

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POTLÁČANIA HRÁN V KUBICKÝCH GRAFOCH  
BAKALÁRSKA PRÁCA

2022  
MATÚŠ ZUBČÁK



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POTLÁČANIA HRÁN V KUBICKÝCH GRAFOCH  
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika  
Študijný odbor: Informatika  
Školiace pracovisko: Katedra informatiky, FMFI UK  
Školiteľ: doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.

Bratislava, 2022  
Matúš Zubčák





Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Matúš Zubčák  
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** informatika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Potláčania hrán v kubických grafoch  
*Suppressing edges in cubic graphs*

**Anotácia:** Potlačenie hrany v kubickom grafe je operácia, ktorá je uskutočnená odobratím hrany a následným vyhladením vrcholov stupňa 2. Minimálny počet potlačení hrán, ktoré vedú k 3-zafarbitelnému grafu sa ukazuje byť výhodnou mierou pre meranie nezafarbitelnosti kubických grafov. Cieľom práce bude navrhnúť a implementovať program na sekvenčné a paralelné potláčania hrán v kubických grafoch ako aj získanie teoretických poznatkov o týchto parametroch.

**Vedúci:** doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KI - Katedra informatiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.  
**Dátum zadania:** 25.10.2021

**Dátum schválenia:** 04.11.2021

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce



**PodĀkovanie:** Āakujem vedúcej práce doc. RNDr. Edite Mačajovej, PhD. za pomoc, trpezlivosť, cenné rady, konzultácie a študijné materiály.  
Āakujem aj svojej rodine za podporu a trpezlivosť.

## Abstrakt

Mnohé známe hypotézy v teórii grafov je postačujúce dokázať pre kubické grafy, navyše pre hranovo 3-zafarbiteľné kubické grafy sú už tieto hypotézy dokázané. V našej práci skúmame Kászonyiho funkciu, paralelnú a sériovú rezistenciu. Tieto tri veličiny poskytujú isté charakteristiky pre tie kubické grafy, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Kászonyiho funkcia  $\psi(e)$  vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení kubického grafu  $G$  po potlačení hrany  $e$ , pričom potlačenie hrany je odobratie hrany a vyhladenie incidentných vrcholov stupňa 2. V práci určíme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého grafu z dvoch nekonečných tried snarkov – Isaacsových snarkov a zovšeobecnených Blanušových snarkov. Paralelná rezistencia je minimálny počet po dvoch nezávislých hrán potrebný na to, aby po ich potlačení vznikol hranovo 3-zafarbiteľný graf. Sériová rezistencia je minimálny počet postupných potlačení hrán, ktorým z pôvodného grafu vznikne hranovo 3-zafarbiteľný graf. Teda u sériovej rezistencie povoľujeme aj potláčanie novovzniknutých hrán. Ukážeme, že každý kubický graf má konečnú sériovú rezistenciu a ak má 1-faktor, tak má konečnú aj paralelnú rezistenciu. Ďalej skonštruujeme nekonečnú triedu kubických grafov, ktoré majú nekonečnú paralelnú rezistenciu a nekonečnú triedu bezmostových kubických grafov, ktoré majú rozdielnu paralelnú a sériovú rezistenciu, pričom pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  existuje v tejto triede taký graf  $G$ , pre ktorý je rozdiel jeho paralelnej a sériovej rezistencie väčší ako  $n$ . Súčasťou práce je aj program, ktorý v reálnom čase počíta hodnoty Kászonyiho funkcie, paralelnej a sériovej rezistencie pre kubické grafy do 80 vrcholov.

**Kľúčové slová:** snark, Kászonyiho funkcia, rezistencia, zovšeobecnené Blanušove snarky, Isaacsove snarky



## Abstract

It is known that many hypotheses in graph theory is sufficient to prove for cubic graphs, whereas for 3-edge-colorable cubic graphs, these hypotheses are already proven. In our thesis, we analyze Kászonyi's function, parallel and serial resistance. These three parameters provide some characteristics for 3-edge-uncolorable cubic graphs. Kászonyi's function  $\psi(e)$  expresses the number of different edge 3-colorings of a cubic graph  $G$  after suppressing an edge  $e$ , where edge suppression is the removal of the edge and the smoothing of the incident vertices of degree 2. In the thesis, we determine the value of Kászonyi's function  $\psi(e)$  for any edge  $e$  of each graph from two infinite classes of snarks – Flower snarks and generalized Blanuša snarks. Parallel resistance is the minimal size of matching sufficient to obtain an edge 3-colorable graph when suppressed. Serial resistance is the minimal number of successive edge suppressions required to obtain an 3-edge-colorable graph from the original graph. Note that we allow the suppression of newly created edges in serial resistance. We show that each cubic graph has a finite serial resistance, and if the graph has a 1-factor, it also has a finite parallel resistance. Furthermore, we construct an infinite class of cubic graphs with infinite parallel resistance and an infinite class of bridgeless cubic graphs that have different values of parallel and serial resistance. The thesis also includes a program that in real-time computes the values of the Kászonyi function, parallel and serial resistance for cubic graphs up to 80 vertices.

**Keywords:** snark, Kászonyi function, resistance, generalised Blanuša snarks, Flower snarks



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Úvod do problematiky</b>	<b>3</b>
1.1 Základné pojmy a definície . . . . .	3
1.2 Multipóly . . . . .	6
<b>2 Skúmanie Kászonyiho funkcie</b>	<b>9</b>
2.1 Vlastnosti Kászonyiho funkcie . . . . .	9
2.2 Kászonyiho funkcia a Isaacsove snarky . . . . .	11
2.3 Kászonyiho funkcia a zovšeobecnené Blanušove snarky . . . . .	26
<b>3 Skúmanie paralelnej a sériovej rezistencie</b>	<b>39</b>
3.1 Pojmy a definície súvisiace s paralelnou a sériovou rezistenciou . . . . .	39
3.2 Rozdiely medzi rezistenciami na kubických grafoch . . . . .	41
3.3 Súvislosť medzi 1-faktorom a paralelnou rezistenciou . . . . .	45
3.4 Grafy s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou . . . . .	48
<b>4 Opis funkcionality programu</b>	<b>57</b>
4.1 Vybrané implementačné detaily programu . . . . .	58
4.1.1 Počítanie Kászonyiho funkcie, paralelnej a sériovej rezistencie . . . . .	58
4.1.2 Algoritmus počítajúci hranové 3-farbenia . . . . .	58
4.1.3 Redukcia hranovej 3-zafarbiteľnosti na problém SAT . . . . .	59
<b>Záver</b>	<b>61</b>



# Zoznam obrázkov

1.1	Potlačenie hrany $e$ . . . . .	5
2.1	Isaacsov snark $J_5$ . . . . .	13
2.2	(3, 3)-pól $Y_k$ Isaacsovho snarku $J_n$ . . . . .	14
2.3	(3, 3)-pól $C$ . . . . .	15
2.4	(3, 3)-pól $D$ . . . . .	16
2.5	(3, 3)-pól $O$ . . . . .	17
2.6	(3, 3)-pól $I$ . . . . .	18
2.7	Graf prechodu na Isaacsovom (3, 3)-póle . . . . .	20
2.8	Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle $C$ . Hrany patriace grafu prechodu na (3, 3)-póle $C$ sú na obrázku označené červenou farbou. . . . .	21
2.9	Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle $D$ . Orientované hrany na rozšírenom grafe prechodu (3, 3)-pólu $D$ , ktoré nebolo možné nahradiť jednoduchou hranou sú na obrázku označené šípkou. . . . .	23
2.10	Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle $O$ . . . . .	24
2.11	Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle $I$ . . . . .	25
2.12	Blanušov (2, 2)-pól . . . . .	27
2.13	Petersenov graf . . . . .	27
2.14	(2, 2)-pól $I$ . . . . .	28
2.15	Zovšeobecnený Blanušov snark . . . . .	29
2.16	(2, 2)-pól $A$ . . . . .	32
2.17	(2, 2)-pól $C$ . . . . .	33
2.18	(2, 2)-pól v-rebrík . . . . .	34
2.19	(2, 2)-pól h-rebrík . . . . .	34
2.20	(2, 2)-pól $D$ . . . . .	35
2.21	(2, 2)-pól $E$ . . . . .	36
2.22	Pomocný (2, 1)-pól . . . . .	36
3.1	Graf $K'_4$ . . . . .	46
3.2	Graf $G_{20}$ . . . . .	46
3.3	Petersenov (2, 2)-pól . . . . .	48

3.4	(2, 2)-pól oblúk $O$ . . . . .	50
3.5	Graf kormidlo . . . . .	51
3.6	(2, 2)-pól $Q$ s možným hranovým 3-farbením $c$ . . . . .	52
3.7	Graf potlačené kormidlo s možným hranovým 3-farbením $c$ . . . . .	52
3.8	(2, 2)-pól polkormidlo $K$ . . . . .	54
3.9	(2, 2)-pól potlačené polkormidlo $K'$ s možným 3-farbením $c$ . . . . .	55

# Úvod

Mnohé známe hypotézy v teórii grafov, ako napríklad hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami, Fulkersonova hypotéza, Fan-Raspoudova hypotéza či 5-toková hypotéza je možné previesť na kubické grafy. Preto je postačujúce tieto hypotézy dokázať len pre kubické grafy. Z Vizingovej vety o hranových farbeniach vyplýva, že každý kubický graf je hranovo zafarbiteľný buď tromi alebo štyrmi farbami. Postupom času vysvitlo, že pre kubické 3-zafarbiteľné grafy dané hypotézy platia. Tým pádom je trieda kubických grafov, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné vhodná pre ďalšie skúmanie, nakoľko môže obsahovať potenciálne protipríklady daných hypotéz.

Ukazuje sa, že aj medzi kubickými grafmi, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné sú isté rozdiely vzhľadom na to, ako ťažké je pre tieto grafy dokázať vyššie spomenuté hypotézy. Tieto rozdiely často súvisia s tým, ako veľmi sú kubické grafy „vzdialené“ od hranovo 3-zafarbiteľného grafu. Preto sa postupne zaviedli takzvané rezistencie, napríklad vrcholová, hranová alebo toková rezistencia. Veľmi zjednodušene rezistencia je miera toho, ako veľmi je kubický graf „vzdialený“ od hranovo 3-zafarbiteľného grafu. Napríklad vrcholová rezistencia kubického grafu vyjadruje koľko najmenej vrcholov je potrebné z daného grafu odobrať, aby sme získali hranovo 3-zafarbiteľný graf. Pre kubické grafy s „malou“ rezistenciou sú dokázané mnohé z vyššie spomenutých hypotéz.

Okrem rôznych druhov rezistencií je známa aj takzvaná Kászonyiho funkcia  $\psi(e)$ , ktorú zaviedol v roku 1972 maďarský matematik László Kászonyi [10, 11] a v roku 2013 ju spopularizoval Richard C. Bradley [4]. Kászonyiho funkcia  $\psi(e)$  hovorí koľko rôznych hranových 3-farbení existuje na kubickom grafe  $G$  po tom, ako na ňom potlačíme hranu  $e$ , pričom pod pojmom potlačenie hrany  $e$  máme na mysli odobratie danej hrany a vyhladenie incidentných vrcholov. Pod pojmom vyhladenie vrchola stupňa 2 máme na mysli odobratie vrchola  $v$  a súčasné pridanie hrany medzi susednými vrcholmi vrchola  $v$ .

Nadväzujúc na výskum z ročníkového programu, v našej práci určujeme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého grafu zo známych nekonečných tried 3-nezafarbiteľných kubických grafov – Isaacsových snarkov a zovšeobecnených Blanušových snarkov.

Ďalej sa tiež v našej práci zaoberáme takzvanou paralelnou a sériovou rezistenciou na kubických grafoch. Tieto dve rezistencie vychádzajú z už spomínanej Kászonyiho

funkcie  $\psi(e)$ . Pre lepšiu predstavu, zjednodušene povedané paralelná rezistencia  $\pi(G)$  je minimálny počet po dvoch nezávislých hrán grafu  $G$ , takých, že po ich potlačení vznikne hranovo 3-zafarbitelný graf. Sériová rezistencia  $\sigma(G)$  je zase minimálny počet postupných potlačení hrán grafu  $G$  takých, že výsledný graf je hranovo 3-zafarbitelný. Inak povedané, pri sériovej rezistencii môžeme potláčať aj novovzniknuté hrany.

V našej práci sa zaoberáme aj skúmaním rozdielov medzi paralelnou a sériovou rezistenciou. Dá sa ľahko dokázať, že pre daný kubický graf  $G$  medzi paralelnou a sériovou rezistenciou platí vzťah  $\pi(G) \geq \sigma(G)$ . V našej práci tiež ukážeme, že každý kubický graf má konečnú sériovú rezistenciu, a že existuje nekonečná trieda kubických grafov, ktoré majú nekonečnú paralelnú rezistenciu. Ďalej tiež dokážeme tvrdenie, že pre každý kubický graf s 1-faktorom existuje konečná paralelná rezistencia. Dôsledkom tohto tvrdenia a Petersenovej vety [13] je, že každý bezmostový kubický graf má konečnú paralelnú rezistenciu. Ukážeme tiež, že existuje nekonečná trieda bezmostových kubických grafov, ktoré majú rôznu konečnú paralelnú a sériovú rezistenciu, pričom pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  existuje v tejto triede taký graf  $G$ , pre ktorý je rozdiel jeho paralelnej a sériovej rezistencie väčší ako  $n$ .

