	2	12	4	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	48	2	2	5	5
8	3	5	0	2	2	12	8	1	3	3	1	5	5	24	1	1	5	5
9	3	4	0	2	2	12	10	1	3	3	0	5	5	24	1	1	5	5
10	3	4	0	2	2	12	6	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
11	3	4	0	2	2	12	6	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
12	3	4	0	2	2	12	4	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
13	3	4	0	2	2	12	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
14	4	4	0	2	2	12	12	1	3	3	1	5	5	24	1	1	5	5
15	4	4	0	2	2	12	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
16	4	4	0	2	2	12	6	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
17	3	4	0	2	2	12	6	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
18	3	4	0	2	2	12	4	1	3	3	0	5	5	48	1	1	5	7
19	3	4	0	2	2	12	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
20	3	4	0	2	2	12	4	0	3	3	0	5	5	36	1	1	5	6
21	3	4	0	2	2	12	4	0	3	3	0	5	5	36	1	1	5	6
22	3	5	0	2	2	12	4	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
23	3	4	0	2	2	12	6	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
24	3	4	0	2	2	12	2	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
25	4	4	0	2	2	12	8	1	2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
26	4	4	0	2	2	12	4	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
27	3	4	0	3	3	12	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
28	3	4	0	3	3	12	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
29	3	4	0	3	3	12	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
30	3	4	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
31	3	4	0	3	3	12	4	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
32	3	4	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
33	3	4	0	3	3	12	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
34	3	4	0	3	3	12	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
35	3	4	0	3	3	12	2	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
36	3	4	0	3	3	12	6	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
37	3	4	0	3	3	12	2	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
38	3	4	0	3	3	12	6	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3

39	3	4	0	3	3	12	2	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
40	3	3	0	3	3	12	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
41	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	24	4	4	3	3
42	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	24	4	4	3	3
43	3	4	0	3	3	12	4	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
44	3	4	0	3	3	12	4	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
45	3	4	0	3	3	12	4	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
46	3	4	0	3	3	12	2	1	3	3	0	5	5	30	1	1	5	5
47	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	18	2	2	3	4
48	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	36	2	2	3	5
49	3	4	0	3	3	12	4	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
50	3	4	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	18	2	2	3	4
51	3	3	0	3	3	12	6	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
52	3	3	0	3	3	12	4	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
53	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
54	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
55	3	3	0	3	3	12	4	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
56	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	18	2	2	3	4
57	3	4	0	3	3	12	4	1	3	3	0	4	4	24	1	1	4	6
58	3	3	0	3	3	12	8	1	2	2	1	3	3	6	1	1	3	3
59	3	3	0	3	3	12	4	0	3	3	0	4	4	18	1	1	4	5
60	3	3	0	3	3	12	2	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
61	3	3	0	3	3	12	6	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
63	4	4	1	2	2	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	48	4	4	4	4
64	3	3	0	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	1	0	0	24	4	4	3	3
id	r	d	B	$\lambda$	$\kappa$	N	T	P	r'	d'	B'	$\lambda'$	$\kappa'$	N'	K'	K''	$\delta$	$\Delta$
65	3	4	1	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	48	2	2	4	6
66	3	3	0	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	36	2	2	4	5
67	3	3	0	3	3	12	0	1	$\infty$	$\infty$	0	0	0	18	2	2	3	4
68	3	3	0	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	30	2	2	4	5
69	3	3	0	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	3	5
70	4	4	1	3	3	12	0	1	3	4	0	4	4	72	1	1	4	8
71	3	3	0	3	3	12	0	0	4	4	0	6	6	66	1	1	6	7
72	3	3	0	3	3	12	0	0	3	3	0	4	4	42	1	1	4	7
73	3	4	1	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	48	2	2	4	6
74	3	3	0	3	3	12	0	0	3	3	0	4	4	30	1	1	4	6
75	3	3	0	3	3	12	0	0	3	4	0	4	4	36	1	1	4	6
76	3	3	0	3	3	12	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0	0	30	2	2	3	5
77	3	3	0	3	3	12	0	0	3	4	0	4	4	36	1	1	4	6

78	3	3	0	3	3	12	0	0		$\infty$	$\infty$	1	0	0	18	3	3	3	3
79	3	3	0	3	3	12	0	0		$\infty$	$\infty$	1	0	0	12	2	2	3	3
80	3	3	0	3	3	12	0	0		2	2	0	4	4	12	1	1	4	4
81	3	3	0	3	3	12	0	0		3	3	0	4	4	24	1	1	4	5
82	3	3	1	3	3	12	0	0		3	4	0	4	4	48	1	1	4	6
83	3	3	0	3	3	12	0	0		$\infty$	$\infty$	0	0	0	24	2	2	4	4
84	3	3	0	3	3	12	0	0		$\infty$	$\infty$	1	0	0	18	3	3	3	3

# Literatúra

- [1] John M. Boyer and Wendy J. Myrvold, *On the Cutting Edge: Simplified  $O(n)$  Planarity by Edge Addition*. Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol. 8, No. 3, pp. 241-273, 2004.
- [2] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2005 c Springer-Verlag Heidelberg, (New York 1997, 2000, 2005).
- [3] RNDr. Pavol Ďuriš, CSc., *Tvorba efektívnych algoritmov*, Katedra informatiky MFF UK, 1997
- [4] Shimon Even and R. Endre Tarjan *Network Flow And Testing Graph Connectivity*, SIAM J. Comput. Volume 4, Issue 4, pp. 507-518 (1975)
- [5] S. Fisk, *Geometric coloring theory*, Adv. Math. 24 (1977) 298–340.
- [6] B. Mohar, *Kempe Equivalence Of Colorings*, Preprint series, Vol. 43 (2005), 956, University of Ljubljana