Naša práca nie je výlučne len teoretického charakteru. Súčasťou práce je tiež program, ktorý pre kubické grafy počíta hodnoty Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$ , ako aj konečné hodnoty paralelnej a sériovej rezistencie. Program tieto hodnoty počíta efektívne do 60 vrcholov a v reálnom čase až do 80 vrcholov. Súčasťou programu je tiež jednoduché grafické rozhranie, vďaka ktorému je program prístupný aj pre ľudí, ktorí nie sú príliš technicky zdatní.



# Kapitola 1

## Úvod do problematiky

V úvodnej kapitole vybudujeme základnú teóriu potrebnú pre našu prácu. Napriek tomu, že výsledky našej práce sa zameriavajú na skúmanie jednoduchých kubických grafov, zdefinujeme si na úvod pojem graf o čosi všeobecnejšie. Graf je dvojica skladajúca sa z konečnej množiny vrcholov a konečnej množiny hrán, pričom pojem hrany chápeme voľnejšie ako zvyčajne. Dôvod tohto prístupu je pragmatický – neskôr v práci sa nám hodí využívať aj štruktúry, ktoré definícia grafu v bežnom ponímaní nezahŕňa.

V našej práci nebudujeme grafovú teóriu od úplných základov, zavádzame len tie pojmy, ktoré by mohli byť pre študenta bakalárskeho programu informatika neznáme. Ak by si náš čitateľ potreboval ozrejmiť formálnu definíciu niektorého z pojmov, ktoré tu nedefinujeme, dovoľujeme si ho odkázať na knihu o teórii grafov od R. Diestela [5].

### 1.1 Základné pojmy a definície

**Definícia 1.1.1** (Graf). Pod pojmom graf  $G$  máme na mysli usporiadanú dvojicu  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina vrcholov a  $E$  je konečná množina hrán. Každá hrana má dva *konce*, ktoré môžu byť *incidentné* s nejakým vrcholom, *voľné* alebo *navzájom spojené*. Podľa toho, s koľkými vrcholmi je hrana incidentná pripúšťame tieto typy hrán:

- *riadna hrana* je hrana incidentná s dvomi rôznymi vrcholmi,
- *visiaca hrana* je hrana, ktorá má jeden koniec incidentný s vrcholom a druhý koniec voľný,
- *izolovaná hrana* je hrana, ktorá má oba konce voľné,
- *slučka* je hrana, ktorej oba konce sú incidentné s tým istým vrcholom,
- *izolovaná kružnica* je hrana, ktorej konce sú navzájom spojené.

O grafe hovoríme, že je *kubický*, ak sú všetky jeho vrcholy stupňa tri.

**Definícia 1.1.2** (Polhrana). Voľný koniec hrany, ktorý nie je incidentný so žiadnym vrcholom nazývame polhrana.

**Definícia 1.1.3** (Most). Hrana, ktorej odobratím vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf nazývame most.

Teraz zdefinujeme niekoľko pojmov o grafoch všeobecne. Následne sa na záver kapitoly zameriame na definície súvisiace s grafmi obsahujúcimi visiace hrany. Definície priamo súvisiace s výsledkami našej práce (Kászonyiho funkcia, paralelná a sériová rezistencia kubického grafu) zavedieme neskôr v kapitolách, kde ich budeme skúmať.

**Definícia 1.1.4** (Hranové  $k$ -farbenie grafu). Hranové  $k$ -farbenie grafu  $G = (V, E)$  je zobrazenie  $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  také, že pre všetky *susedné* hrany  $e_1, e_2$  platí  $c(e_1) \neq c(e_2)$ . Hovoríme, že graf je hranovo  $k$ -zafarbiteľný ak má hranové  $k$ -farbenie. Ak graf  $G$  nie je hranovo  $k$ -zafarbiteľný, hovoríme, že je hranovo  $k$ -nezafarbiteľný.

*Poznámka 1.1.5.* V práci sa venujeme len skúmaniu hranovej 3-zafarbiteľnosti. Preto pri  $k$ -zafarbiteľnosti máme napriek zaužívanej konvencii vždy na mysli hranovú nie vrcholovú  $k$ -zafarbiteľnosť grafu.

**Definícia 1.1.6** ( $k$ -cyklus). Kružnicu na  $k$  vrcholoch nazývame aj  $k$ -cyklus.

**Definícia 1.1.7** (Trojuholník). Pod pojmom trojuholník máme na mysli každú kružnicu dĺžky 3.

**Definícia 1.1.8** (Obvod). Pod pojmom obvod máme na mysli dĺžku najkratšej kružnice grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.9** (Cyklická súvislosť). Hovoríme, že graf  $G$  je cyklicky  $k$ -súvislý, ak je potrebné z neho odobrať aspoň  $k$  hrán na to, aby vznikol graf, ktorý obsahuje aspoň dva komponenty s kružnicou.

**Definícia 1.1.10** (Snark). [8, 7] Jednoduchý kubický graf obsahujúci len riadne hrany nazývame snark, ak platí:

- (i) veľkosť jeho obvodu je aspoň 5,
- (ii) je cyklicky 4-súvislý,
- (iii) je hranovo 3-nezafarbiteľný.

*Poznámka 1.1.11.* Cieľom definície snarku je zdefinovať také kubické grafy, ktoré sú 3-nezafarbiteľné a súčasne ich 3-nezafarbiteľnosť nevyplýva z 3-nezafarbiteľnosti menšieho 3-nezafarbiteľného kubického grafu, na ktorý je možné „zredukovať“ pôvodný graf nejakým triviálnym spôsobom.

**Definícia 1.1.12** ( $k$ -regulárny graf). Graf nazveme regulárny ak majú všetky jeho vrcholy rovnaký stupeň. Ak tento spoločný stupeň je  $k$ , graf nazveme  $k$ -regulárny.

**Definícia 1.1.13** (Faktor grafu). Pod pojmom faktor grafu  $G$  rozumieme podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.14** ( $k$ -faktor). Podgraf, ktorý je  $k$ -regulárny faktor grafu  $G$  nazývame  $k$ -faktor grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.15** (Nezávislé hrany). Dve hrany sú nezávislé ak množiny ich koncových vrcholov sú disjunktné.

**Definícia 1.1.16** (Párenie). Množinu po dvoch nezávislých hrán nazývame párenie.

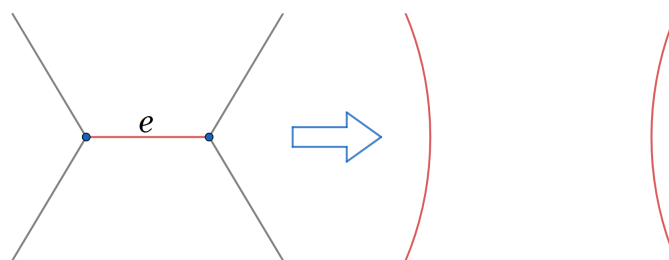
**Definícia 1.1.17** (Perfektné párenie). Párenie na grafe  $G$  pokrývajúce všetky vrcholy z  $V(G)$  nazývame perfektné párenie.

**Definícia 1.1.18** (Hranová 3-dekompozícia). Pod pojmom hranová 3-dekompozícia grafu  $G$  máme na mysli rozdelenie hrán z  $E(G)$  do troch disjunktných tried tak, že každá trieda tvorí perfektné párenie.

**Definícia 1.1.19** (Subdivízia hrany). Pod pojmom subdivízia riadnej hrany  $e = uv$  grafu  $G$  máme na mysli odobratie hrany  $e$ , pridanie nového vrchola  $w$  a spojenie vrcholov  $u, w$  aj  $v, w$  riadnou hranou.

**Definícia 1.1.20** (Vyhladenie vrchola). Nech  $v$  je vrchol stupňa 2. Vyhladenie vrchola  $v$  je odobranie vrchola  $v$  spolu s incidentnými hranami a súčasné pridanie riadnej hrany medzi susednými vrcholmi vrchola  $v$ .

**Definícia 1.1.21** (Potlačenie hrany). Odobranie hrany  $e$ , ktorá je incidentná s dvoma vrcholmi stupňa 3 a následné vyhladenie vrcholov stupňa 2 nazývame potlačenie hrany  $e$  (pozri obrázok 1.1).



Obr. 1.1: Potlačenie hrany  $e$

*Poznámka 1.1.22.* Výsledkom potlačenia hrany  $e$  v kubickom grafe je kubický graf. Dá sa tiež nahliadnuť, že potlačením hrany  $e$  v jednoduchom kubickom grafe obsahujúcom len riadne hrany môže vzniknúť aj graf s násobnou hranou alebo slučkou. Následným potlačením 3-násobnej hrany alebo hrany, ktorá je susedná so slučkou vznikne zase graf s izolovanou kružnicou.

Vzhľadom na to, že po odobratí slučky by nám ostal len jeden vrchol stupňa dva, ktorý by sme následne nemali ako vyhladiť tak, aby bol výsledný graf opäť kubický, potlačenie slučky nie je povolené.

## 1.2 Multipóly

**Definícia 1.2.1** (Multipól). Z grafu  $G$  s neprázdnu množinou visiacych hrán vytvoríme multipól tak, že jeho polhrany rozdelíme do navzájom disjunktných množín – *konektorov*. Každý konektor  $S_i$  je lineárne usporiadaný, teda poradie polhrán v konektorech je pevné.

**Definícia 1.2.2** ( $(k, l)$ -pól). Pod pojmom  $(k, l)$ -pól rozumieme každý multipól grafu  $G$ , ktorý obsahuje práve dva konektory, pričom *vstupný* konektor  $S_1$  obsahuje  $k$  polhrán a *výstupný* konektor  $S_2$  obsahuje  $l$  polhrán.

**Definícia 1.2.3** (Zafarbenie konektoru). Zrejme každé hranové 3-farbenie  $c$  multipólu  $M$  jednoznačne priraďuje každému konektoru  $S$  nejakú usporiadanú  $k$ -ticu farieb. Túto usporiadanú  $k$ -ticu farieb nazývame zafarbením konektoru. Formálne nech  $S = (e_1, \dots, e_k)$ , potom  $c(S) = (c(e_1), \dots, c(e_k))$ .

Pri  $(k, l)$ -póle hovoríme o zafarbení vstupného (výstupného) konektoru.

**Definícia 1.2.4** (Prechodová relácia). Binárnu reláciu  $R$  na množine zafarbení konektorov  $(k, l)$ -pólu takú, že  $xRy$  práve vtedy, keď existuje hranové 3-farbenie  $c$  také, že  $c(S_1) = x$  a  $c(S_2) = y$  nazývame prechodová relácia.

**Definícia 1.2.5** (Graf prechodu). Nech  $c : E_n \rightarrow \{1, 2, 3\}$  je hranové 3-farbenie  $(k, k)$ -pólu  $M$ . Grafom prechodu na  $(k, k)$ -póle  $M$  máme na mysli orientovaný graf  $G = (V, E)$ , pričom množinou vrcholov  $V$  myslíme všetky možné zafarbenia vstupného konektoru  $(k, k)$ -pólu  $M$ . Z vrcholu  $x$  vedie orientovaná hrana do vrcholu  $y$  grafu  $G$  práve vtedy, keď existuje hranové 3-zafarbenie  $c$   $(k, k)$ -pólu  $M$  také, že zafarbí konektory nasledovne:  $c(S_1) = x$  a  $c(S_2) = y$ . Formálne nech  $R$  je prechodová relácia na množine zafarbení konektorov  $(k, k)$ -pólu  $M$ , potom množina vrcholov  $V = \{(c_1, c_2, \dots, c_k) \mid c_i \in \{1, 2, 3\}\}$  a množina hrán  $E = \{xy \mid xRy; x, y \in V\}$ .

**Definícia 1.2.6** (Rozšírený graf prechodu). Nech  $G_1, G_2, \dots, G_n$  sú postupne grafy prechodov  $(k, k)$ -pólov  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Potom rozšíreným grafom prechodu nazývame graf  $G$ , ktorý vznikne zjednotením grafov  $G_1, G_2, \dots, G_n$ .

Pre každú hranu rozšíreného grafu prechodov  $(k, k)$ -pólov  $M_1, M_2, \dots, M_n$  vieme jednoznačne určiť, ktorému z grafov prechodov  $G_1, G_2, \dots, G_n$  pôvodne prislúchala.

**Definícia 1.2.7** (Uzáver  $(k, k)$ -pólu). Nech  $M$  je  $(k, k)$ -pól so vstupným konektorom  $S_1 = (x_1, \dots, x_k)$  a výstupným konektorom  $S_2 = (y_1, \dots, y_k)$ . Pod pojmom uzáver  $(k, k)$ -pólu  $M$  máme potom na mysli graf  $G_M$ , ktorý vznikne z  $(k, k)$ -pólu  $M$  postupným spojením polhrán  $x_i$  s polhranami  $y_i$  pre všetky  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Definícia 1.2.8** (Spájanie  $(k, l)$ -pólov). Nech  $M$  je  $(k, l)$ -pól a  $N$  je  $(l, m)$ -pól. Ďalej nazveme výstupný konektor  $(k, l)$ -pólu  $M$  ako  $S_2^M$  a vstupný konektor  $(l, m)$ -pólu  $N$  ako  $S_1^N$ .

Potom hovoríme, že  $(k, m)$ -pól  $MN$ , ktorý vznikne postupným spájaním polhrán z výstupného konektora  $S_2^M$  s polhranami zo vstupného konektora  $S_1^N$  vznikol operáciou spojenia  $(k, l)$ -pólov  $M, N$ . Spájať dva  $(k, l)$ -póly je možné, len ak výstupný konektor prvého a vstupný druhého  $(k, l)$ -pólu majú rovnakú mohutnosť. Polhrany spájame v poradí určenom vstupným (výstupným) konektorom  $S_1^N$  a  $S_2^M$ .

*Poznámka 1.2.9.* Správnejšie by bolo hovoriť o spájaní  $(k, l)$ -pólu a  $(l, m)$ -pólu. Nakoľko je však zrejmé, že výstupný konektor prvého multipólu a vstupný konektor druhého multipólu musia byť „vhodnej“ mohutnosti, rozhodli sme sa definíciu príliš formálne nekomplikovať.

**Definícia 1.2.10** (Asymetrický súčin  $(2, 2)$ -pólov). [16] Nech  $M, N$  sú  $(2, 2)$ -póly. Nech  $S_2^M = (e_1^M, e_2^M)$  je výstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $M$  a  $S_1^N = (e_1^N, e_2^N)$  je vstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $N$ . Potom hovoríme, že  $(2, 2)$ -pól  $M \otimes N$ , ktorý vznikol operáciou asymetrického súčinu  $(2, 2)$ -pólov, ak vznikol spojením hrán  $e_1^M$  s  $e_2^N$  a  $e_2^M$  s  $e_1^N$ .

Operácia asymetrického súčinu je zrejme asociatívna. *Asymetrickou mocninou*  $M^n$  nejakého  $(2, 2)$ -pólu  $M$  potom značíme  $(2, 2)$ -pól, ktorý vznikne  $n$ -krát aplikovaným asymetrickým súčinom na  $(2, 2)$ -póloch  $M \otimes M \otimes \dots \otimes M$ .



# Kapitola 2

## Skúmanie Kászonyiho funkcie

Na úvod tejto kapitoly zosumarizujeme vlastnosti Kászonyiho funkcie z prehľadového článku od Richarda C. Bradleyho [4]. Následne vyslovíme a dokážeme tvrdenia, ktoré jednoznačne určujú hodnoty Kászonyiho funkcie pre všetky hrany grafov z dvoch známych nekonečných tried snarkov - Isaacsových snarkov a zovšeobecnených Blanušových snarkov. Hodnoty Kászonyiho funkcie Issacksových snarkov sa nám podarilo určiť už v rámci výskumu počas ročníkového projektu. Podľa nám dostupných informácií by malo ísť o prvé dve nekonečné triedy snarkov, ktorým bola určená a dokázaná hodnota Kászonyiho funkcie pre všetky hrany.

V našej práci nedokazujeme, že Isaacsove snarky a zovšeobecnené Blanušove snarky sú 3-nezafarbiteľné kubické grafy. Túto skutočnosť už pred nami dokázali R. Isaacs a J. Mazák v článkoch [8, 12].

### 2.1 Vlastnosti Kászonyiho funkcie

Naša práca v tejto kapitole priamo nadväzuje na prehľadový článok od Richarda C. Bradleyho [4] a prác L. Kászonyiho ohľadom hranovej 3-nezafarbiteľnosti kubických grafov [10, 11]. Richard C. Bradley sa v prehľadovom článku zaoberá hranovou 3-nezafarbiteľnosťou kubických grafov a ponúka otvorené problémy na ďalšie skúmanie, pričom sa vo veľkej miere odkazuje na definície a výsledky z Kászonyiho prác [10, 11]. Základnou funkciou, ktorú budeme v tejto kapitole skúmať je *Kászonyiho funkcia*, ktorú si teraz zdefinujeme.

**Definícia 2.1.1** (Kászonyiho funkcia). [11] Kászonyiho funkcia  $\psi(e)$  vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení grafu  $G$  po potlačení hrany  $e$ , pričom farbenia, ktoré vieme získať permutáciou farieb považujeme za rovnaké.

*Poznámka 2.1.2.* L. Kászonyi a Richard C. Bradley chápu Kászonyiho funkciu trochu inak ako ju chápeme my v našej práci. Definícia Kászonyiho funkcie podľa L. Kászonyiho a R. C. Bradleyho vychádza z jednej vlastnosti o danej funkcii, a to, že hodnota

$\psi(e)$  (podľa nami uvedenej definície) je vždy deliteľná číslom 3 (pozri tvrdenie 2.1.3). Definícia Kászonyiho funkcie podľa L. Kászonyiho a R.C. Bradleyho je ekvivalentná s našou definíciou, ak výslednú hodnotu Kászonyiho funkcie podľa našej definície vždy predelíme číslom 3.

Teraz bez dôkazu uvedieme niektoré vlastnosti Kászonyiho funkcie, ktoré R. C. Bradley spomína vo svojom prehľadovom článku [4], pričom však ide o výsledky prác L. Kászonyiho [10, 11].

**Tvrdenie 2.1.3.** [10, 11] *Nech  $G$  je snark. Nech  $G_e$  je graf, ktorý získame z grafu  $G$  potlačením hrany  $e$ . Nech  $d_1, d_2$  sú hrany, ktoré vzniknú potlačením hrany  $e$ . Ďalej nech  $\delta(G_e)$  je množina všetkých hranových 3-dekompozícií takých, že hrany  $d_1, d_2$  patria do rovnakej triedy. Potom existuje prirodzené číslo  $L$  také, že:*

$$(i) \psi(e) = 3L,$$

$$(ii) |\delta(G_e)| = L,$$

(iii) *nech  $a, b$  sú dve (môžu byť aj rovnaké) farby a nech  $\gamma(G_e)$  je množina všetkých hranových 3-farbení  $c$  grafu  $G_e$  takých, že  $c(d_1) = a, c(d_2) = b$ . Potom  $|\gamma(G_e)| = 2L$ .*

**Tvrdenie 2.1.4.** [10, 11] *Nech  $H$  je súvislý podgraf snarku  $G$ , ktorý vznikol ako zjednotenie niekoľkých 5-cyklov. Potom hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre všetky hrany  $e \in E(H)$  je rovnaká.*

**Tvrdenie 2.1.5.** [10, 11] *Nech  $G$  je snark a  $C$  je 5-cyklus v  $G$ . Označme vrcholy z  $V(C)$  postupne  $v_1, \dots, v_5$ . Hrana  $\epsilon_i$  je hrana incidentná s  $v_i$  taká, že  $\epsilon_i \notin E(C)$ . Nech  $\delta(G - E(C))$  je množina všetkých hranových 3-dekompozícií grafu  $G - E(C)$ . Nech  $\delta'_i(G - E(C))$  je množina všetkých hranových 3-dekompozícií takých, že pre dané  $i \in \mathbb{Z}$  sú hrany  $\epsilon_{i-2}, \epsilon_i, \epsilon_{i+2}$  v rovnakej triede. Potom platia nasledovné vlastnosti:*

$$(i) |\delta(G - E(C))| = 15 \cdot \psi(e), \text{ pre ľubovoľnú hranu } e \in E(C),$$

$$(ii) |\delta'_i(G - E(C))| = 3 \cdot \psi(e), \text{ pre ľubovoľnú hranu } e \in E(C) \text{ a } i \in \mathbb{Z}_5.$$

Vo svojom prehľadovom článku uvádza R. C. Bradley aj nasledovnú hypotézu, ktorá už ale bola medzičasom dokázaná ako dôsledok ešte silnejšieho tvrdenia. Preto ju uvádzame ako tvrdenie.

**Tvrdenie 2.1.6.** *Pre každé dve prirodzené čísla  $j, k$  existuje snark  $G$  a hrana  $e$  taká, že  $\psi(e) = 2^j \cdot 3^k$ .*

Ako sme už spomenuli, toto tvrdenie je dôsledkom silnejšieho tvrdenia, ktoré dokázali Ariana Cappon a Emily Walther v článku Prime Factorization of Kászonyi [2]. Znenie tohto silnejšieho tvrdenia tu teraz pre úplnosť uvedieme.



**Definícia 2.1.7.** Nech  $\mathbb{P}$  je množina nasledovných prvočísel:  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$  pričom  $\mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{N}_{149} \mid p \text{ je prvočíslo}\}$  a  $\mathbb{P}_2 = \{173, 179, 181, 197, 229, 257, 271, 359\}$ .

**Tvrdenie 2.1.8** (Capoon, Walther). [2] Pre každé prirodzené číslo  $n$  tvaru

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

existuje snark  $G$  a hrana  $e \in E(G)$  taká, že Kászonyiho funkcia  $\psi(e)$  pre danú dvojicu  $(G, e)$  nadobúda hodnotu  $\psi(e) = n$ .

## 2.2 Kászonyiho funkcia a Isaacsove snarky

Nekonečná trieda Isaacsových snarkov, tiež v angličtine známych aj ako *flower snarks* bola prvýkrát skonštruovaná americkým matematikom Rufusom Isaacsom v článku publikovanom roku 1975 [8]. My teraz, vychádzajúc z výskumu počas ročníkového projektu, dokážeme hodnoty Kászonyiho funkcie pre všetky hrany tejto nekonečnej triedy snarkov. Najprv ale vyslovíme a dokážeme jednu na prvý pohľad nesúvisiacu lemu, ktorú neskôr v dôkaze využijeme.

**Lema 2.2.1.** Nech  $A$  je symetrická matica typu  $6 \times 6$  taká, že  $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom pre každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n & 0 & a_n - 1 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_n & 0 & a_n - 1 & 0 \\ 0 & a_n & 0 & a_n & 0 & a_n - 1 \\ a_n - 1 & 0 & a_n & 0 & a_n & 0 \\ 0 & a_n - 1 & 0 & a_n & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_n - 1 & 0 & a_n & 0 \end{pmatrix}, \quad a_n = \frac{1}{3}(2^{2n+1} + 1)$$

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & b_n - 1 & 0 & b_n - 1 & 0 \\ 0 & b_n & 0 & b_n - 1 & 0 & b_n - 1 \\ b_n - 1 & 0 & b_n & 0 & b_n - 1 & 0 \\ 0 & b_n - 1 & 0 & b_n & 0 & b_n - 1 \\ b_n - 1 & 0 & b_n - 1 & 0 & b_n & 0 \\ 0 & b_n - 1 & 0 & b_n - 1 & 0 & b_n \end{pmatrix}, \quad b_n = \frac{1}{3}(2^{2n} + 2).$$

*Dôkaz.* Postupujeme indukciou na  $n$ . Najprv dokážeme, že matice  $A^{2^{n+1}}$  sú príslušného tvaru. Zrejme pre  $n = 0$  platí  $A^{2^{n+1}} = A$ . Keďže  $A^{2^{(n+1)+1}} = A^{2^{n+1}} \cdot A^2$ , stačí nám ukázať, že po vynásobení  $A^{2^{n+1}} \cdot A^2$  dostaneme maticu požadovaného tvaru pre všetky  $n$ .

$$A^{2^{(n+1)+1}} = A^{2^{n+1}} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4a-1 & 0 & 4a-2 & 0 & 4a-1 \\ 4a-1 & 0 & 4a-1 & 0 & 4a-2 & 0 \\ 0 & 4a-1 & 0 & 4a-1 & 0 & 4a-2 \\ 4a-2 & 0 & 4a-1 & 0 & 4a-1 & 0 \\ 0 & 4a-2 & 0 & 4a-1 & 0 & 4a-1 \\ 4a-1 & 0 & 4a-2 & 0 & 4a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zrejme platí  $4a_n - 1 = \frac{4}{3}(2^{2^{n+1}} + 1) - 1 = \frac{1}{3}(2^{2^{(n+1)+1}} + 1) = a_{n+1}$ .

Maticu tvaru  $A^{2^n}$  dokážeme analogicky. Pre  $A^0 = I_6$  zrejme platí požadovaná vlastnosť. Indukciou dokážeme z matice  $A^{2^n}$ , že matica  $A^{2^{(n+1)}}$  je požadovaného tvaru.

$$A^{2^{(n+1)}} = A^{2^n} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4b_n - 2 & 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 3 & 0 \\ 0 & 4b_n - 2 & 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 3 \\ 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 2 & 0 & 4b_n - 3 & 0 \\ 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 2 & 0 & 4b_n - 3 \\ 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 2 & 0 \\ 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 3 & 0 & 4b_n - 2 \end{pmatrix}$$

Zrejme platí  $4b_n - 2 = \frac{4}{3}(2^{2^n} + 2) - 2 = \frac{1}{3}(2^{2^{(n+1)}} + 2) = b_{n+1}$ .  $\square$

**Definícia 2.2.2** (Isaacsove snarky). [8] Triedu súvislých kubických grafov, pre ktoré platí:  $J_n = (V_n, E_n)$ , pričom  $V_n = \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$ ,

$E_n = I_n \cup C_n \cup D_n \cup O_n$ , kde

$I_n = \{a_i a_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n; j = i + 1 \pmod{n}\}$

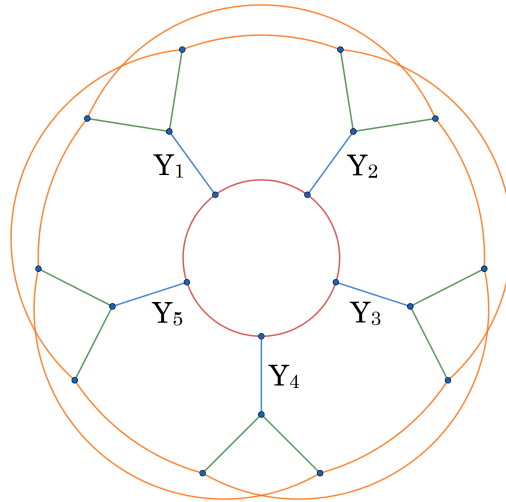
$C_n = \{a_i b_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$

$D_n = D'_n \cup D''_n$ , pričom  $D'_n = \{b_i c_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$  a  $D''_n = \{b_i d_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$

$O_n = O'_n \cup O''_n$ , pričom  $O'_n = \{c_i d_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n; j = i + 1 \pmod{n}\}$

a  $O''_n = \{c_i d_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n; j = i - 1 \pmod{n}\}$  nazývame Isaacsove snarky.

*Poznámka 2.2.3.* Množinu hrán  $I_n$  nazývame ako množinu *vnútorných* hrán Isaacsovho grafu alebo skrátene *vnútorné hrany*, z anlického inner edges. Množinu  $C_n$  nazývame ako množinu *spájajúcich* hrán Isaacsovho grafu alebo skrátene *spájajúce hrany*, z anglického connection edges. Množinu  $D_n$  nazývame množinou *rozdeľujúcich* hrán Isaacsovho grafu alebo skrátene *rozdeľujúce hrany*, z anglického division edges. Množinu  $O_n$  nazývame ako množinu *vonkajších* hrán Isaacsovho grafu alebo skrátene *vonkajšie hrany*, z anglického outer edges.

Obr. 2.1: Isaacsov snark  $J_5$ 

*Poznámka 2.2.4.* Na obrázku 2.1 je vyobrazený Isaacsov snark  $J_5$  zložený z piatich Isaacsových  $(3, 3)$ -pólov  $Y_1, \dots, Y_5$  (pozri definíciu 2.2.5). Vnútorne hrany Isaacsovho snarku  $J_5$  sú označené na obrázku 2.1 červenou farbou. Spájajúce, rozdeľujúce a vonkajšie hrany sú zase postupne označené modrou, zelenou a oranžovou farbou.

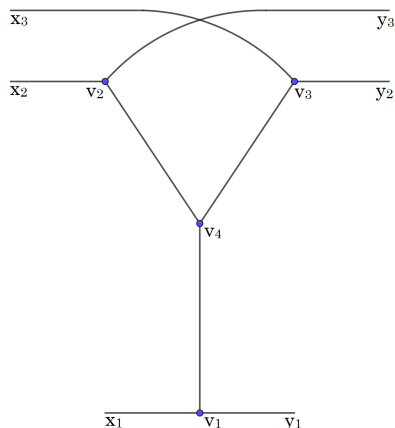
**Definícia 2.2.5** (Isaacsov  $(3, 3)$ -pól). Multipólom, ktorý vznikne ako podgraf  $Y_k$  Isaacsovho snarku  $J_n$  nazývame Isaacsov  $(3, 3)$ -pól. Obsahuje vrcholy  $a_k, b_k, c_k, d_k$  a všetky s nimi incidentné hrany. Hrany spájajúce vrcholy  $a_k, b_k, c_k, d_k$   $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  chápeme ako riadne hrany. Zvyšné hrany incidentné práve s jedným z vrcholov  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  chápeme ako visiace hrany (pozri obrázok 2.2).

Vstupným konektorom  $S_1$  Isaacsovho  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  rozumieme usporiadanú trojicu polhrán  $S_1 = (x_1, x_2, x_3)$ . Výstupným konektorom  $S_2$  Isaacsovho  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  rozumieme usporiadanú trojicu polhrán  $S_2 = (y_1, y_2, y_3)$ , pričom máme na mysli rovnomenne polhrany visiacych hrán, ktoré sú na obrázku 2.2 označené ako  $x_1, x_2, x_3$  a  $y_1, y_2, y_3$ .

*Poznámka 2.2.6.* Ak nebude ďalej v texte tejto podkapitoly vyslovene povedané inak, pod  $(3, 3)$ -pólom máme na mysli Isaacsov  $(3, 3)$ -pól.

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Stačí nám rozobrať možnosti, kedy je vstupný konektor zafarbený farbami  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$  alebo  $(1, 2, 3)$ . Všetky ostatné možné zafarbenia vstupného konektora potom vieme získať permutáciou farieb. Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.2.

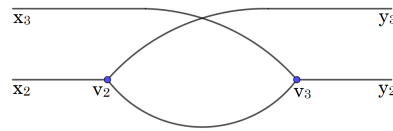
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 1, 1)$ . Zrejme niektorá hrana incidentná s vrcholom  $v_4$  musí mať priradenú farbu 1. Potom však jej druhý koncový vrchol má zafarbené dve hrany rovnakou farbou. Preto pre dané zafarbenie vstupného konektora neexistuje 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ .

Obr. 2.2:  $(3, 3)$ -pól  $Y_k$  Isaacsovho snarku  $J_n$ 

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(2, 1, 1)$ . Hrana  $y_2$  nemôže mať priradenú farbu 1. Pre zafarbenie hrany  $y_2$  jednou zo zvyšných dvoch farieb dostávame jednoznačné zafarbenie  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Možné zafarbenia výstupného konektoru sú potom  $(3, 3, 2)$  a  $(3, 2, 3)$ .
- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 2, 1)$ . Hrana  $y_1$  môže mať priradenú len farbu 2 alebo 3. Pre obe priradenia dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Možné zafarbenia výstupného konektoru sú potom  $(2, 3, 3)$  a  $(3, 2, 3)$ .
- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 1, 2)$ . Opäť hrana  $y_1$  nemôže mať priradenú farbu 1 a pre zafarbenie hrany  $y_1$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné zafarbenie  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Možné zafarbenia výstupného konektoru sú potom  $(2, 3, 3)$  a  $(3, 3, 2)$ .
- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 2, 3)$ . Hrana  $y_1$  môže mať priradenú len farbu 2 alebo 3. Pre obe priradenia dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Možné zafarbenia výstupného konektoru sú potom  $(2, 1, 3)$  a  $(3, 2, 1)$ .

Skôr, ako vyslovíme tvrdenie o hodnotách  $\psi(e)$  pre hrany Isaacsových snarkov, pozrime sa ešte, ako potlačenie hrany  $e$  ovplyvní  $(3, 3)$ -pól  $Y_k$ , prípadne  $(3, 3)$ -pól, ktorý vznikne spojením dvoch  $(3, 3)$ -pólov. Z existujúcich izomorfizmov Isaacsoveho grafu je zrejmé, že pre všetky hrany  $e \in I_n$  je hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  rovnaká. Budeme ju označovať  $i_n$ . Toto tvrdenie analogicky platí postupne pre všetky hrany z množín  $C_n, D_n, O_n$ . Tieto hodnoty budeme postupne označovať  $c_n, d_n, o_n$ . Preto nám stačí zamerať sa na práve jedno potlačenie hrany z každej z týchto štyroch množín.

**Definícia 2.2.7** ( $(3, 3)$ -pól  $C$ ). Multipólom, ktorý vznikne z  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  po potlačení hrany  $e$  z množiny  $C_n$  prislúchajúcej pôvodnému  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  nazývame  $(3, 3)$ -pól  $C$  (pozri obrázok 2.3).

Obr. 2.3:  $(3, 3)$ -pól  $C$ 

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $C$ . Možnosť, v ktorej sú všetky polhrany vstupného konektoru zafarbené rovnakou farbou nebudeme rozoberať. Neskôr si v samotnom dôkaze hodnôt Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre jednotlivé triedy hrán Isaacsových snarkov ukážeme, prečo dané zafarbenie vstupného konektoru  $(3, 3)$ -pólu  $C$  nemá význam uvažovať.

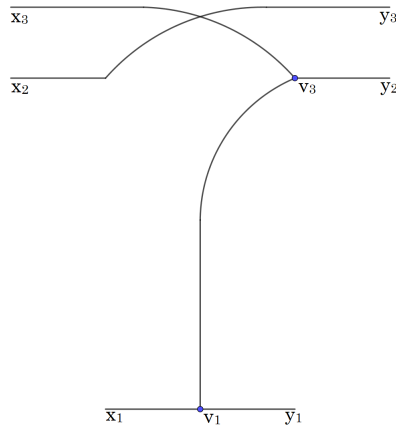
Zrejme pre každé 3-farbenie  $c$  platí  $c(x_1) = c(y_1)$ , nakoľko ide o tú istú hranu. Rozoberieme najprv možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $C$  po odobraní hrany  $x_1 = y_1$ . Dvojica polhrán vstupného konektora  $(x_2, x_3)$  môžeme zafarbiť farbami  $(1, 1)$  alebo  $(1, 2)$ . Zvyšné zafarbenia vieme získať permutáciou farieb. Všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $C$  získame kombináciou všetkých možných 3-farbení  $(3, 3)$ -pólu  $C$  po odobraní hrany  $x_1 = y_1$  a vhodného zafarbenia izolovanej hrany  $x_1 = y_1$ . Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.3.

- Zafarbenie hrán  $x_1, x_2$  je  $c(x_1) = c(x_2) = 1$ . Zrejme hrana  $y_2$  nemôže mať priradenú farbu 1. Pre zafarbenie hrany  $y_2$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $C$  po odobraní hrany  $x_1 = y_1$ . Možné 3-farbenia dvojice  $(y_2, y_3)$  sú potom  $(2, 2)$  a  $(3, 3)$ .
- Zafarbenie hrán  $x_1, x_2$  je  $c(x_1) = 1, c(x_2) = 2$ . V tomto prípade je 3-farbenie dvojice  $(y_2, y_3)$  dané jednoznačne. Jediné možné 3-farbenie dvojice  $(y_2, y_3)$  je  $(1, 2)$ .

**Definícia 2.2.8** ( $(3, 3)$ -pól  $D$ ). Multipól, ktorý vznikne z  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  po potlačení hrany  $e$  z množiny  $D_n$  prislúchajúcej pôvodnému  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  nazývame  $(3, 3)$ -pól  $D$  (pozri obrázok 2.4).

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $D$ . Možnosť, v ktorej sú všetky polhrany vstupného konektoru zafarbené rovnakou farbou nebudeme rozoberať.

Zrejme pre každé 3-farbenie  $c$  platí  $c(x_2) = c(y_3)$ , nakoľko ide o tú istú hranu. Rozoberieme najprv možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $D$  po odobraní hrany  $x_2 = y_3$ .

Obr. 2.4:  $(3, 3)$ -pól  $D$ 

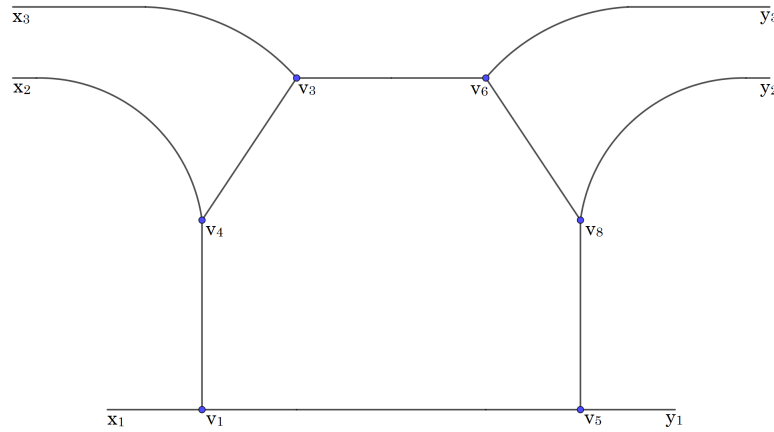
Dvojica hrán vstupného konektora  $(x_1, x_3)$  môže byť zafarbená farbami  $(1, 1)$  alebo  $(1, 2)$ . Zvyšné 3-farbenia vieme získať permutáciou farieb. Všetky možnosti zafarbenia  $(3, 3)$ -pólu  $D$  získame kombináciou všetkých možných 3-farbení  $(3, 3)$ -pólu  $D$  po odobraní hrany  $x_2 = y_3$  a vhodného zafarbenia hrany  $x_2 = y_3$ . Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.4.

- Zafarbenie hrán  $x_1, x_2$  je  $c(x_1) = c(x_2) = 1$ . Zrejme hrana  $y_1$  nemôže mať priradenú farbu 1. Pre zafarbenie hrany  $y_1$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $D$  po odobraní hrany  $x_2 = y_3$ . Možné 3-farbenia dvojice  $(y_1, y_2)$  sú potom  $(2, 2)$  a  $(3, 3)$ .
- Zafarbenie hrán  $x_1, x_2$  je  $c(x_1) = 1, c(x_2) = 2$ . V tomto prípade je 3-farbenie dvojice  $(y_1, y_2)$  dané jednoznačne. Jediné možné 3-farbenie dvojice  $(y_1, y_2)$  je potom  $(2, 1)$ .

*Poznámka 2.2.9.* Všimnime si, že rovnako dobre môžeme v  $(3, 3)$ -póle  $Y_k$  miesto hrany odstránenej na obrázku 2.4 odstrániť druhú hranu  $e$  z množiny  $D_n$ , čím by nám vznikol iný  $(3, 3)$ -pól. Vieme však, že pre každé dve hrany  $e_1, e_2 \in D_n$  existuje automorfizmus na Isaacsových snarkoch, ktorý zobrazí  $e_1$  do  $e_2$ . Izomorfné hrany majú rovnakú hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$ . Preto nám stačí dokázať tvrdenie o hodnote Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  len pre jednu hranu  $e$  z množiny  $D_n$ .

**Definícia 2.2.10** ( $(3, 3)$ -pól  $O$ ). Multipól, ktorý vznikne spojením dvoch  $(3, 3)$ -pólov  $Y_k Y_{k+1}$  a následným potlačením hrany  $e$  z množiny  $O_n$ , ktorá prislúcha obom pôvodným  $(3, 3)$ -pólom nazývame  $(3, 3)$ -pól  $O$  (pozri obrázok 2.5).

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $O$ . Možnosť, v ktorej sú všetky polhrany vstupného konektora zafarbené rovnakou farbou nebudeme rozoberať.

Obr. 2.5: (3, 3)-pól  $O$ 

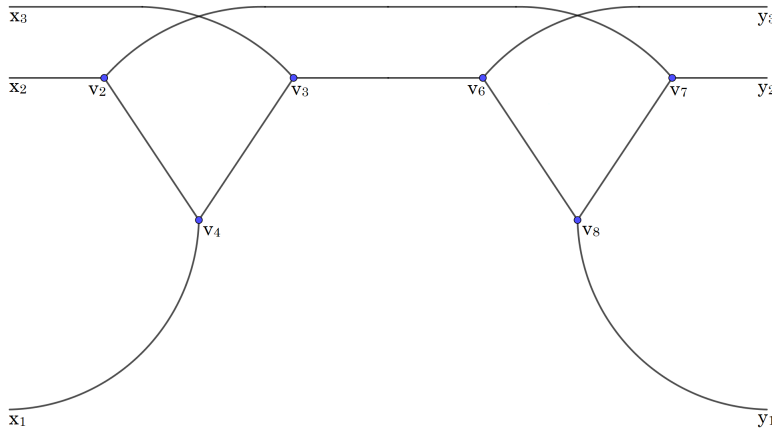
Stačí nám rozobrať možnosti, kedy je vstupný konektor zafarbený farbami  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$  alebo  $(1, 2, 3)$ . Všetky ostatné možné zafarbenia vstupného konektora potom vieme získať permutáciou farieb. Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.5.

- Zafarbenie vstupného konektora je  $(2, 1, 1)$ . Hrana  $y_1$  nemôže byť zafarbená farbou 1. Zo zafarbenia hrán  $x_1$  a  $x_2$  vyplýva, že hrana  $v_1v_4$  je zafarbená farbou 3. Potom hrana  $v_1v_5$  musí byť zafarbená farbou 1, a preto susedná hrana  $y_1$  nemôže byť zafarbená farbou 1. Ak zvolíme  $c(y_1) = 3$ , dostávame jednoznačné 3-farbenie (3, 3)-pólu  $O$ . Pre 3-farbenie  $c(y_3) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie (3, 3)-pólu  $O$  až keď určíme farbu hrane  $y_3$ , pričom zo zafarbenia vstupného konektora vyplýva  $c(y_3) \neq 3$ . Možné zafarbenia výstupného konektora pre dané zafarbenie vstupného konektora sú  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 2)$ .
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2, 1)$ . Pri danom zafarbení vstupného konektora musí byť hrana  $v_1v_4$  aj hrana  $v_3v_4$  zafarbená farbou 3. Preto pre dané zafarbenie vstupného konektora neexistuje 3-farbenie (3, 3)-pólu  $O$ .
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 1, 2)$ . Hrana  $y_1$  nemôže byť zafarbená farbou 3. Zo zafarbenia vstupného konektora vyplýva, že hrana  $v_3v_4$  je zafarbená farbou 3 a hrana  $v_1v_4$  farbou 2. Potom hrana  $v_1v_5$  musí byť zafarbená farbou 3, a preto hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 3. Ak  $c(y_1) = 1$ , dostávame jednoznačné 3-farbenie (3, 3)-pólu  $O$ . Pri možnosti  $c(y_1) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie až keď určíme farbu hrany  $y_3$ , pričom  $c(y_3) \neq 1$  nakoľko z daného zafarbenia vstupného konektora vyplýva, že susedná hrana  $v_3v_6$  musí byť zafarbená farbou 1. Možné zafarbenia výstupného konektora pre dané zafarbenie vstupného konektora sú  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, 3, 3)$ .

- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2, 3)$ . Z daného zafarbenia vstupného konektora priamo vyplýva, že hrana  $y_1$  nemôže byť zafarbená farbou 2, pretože musí platiť  $c(v_1v_4) = 3$  a  $c(v_1v_5) = 2$ . Po zafarbení hrany  $y_1$  farbou 1 alebo 3 dostávame jednoznačné zafarbenie  $(3, 3)$ -pólu  $O$ . Možné zafarbenia výstupného konektora sú  $(1, 2, 3)$  a  $(3, 2, 1)$ .

*Poznámka 2.2.11.* Rovnako ako pri potlačení hrany  $e$  z množiny  $D_n$ , aj v tomto prípade sa nám stačí zaoberať jednou z dvoch možných potlačených hrán  $e_1, e_2$  z množiny  $O_n$ , pretože existuje automorfizmus na Isaacsových snarkoch, ktorý zobrazí hranu  $e_1$  do  $e_2$ .

**Definícia 2.2.12** ( $(3, 3)$ -pól  $I$ ). Multipól, ktorý vznikne spojením dvoch  $(3, 3)$ -pólov  $Y_k Y_{k+1}$  a následným potlačením hrany  $e$  z množiny  $I_n$ , ktorá prislúcha obom pôvodným  $(3, 3)$ -pólom nazývame  $(3, 3)$ -pól  $I$  (pozri obrázok 2.6).



Obr. 2.6:  $(3, 3)$ -pól  $I$

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(3, 3)$ -pólu  $I$ . Možnosť, v ktorej sú všetky polhrany vstupného konektora zafarbené rovnakou farbou nebudeme rozoberať.

Stačí nám rozobrať možnosti, kedy je vstupný konektor zafarbený farbami  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$  alebo  $(1, 2, 3)$ . Všetky ostatné možné zafarbenia vstupného konektora vieme získať permutáciou farieb. Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.6.

- Zafarbenie vstupného konektora je  $(2, 1, 1)$ . Pri danom zafarbení vstupného konektora musí byť hrana  $v_2v_4$  aj hrana  $v_3v_4$  zafarbená farbou 3. Preto pre dané zafarbenie vstupného konektora neexistuje 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $I$ .
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2, 1)$ . Hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 1. Zo zafarbenia hrán  $x_1$  a  $x_2$  vyplýva, že hrana  $v_2v_4$  je zafarbená farbou 3. Potom hrana  $v_2v_7$  musí byť zafarbená farbou 1, a preto susedná hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 1. Ak zvolíme  $c(y_2) = 3$ , dostávame jednoznačné



3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $I$ . Ak zafarbíme hranu  $y_2$  farbou  $c(y_2) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $I$  až keď určíme farbu hrane  $y_3$ , pričom zo zafarbenia vstupného konektora vyplýva  $c(y_3) \neq 3$ . Možné zafarbenia výstupného konektora pre dané zafarbenie vstupného konektora sú  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 2)$ .

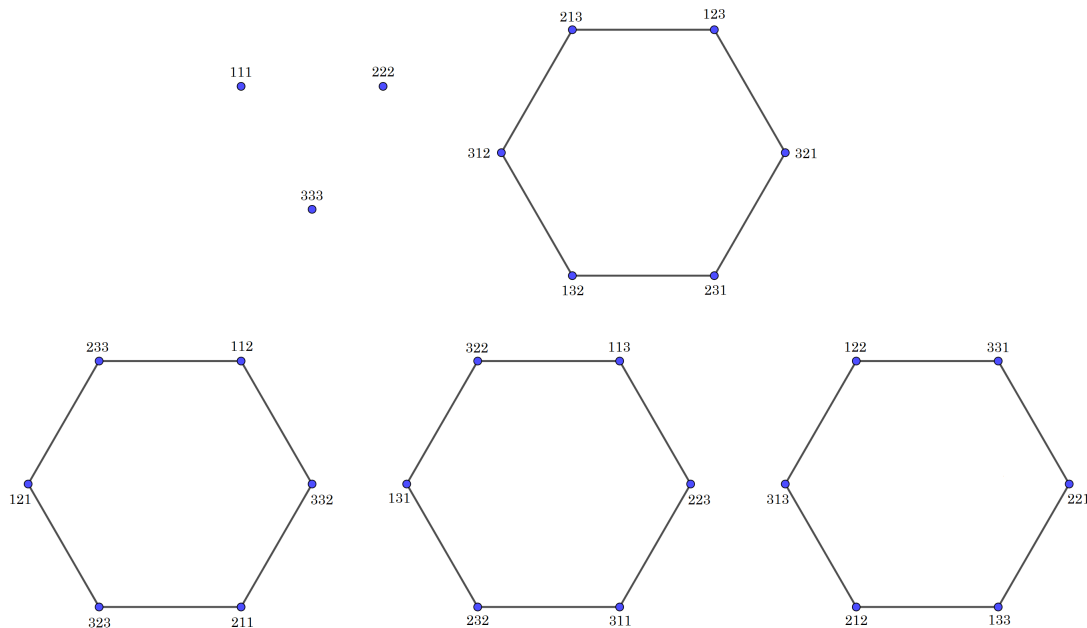
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 1, 2)$ . Hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 3. Zo zafarbenia vstupného konektora vyplýva, že hrana  $v_3v_4$  je zafarbená farbou 3 a hrana  $v_2v_4$  farbou 2. Potom hrana  $v_2v_7$  musí byť zafarbená farbou 3, a preto hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 3. Ak  $c(y_2) = 1$ , dostávame jednoznačné zafarbenie  $(3, 3)$ -pólu  $I$ . Pri možnosti  $c(y_2) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie až keď určíme farbu hrany  $y_3$ , pričom  $c(y_3) \neq 1$  nakoľko z daného zafarbenia vstupného konektora vieme, že susedná hrana  $v_3v_6$  musí byť zafarbená farbou 1. Možné zafarbenia výstupného konektora pre dané zafarbenie vstupného konektora sú  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 3)$ .
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2, 3)$ . Z daného zafarbenia vstupného konektora priamo vyplýva, že hrana  $y_2$  nemôže byť zafarbená farbou 1, pretože musí platiť  $c(v_2v_4) = 3$  a  $c(v_2v_7) = 1$ . Pre zafarbenie hrany  $y_2$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(3, 3)$ -pólu  $I$ . Možné zafarbenia výstupného konektora sú  $(1, 3, 2)$  a  $(1, 2, 3)$ .

*Poznámka 2.2.13.* Každý zo štyroch vyššie spomenuté  $(3, 3)$ -pólov  $C$ ,  $D$ ,  $O$ ,  $I$  nazývame aj spoločným názvom ako  $(3, 3)$ -pól po potlačení hrany  $e$ .

Pozrime sa teraz na graf prechodov Isaacsovho  $(3, 3)$ -pólu a na graf prechodov jednotlivých  $(3, 3)$ -pólov po potlačení hrany  $e$ . Grafy prechodov budeme následne využívať v samotnom dôkaze tvrdenia o hodnotách Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  hrán Isaacsových snarkov.

Keďže už poznáme možné 3-farbenia Isaacsovho  $(3, 3)$ -pólu, vieme ľahko skonštruovať jemu prislúchajúci graf prechodu (pozri obrázok 2.7). Na obrázku grafu prechodov každý vrchol reprezentuje zafarbenie jedného vstupného konektora  $S_1$ . Medzi vrcholom  $v_1 = xyz$  a  $v_2 = abc$  existuje hrana práve vtedy, keď existuje 3-farbenie  $c$   $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$  také, že vstupný konektor  $S_1$  má zafarbenie  $c(S_1) = (x, y, z)$  a výstupný konektor  $S_2$  má zafarbenie  $c(S_2) = (a, b, c)$ . Kvôli prehľadnosti sme sa rozhodli na obrázku každé dve orientované hrany  $uv$ ,  $vu$  nahradiť jednoduchou neorientovanou hranou  $uv$ .

*Poznámka 2.2.14.* Graf prechodu na Isaacsovom  $(3, 3)$ -póle sa skladá zo siedmich komponentov. Obsahuje tri izolované vrcholy  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 3)$  a štyri neorientované 6-cykly. Z toho jeden 6-cyklus je jedinečný v zmysle, že nevieme žiaden iný 6-cyklus naň zobrazíť vhodnou substitúciou farieb. Každý zo zvyšných troch 6-cyklov je možné zobrazíť na zvyšné dva 6-cykly vhodnou substitúciou farieb (pozri obrázok 2.7).

Obr. 2.7: Graf prechodu na Isaacsovom  $(3, 3)$ -póle

V dôkaze tvrdenia o hodnotách Kászonyiho funkcie pre hrany Isaacsových snarkov budeme tiež používať rozšírený graf prechodov na dvoch  $(3, 3)$ -póloch. Jedným bude vždy Isaacsov  $(3, 3)$ -pól a druhým bude niektorý zo štyroch  $(3, 3)$ -pólov po potlačení hrany  $e$ . Nakoľko jeden z  $(3, 3)$ -pólov je vždy daný, budeme tieto rozšírené grafy prechodov zjednodušene nazývať ako rozšírený graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$ ,  $D$ ,  $O$  alebo  $I$ .

Na jednotlivé rozšírené grafy prechodov na  $(3, 3)$ -póle  $C$ ,  $D$ ,  $O$ ,  $I$  sa pozrieme poriadnejšie až v samotnom dôkaze tvrdenia, ktoré tu teraz uvedieme.

**Tvrdenie 2.2.15.** *V každom grafe  $J_n$  z triedy Isaacsových snarkov platia nasledovné vzťahy:*

$$(i) \quad c_n = 2^{n-1} + 2,$$

$$(ii) \quad d_n = c_n - 3,$$

$$(iii) \quad o_n = \frac{1}{2}c_n,$$

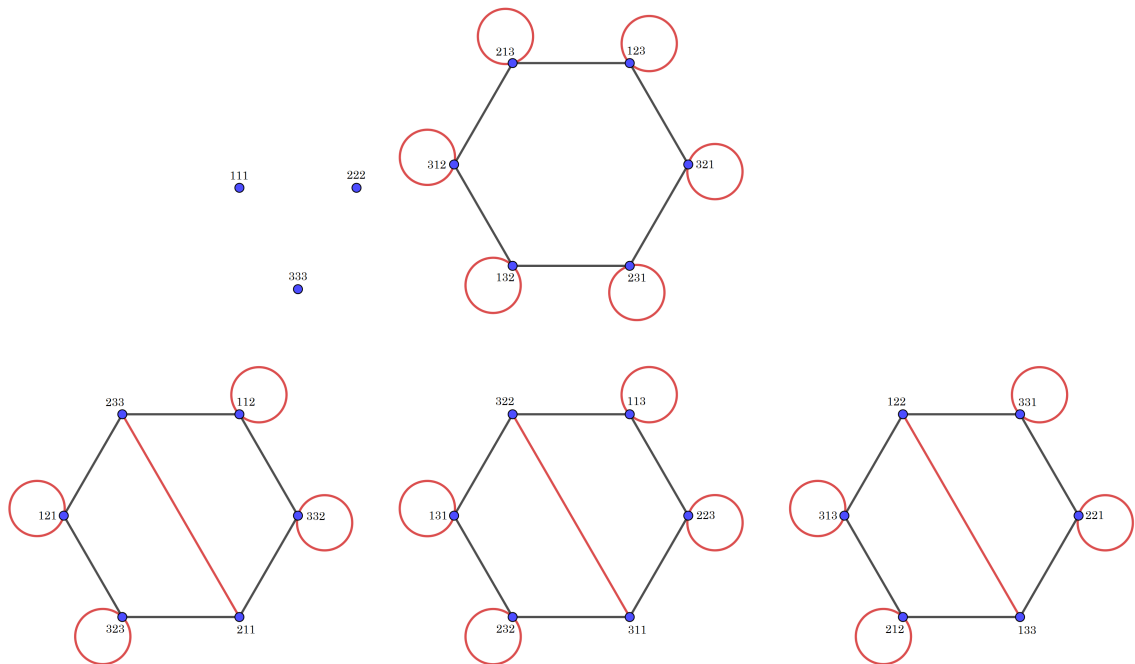
$$(iv) \quad i_n = o_n - 3.$$

*Dôkaz.* Myšlienku dôkazu ukážeme na dôkaze vzťahu (i)  $c_n = 2^{n-1} + 2$ . Postup pri dôkaze zvyšných troch vzťahoch je v mnohých častiach analogický.

Môžeme si všimnúť, že po potlačení hrany  $e$  z množiny  $C_n$  Isaacsovho snarku  $J_n$  vznikne graf, ktorý je izomorfný s grafom, ktorý vznikne cyklickým spojením jedného  $(3, 3)$ -pólu  $C$  a  $n - 1$   $(3, 3)$ -pólov  $Y_k$ .

Označme si  $(3, 3)$ -pól  $C$  ako  $Y_0$  a  $(3, 3)$ -póly, ktoré postupne spájame (spolu s  $Y_0$ ) ako  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ . Potom platí, že ak priradíme výstupnému konektoru  $(3, 3)$ -pólu  $Y_i$  nejaké zafarbenie  $c(S) = (c(e_1), c(e_2), c(e_3))$ , tak rovnaké zafarbenie  $c(S)$  bude prislúchať vstupnému konektoru  $(3, 3)$ -pólu  $Y_{i+1}$ . Vieme, že Isaacsov  $(3, 3)$ -pól nie je možné zafarbiť tromi farbami, ak zafarbíme jeho vstupný alebo výstupný konektor jednou farbou. Potom ale pri skúmaní všetkých možných 3-farbení Isaacsovho snarku nemá význam uvažovať zafarbenie vstupného (výstupného) konektoru  $S$   $(3, 3)$ -pólu  $C$  jednou farbou, lebo je to súčasne aj zafarbenie výstupného (vstupného) konektoru nejakého predchádzajúceho (nasledujúceho)  $(3, 3)$ -pólu  $Y_k$ . Preto si môžeme kvôli prehľadnosti dovoliť v grafe prechodu  $(3, 3)$ -pólu  $C$  vynechať hrany incidentné s jedným z vrcholov  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 3)$ .

Nahliadnutím na rozšírený graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$  si môžeme všimnúť, že prechod po danom grafe simuluje nejaké hranové 3-farbenie na  $(3, 3)$ -póloch. Presnejšie, každý sled na rozšírenom grafe prechodu dĺžky  $2n + 1$ , ktorý končí v tom istom vrchole, v akom začína a prejde práve raz cez jednu hranu z množiny hrán grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$  reprezentuje nejaké hranové 3-farbenie na Isaacsovom snarku  $J_n$  po potlačení hrany  $e$  z množiny  $C_n$  (pozri obrázok 2.8).



Obr. 2.8: Rozšírený graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$ . Hrany patriace grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$  sú na obrázku označené červenou farbou.

Úlohu nájdenia všetkých hranových 3-farbení na Isaacsovom snarku  $J_n$  po potlačení hrany  $e$  z množiny  $C_n$  môžeme previesť na úlohu nájdenia všetkých sledov dĺžky  $2n + 1$  na rozšírenom grafe prechodu  $(3, 3)$ -pólu  $C$  takých, že končia v tom istom vrchole, v akom začínajú a prechádzajú práve raz cez práve jednu „červenú“ hranu z množiny

hrán grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$ . Dva sledy považujeme za rovnaké, ak jeden vznikne pootočením druhého.

Z možných 3-farbení  $(3, 3)$ -pólu  $C$  vyplýva, že graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$  obsahuje len slučky a *diagonálne hrany*  $(233, 211)$ ,  $(322, 311)$ ,  $(122, 133)$ .

Diagonálnu hranu na grafe prechodu nemá zmysel pri počítaní všetkých možných 3-farbení na Isaacsovom snarku  $J_n$  uvažovať. Ak by sme sa bez ujmy na všeobecnosti rozhodli začať sled vo vrchole 233 a pokračovať diagonálnou hranou  $(233, 211)$ , tak by sme sa dostali do vrcholu 211. Potom by sme sa museli na  $2n$  krokov vrátiť z vrcholu 211 do vrcholu 233 použitím len hrán zo základného grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle. To však nie je možné, pretože vzdialenosť medzi vrcholmi 233 a 211 v 6-cykle je nepárna.

Takým istým spôsobom môžeme nahliadnuť, že pri výpočte hodnoty Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  má zmysel slučky uvažovať, pretože na 6-cykle existujú sledy dĺžky  $2n$ , ktoré začínajú a končia v tom istom vrchole. Na výpočet počtu týchto sledov využijeme *maticu susednosti* grafu prechodov na  $(3, 3)$ -póle  $Y_k$ .

Orientovaný graf vieme zapísať pomocou *matice susednosti*  $A$ . Môžeme nahliadnuť, že hodnota  $a_{ij}$  v matici  $A^k$  reprezentuje počet sledov dĺžky  $k$  z vrchola  $i$  do vrchola  $j$ . Tento poznatok využijeme na vypočítanie hodnoty  $c_n$  pre každé  $n$ .

$$\text{Matica susednosti } A \text{ grafu prechodu na } (3, 3)\text{-póle } Y_k \text{ je } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

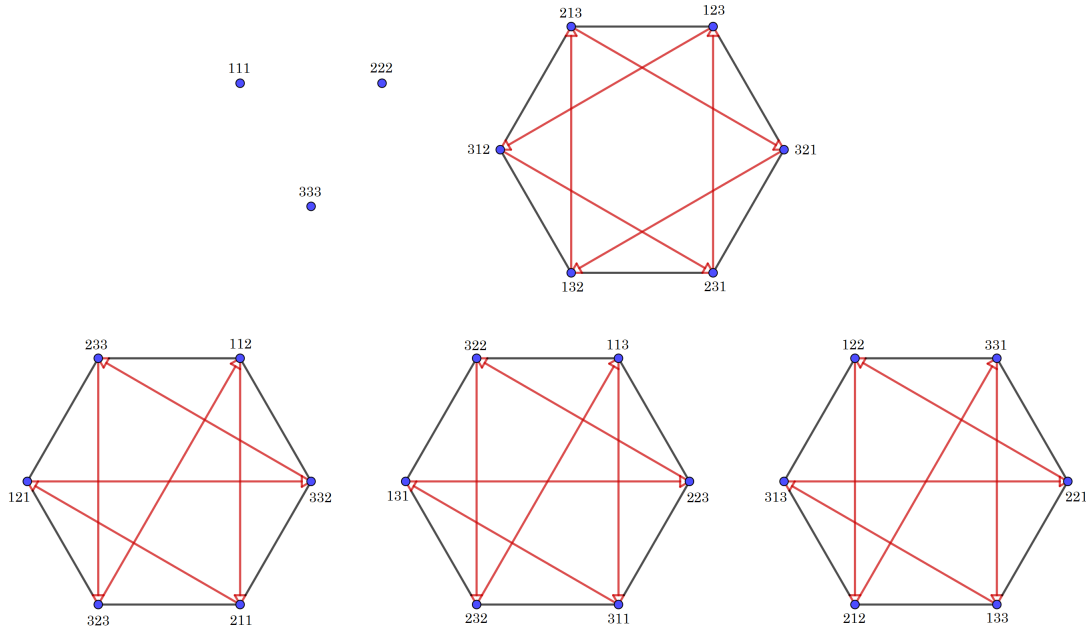
Z lemy 2.2.1 vyplýva, že matica  $A^{2n}$  má na diagonále prvky  $b_n = \frac{1}{3}(2^{2n} + 2)$ . Tie reprezentujú počet sledov na 6-cykle dĺžky  $2n$ , ktoré začínajú a končia v tom istom vrchole.

Rozšírený graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $C$  obsahuje práve 18 slučiek, z čoho vyplýva, že existuje  $18 \cdot \frac{1}{3}(2^{2n} + 2) = 6 \cdot (2^{2n} + 2)$  rôznych hranových 3-farbení po potlačení hrany  $e$  z množiny  $C_n$ , ak považujeme rôzne permutácie toho istého 3-farbenia za rôzne hranové 3-farbenia.

Nakoľko však rôzne permutácie toho istého 3-farbenia za rôzne 3-farbenia nepovažujeme, musíme ešte výslednú hodnotu predeliť počtom permutácií troch farieb, čo je  $3! = 6$ . Odtiaľ dostávame požadovaný vzťah  $c_n = 2^{n-1} + 2$ .

*Teraz dokážeme vzťah (ii).* Dôkaz vzťahu (ii)  $d_n = c_n - 3$  je myšlienkovy analogický k dôkazu vzťahu (i), preto sa pri dokazovaní zameriame len na to, čo je v dôkazoch rôzne. Veríme, že v prípade potreby na základe nižšie uvedených informácií a predošlého dôkazu si bude čitateľ schopný sám domyslieť detaily dôkazu.

Rovnako ako v dôkaze predošlého vzťahu nemá význam uvažovať zafarbenie vstupného (výstupného) konektoru  $(3, 3)$ -pólu  $D$  jednou farbou. Kvôli prehľadnosti si preto môžeme dovoliť v grafe prechodu  $(3, 3)$ -pólu  $D$  vynechať hrany incidentné s jedným z vrcholov  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 3)$ .



Obr. 2.9: Rozšírený graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $D$ . Orientované hrany na rozšírenom grafe prechodu  $(3, 3)$ -pólu  $D$ , ktoré nebolo možné nahradiť jednoduchou hranou sú na obrázku označené šípkou.

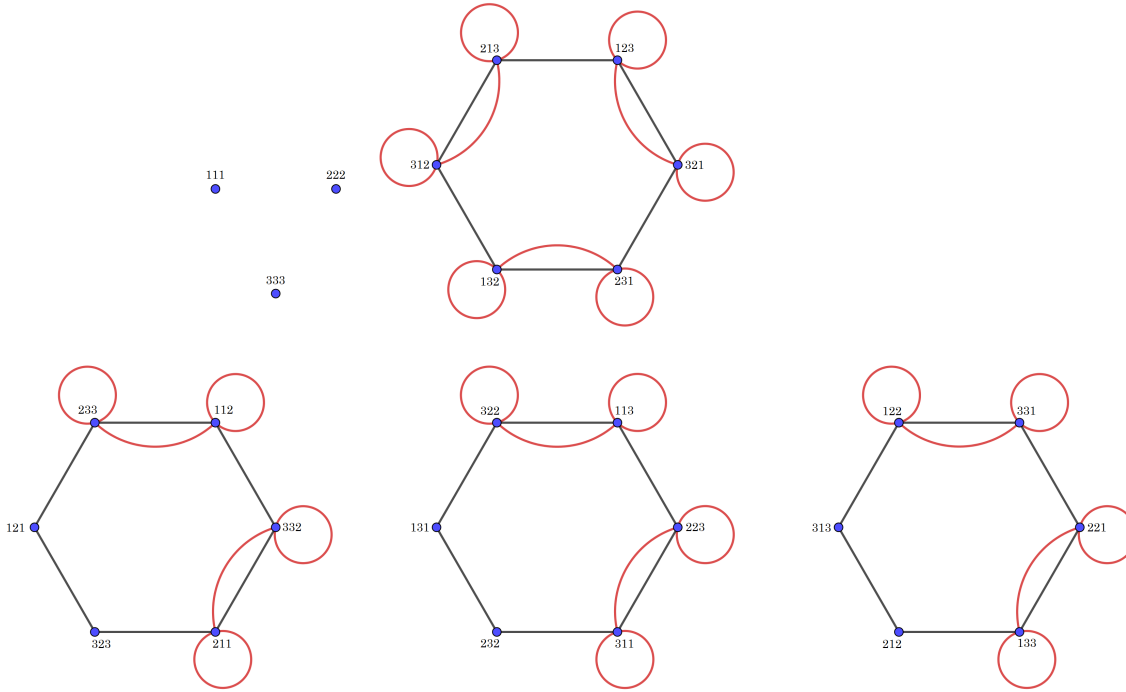
Z možných 3-farbení  $(3, 3)$ -pólu  $D$  vyplýva, že graf prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $D$  obsahuje dva typy hrán (pozri obrázok 2.9). *Diagonálne hrany* v tomto prípade chápeme ako orientované hrany  $(323, 112)$ ,  $(121, 332)$ ,  $(232, 113)$ ,  $(131, 223)$ ,  $(212, 331)$  a  $(313, 221)$ . Ako už z dôkazu (i) vieme, tieto hrany nemá zmysel uvažovať, nakoľko nevieme na 6-cykle vytvoriť sled dĺžky  $2n$  medzi dvoma vrcholmi, ktoré majú na 6-cykle nepárnu vzdialenosť. Tie hrany, ktoré nie sú diagonálne má zmysel pri dôkaze uvažovať, pretože spájajú vrcholy, ktoré majú na 6-cykle párnú vzdialenosť.

Matica susednosti  $A$  grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $Y_k$  je rovnaká ako v dôkaze predošlého vzťahu. Preto nám stačí s využitím lemy 2.2.1 nahliadnuť na tvar matice  $A^{2n}$ . Skúmaním jednotlivých vyhovujúcich „červených“ hrán z rozšíreného grafu prechodu na  $(3, 3)$ -póle  $D$  prideme na to, že vyhovujúcim sledom prislúchajú v matici prvky  $b_n - 1$ , pričom  $b_n = \frac{1}{3}(2^{2n} + 2)$ .

Rozšírený graf prechodu obsahuje 18 vyhovujúcich „červených“ hrán. Ak zoberieme do úvahy, že existuje 6 rôznych permutácií troch farieb, pričom každú z nich chceme započítať práve raz, dostaneme sa k číslu  $d_n = (2^{2n} + 2) - 3 = c_n - 3$ . Tým sme úspešne dokázali vzťah (ii)  $d_n = c_n - 3$ .

Teraz dokážeme vzťah (iii). Dôkaz vzťahu (iii)  $o_n = \frac{1}{2}c_n$  je myšlienково analogický k dôkazu (i), preto sa pri dokazovaní zameriame len na to, čo je v dôkazoch rôzne. Veríme, že v prípade potreby na základe nižšie uvedených informácií a predošlého dôkazu si bude čitateľ schopný sám domyslieť detaily dôkazu.

Rovnako ako v dôkaze predošlého vzťahu nemá význam uvažovať zafarbenie vstupného (výstupného) konektoru (3, 3)-pólu  $O$  jednou farbou. Kvôli prehľadnosti si preto môžeme dovoliť v grafe prechodu na (3, 3)-póle  $O$  vynechať hrany incidentné s jedným z vrcholov (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3).



Obr. 2.10: Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle  $O$ .

Z možných 3-farbení (3, 3)-pólu  $O$  vyplýva, že graf prechodu na (3, 3)-póle  $O$  obsahuje 2 typy hrán. Prvým typom sú jednoduché hrany medzi niektorými susednými vrcholmi 6-cyklu, druhým typom sú slučky (pozri obrázok 2.10).

Uvedomme si, že (3, 3)-pól  $O$  vznikol spojením dvoch (3, 3)-pólov  $Y_k, Y_{k+1}$ . Potom ale „červená“ hrana z množiny hrán grafu prechodu na (3, 3)-póle  $O$  reprezentuje dva z  $2n + 1$  (3, 3)-pólov Isaacsovhovho snarku  $J_n$ .

Preto nás pri dôkaze vzťahu (iii) zaujímajú sledy nepárnej dĺžky na 6-cykloch medzi vrcholmi, ktoré spája „červená“ hrana z množiny hrán grafu prechodu na (3, 3)-póle  $O$ . Slučky nemá zmysel uvažovať, pretože nie je možné skonštruovať na 6-cykloch sled nepárnej dĺžky, ktorý začína a končí v tom istom vrchole. Hrany medzi susednými vrcholmi 6-cyklu má zmysel uvažovať, pretože spájajú vrcholy, ktorých vzdialenosť na 6-cykloch je nepárna.

Matica susednosti  $A$  grafu prechodu na (3, 3)-póle  $Y_k$  ostáva rovnaká, preto nám

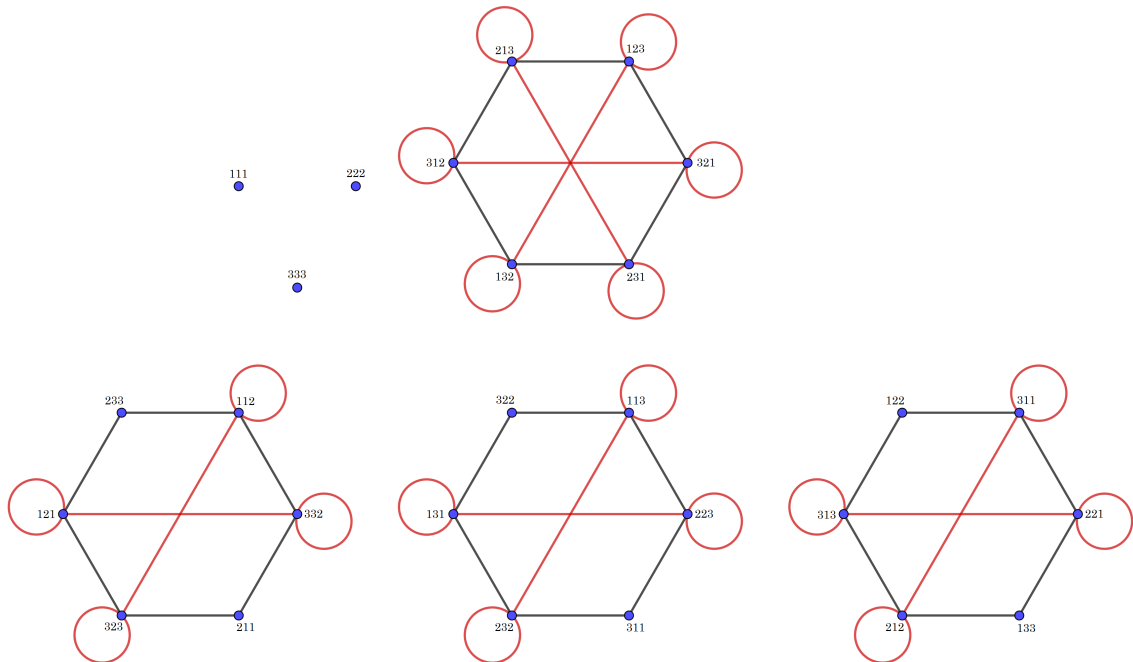
stačí s využitím lemy 2.2.1 nahliadnuť na tvar matice  $A^{2(n-1)+1}$ . Skúmaním jednotlivých vyhovujúcich „červených“ hrán z rozšíreného grafu prechodu prideme na to, že všetkým vyhovujúcim sledom prislúchajú v matici prvky  $a_{n-1}$ , pričom

$$a_{n-1} = \frac{1}{3}(2^{2(n-1)} + 1) = \frac{1}{3}(2^{2n-2} + 1).$$

Rozšírený graf prechodu obsahuje 9 vyhovujúcich „červených“ hrán, pričom ide o neorientované hrany. Preto ich musíme v našom výpočte zahrnúť 2-krát. Ak k tomu zoberieme ešte do úvahy, že existuje 6 rôznych permutácií troch farieb, pričom každú z nich chceme započítať práve raz, dospejeme ku vzťahu  $o_n = 2^{2n-2} + 1 = \frac{2^{2n-1} + 2}{2} = \frac{1}{2}c_n$ .

Teraz dokážeme vzťah (iv). Dôkaz vzťahu (iv)  $i_n = o_n - 3$  je myšlienkovito analogický k dôkazu (i), preto sa pri dokazovaní zameriame len na to, čo je v dôkazoch rôzne. Veríme, že v prípade potreby na základe nižšie uvedených informácií a predošlého dôkazu si bude čitateľ schopný sám domyslieť detaily dôkazu.

Rovnako ako v dôkaze predošlého vzťahu nemá význam uvažovať zafarbenie vstupného (výstupného) konektoru (3, 3)-pólu  $I$  jednou farbou. Kvôli prehľadnosti si preto môžeme dovoliť v grafe prechodu na (3, 3)-póle  $I$  vynechať hrany incidentné s jedným z vrcholov (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3).



Obr. 2.11: Rozšírený graf prechodu na (3, 3)-póle  $I$ .

Z možných 3-farbení (3, 3)-pólu  $I$  vyplýva, že graf prechodu na (3, 3)-póle  $I$  obsahuje dva typy hrán. Prvým typom sú jednoduché hrany medzi niektorými protíahlými vrcholmi 6-cyklu. Druhým typom sú slučky (pozri obrázok 2.11).

Rovnako ako pri dôkaze vzťahu (iii), aj teraz nás budú zaujímať sledy nepárnej dĺžky. Môžeme si všimnúť, že jediné vyhovujúce „červené“ hrany z množiny hrán grafu prechodu na (3, 3)-póle  $I$  sú tie medzi protiľahlými vrcholmi. Slučky zrejme nemá zmysel uvažovať.

Matica susednosti  $A$  grafu prechodu na (3, 3)-póle  $Y_k$  je rovnaká ako pri dôkaze predošlého vzťahu, preto nám stačí s využitím lemy 2.2.1 nahliadnuť na tvar matice  $A^{2(n-1)+1}$ . Skúmaním vyhovujúcich „červených“ diagonálnych hrán z rozšíreného grafu prechodu prideme na to, že všetkým vyhovujúcim sledom prislúchajú v matici prvky  $a_{n-1} - 1$ , pričom  $a_{n-1} = \frac{1}{3}(2^{2(n-1)} + 1) = \frac{1}{3}(2^{2n-2} + 1)$ .

Rozšírený graf prechodu obsahuje 9 vyhovujúcich „červených“ diagonálnych hrán, pričom ide o neorientované hrany. Preto ich musíme v našom výpočte zahrnúť 2-krát. Ak zoberieme do úvahy, že existuje 6 rôznych permutácií troch farieb, pričom každú z nich chceme započítať práve raz, dostaneme sa k číslu  $i_n = (2^{2n-2} + 1) - 3 = o_n - 3$ .  $\square$

## 2.3 Kászonyiho funkcia a zovšeobecnené Blanušove snarky

Ak neuvažujeme Petersenov graf, Blanušove snarky [3] sú dva najmenšie snarky. V tejto podkapitole budeme skúmať hodnoty Kászonyiho funkcie pre nekonečnú triedu zovšeobecnených Blanušových snarkov [12], ktorá vychádza práve z týchto dvoch grafov. Na úvod si zadefinujeme potrebné pojmy a nahliadneme na 3-farbenia pomocných (2, 2)-pólov, ktoré neskôr v samotnom dôkaze využijeme. Triedu zovšeobecnených Blanušových snarkov ako prvý skonštruoval J. Watkins vo svojej práci *Snarks* [16].

**Definícia 2.3.1** (Blanušov (2, 2)-pól). [16] Pod pojmom Blanušov (2, 2)-pól máme na mysli (2, 2)-pól  $B = (V_B, E_B)$  pričom množina vrcholov  $V_B = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  a hrany  $E_B = \{v_{i+1}v_{j+1} | i \in \mathbb{Z}_8, j = i + 1 \pmod{8}\} \cup \{v_2v_6, v_4v_8\} \cup \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ . Hrany  $x_1, x_2, y_1, y_2$  sú visiace hrany, postupne incidentné s vrcholmi  $v_1, v_3, v_7, v_5$ . Zvyšné hrany sú riadne (pozri obrázok 2.12).

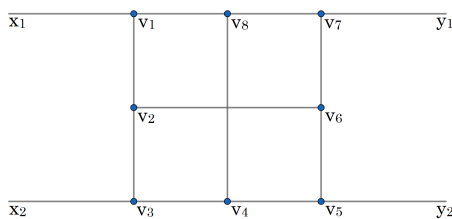
Vstupným konektorom  $S_1$  Blanušovho (2, 2)-pólu rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán  $S_1 = (x_1, x_2)$ .

Výstupným konektorom  $S_2$  Blanušovho (2, 2)-pólu zase rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán  $S_2 = (y_1, y_2)$ , pričom máme na mysli rovnomenné polhrany visiacich hrán označené ako  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .

*Poznámka 2.3.2.* Ak nebude ďalej v texte tejto kapitoly vyslovene povedané inak, (2, 2)-pólom budeme mať na mysli Blanušov (2, 2)-pól.

Skôr ako prejdeme k definícii samotnej triedy zovšeobecnených Blanušových snarkov pozrime sa na všetky možné 3-farbenia Blanušovho (2, 2)-pólu. Stačí nám rozo-





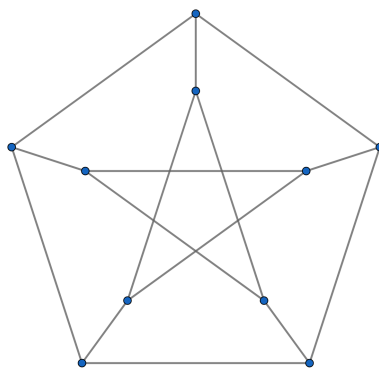
Obr. 2.12: Blaušov (2, 2)-pól

brať možnosti, kedy je vstupný konektor  $S_1$  zafarbený farbami  $c(S_1) = (1, 1)$  alebo  $c(S_1) = (1, 2)$ . Všetky ostatné zafarbenia vstupného konektora vieme získať permutáciou farieb. Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 2.12. Pred samotným skúmaním možných 3-farbení Blaušovho (2, 2)-pólu vyslovíme (bez dôkazu) jednu známu lemu, ktorá patrí k folklóru v tejto oblasti.

**Lema 2.3.3** (Paritná lema). *Nech  $G$  je kubický graf s  $n$  visiacimi hranami, ktorý je hranovo 3-zafarbený, pričom  $n_i$  polhrán je zafarbených farbou  $i$ .*

*Potom  $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv n \pmod{2}$ .*

**Definícia 2.3.4** (Petersenov graf). [9] Kubický graf s 10 vrcholmi, ktoré sú pospájané 15 riadnymi hranami podľa obrázka 2.13 nazývame Petersenovým grafom.



Obr. 2.13: Petersenov graf

Prejdime teraz k skúmaniu 3-farbení Blaušovho (2, 2)-pólu na základe zafarbenia vstupného konektora  $S_1$ .

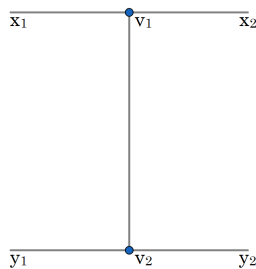
- Zafarbenie vstupného konektora je (1, 1). Zafarbením hrany  $v_1v_8$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie (2, 2)-pólu. V oboch prípadoch je výstupný konektor  $S_2$  zafarbený farbou  $c(S_2) = (1, 1)$ .
- Zafarbenie vstupného konektora je (1, 2). Z Paritnej lemy vieme, že pre zafarbenie výstupného konektora  $S_2$  platí buď  $c(S_2) = (1, 2)$  alebo  $c(S_2) = (2, 1)$ .

Sporom ukážeme, že platí  $c(S_2) = (2, 1)$ . Zoberme dva nové vrcholy  $v_9, v_{10}$  navzájom spojené hranou, Blanušov  $(2, 2)$ -pól a na vrchol  $v_9$  napojme visiace hrany  $x_1, y_2$ . Na vrchol  $v_{10}$  napojíme zase visiace hrany  $x_2, y_1$ . Môžeme nahliadnuť, že tým vznikol graf, ktorý je izomorfný s Petersenovým grafom (pozri obrázok 2.13). Ak existovalo také 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $B$ , že zafarbíme konektory  $S_1, S_2$  farbami  $c(S_1) = (1, 2), c(S_2) = (1, 2)$ , tak potom vieme zafarbiť hranu  $v_9v_{10}$  farbou 3, čím získame 3-farbenie Petersenovho grafu. To je ale spor, pretože je všeobecne známe, že Petersenov graf nie je hranavo 3-zafarbiteľný. Preto ak existuje 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu také, že  $c(S_1) = (1, 2)$ , musí pre dané 3-farbenie platiť  $c(S_2) = (2, 1)$ .

Dá sa ľahko nahliadnuť, že pre dané zafarbenie vstupného a výstupného konektoru  $(2, 2)$ -pólu existujú dve rôzne 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu, pretože ak zafarbíme hranu  $v_1v_8$  farbou 2 alebo 3 získavame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu.

Zadefinujme si ešte jeden pomocný  $(2, 2)$ -pól. Následne už budeme mať všetky definície potrebné na zadefinovanie zovšeobecného Blanušovho snarku.

**Definícia 2.3.5** ( $(2, 2)$ -pól  $I$ ). Multipól s dvoma vrcholmi  $v_1, v_2$ , ktoré sú spojené hranou nazývame  $(2, 2)$ -pól  $I$ . Každý vrchol  $(2, 2)$ -pólu  $I$  je súčasne incidentný s dvomi visiacimi hranami. Nech vrchol  $v_1$  je incidentný s visiacimi hranami  $x_1, y_1$  a vrchol  $v_2$  je incidentný s visiacimi hranami  $x_2, y_2$ . *Vstupným* konektorom  $(2, 2)$ -pólu  $I$  rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán  $x_1, x_2$ . *Výstupným* konektorom  $(2, 2)$ -pólu  $I$  zase rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán  $y_1, y_2$ , pričom máme na mysli rovnomenné polhrany visiacich hrán, ktoré sú na obrázku 2.14 označené ako  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .



Obr. 2.14:  $(2, 2)$ -pól  $I$

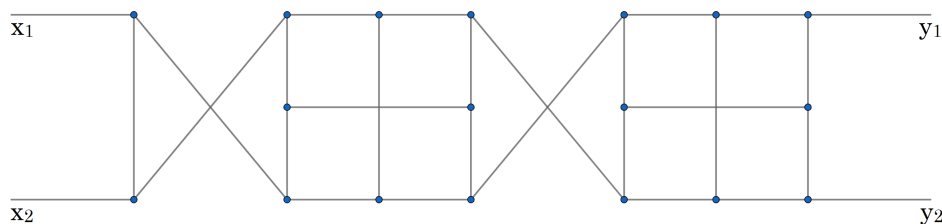
Pozrime sa teraz na možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $I$ . Stačí nám rozobrať možnosti, kedy je vstupný konektor  $S_1$  zafarbený farbami  $c(S_1) = (1, 1)$  alebo  $c(S_1) = (1, 2)$ . Všetky ostatné zafarbenia vstupného konektoru sa dajú získať permutáciou farieb.

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 1)$ . Môžeme nahliadnuť, že v danom prípade existujú dve možnosti ako zafarbiť výstupný konektor. Jednou možnosťou je zafarbenie  $c(S_2) = (2, 2)$  a druhou  $c(S_2) = (3, 3)$ .

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 2)$ . Rovno dostávame jednoznačné zafarbenie výstupného konektora  $c(S_2) = (2, 1)$ .

**Definícia 2.3.6** (Zovšeobecnený Blanušov snark). [12] Kubický graf  $\tilde{B}_k$ , ktorý vznikne ako uzáver asymetrického súčinu  $(2, 2)$ -pólov  $I \otimes B^k$ , pričom  $(2, 2)$ -pól  $B^k$  je  $k$ -ta asymetrická mocnina Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu nazývame zovšeobecnený Blanušov snark (pozri obrázok 2.15).

Hrany zovšeobecneného Blanušovho snarku, ktoré vznikli spojením visiacych hrán medzi dvomi Blanušovými  $(2, 2)$ -pólmi nazývame *spájajúce hrany*.



Obr. 2.15: Zovšeobecnený Blanušov snark

*Poznámka 2.3.7.* Obrázok 2.15 symbolizuje postupnú tvorbu zovšeobecneného Blanušovho snarku.

Spojením visiacych hrán  $x_1$  s  $y_1$  a  $x_2$  s  $y_2$  (pozri obrázok 2.15) získame zovšeobecnený Blanušov snark  $\tilde{B}_2$ . Rovnako tiež môžeme pokračovať v tvorbe zovšeobecneného Blanušovho snarku s vyšším indexom tak, že  $(2, 2)$ -pól na obrázku asymetricky vynásobíme (sprava) s Blanušovým  $(2, 2)$ -pólom.

*Poznámka 2.3.8.* Môžeme nahliadnuť, že zovšeobecnený Blanušov snark  $\tilde{B}_1$  je izomorfný s Petersenovým grafom (pozri obrázok 2.13).

**Definícia 2.3.9** (Trieda zovšeobecnených Blanušových snarkov). Trieda zovšeobecnených Blanušových snarkov je množina všetkých zovšeobecnených Blanušových snarkov.

Uvedieme teraz lemu, ktorej dôkaz priamo vyplýva z rozboru možných 3-farbení Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B$  a z definície asymetrického súčinu  $(2, 2)$ -pólov. Túto lemu prvýkrát vyslovil a dokázal J. Mázak vo svojom článku *Circular chromatic index of type 1 blanúša snarks* [12].

**Lema 2.3.10.** [12] *Pre každú (nie nutne rôznu) dvojicu farieb  $a, b$  a každé 3-farbenie  $c$   $(2, 2)$ -pólu  $B^k = B \otimes B \otimes \dots \otimes B$  platí pre dané konektory  $S_1, S_2$   $(2, 2)$ -pólu  $B^k$ :  $c(S_1) = (a, b)$  práve vtedy, keď  $c(S_2) = (b, a)$ .*

*Poznámka 2.3.11.* Môžeme si všimnúť, že táto lema nám okrem iného hovorí, že zafarbenie konektorov každého Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B_i$  vrámci  $(2, 2)$ -pólu  $B^k$  je jednoznačne určené zafarbením vstupného konektora prvého  $(2, 2)$ -pólu  $B_1$ .

**Dôsledok 2.3.12.** *Z predchádzajúcej lemy, z možných 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $I$  a z konštrukcie zovšeobecneného Blanušovho snarku  $\tilde{B}_k$  vyplýva, že graf  $\tilde{B}_k$  je 3-nezafarbiteľný.*

Zadefinujeme si teraz dve modifikácie zovšeobecneného Blanušovho snarku a vyslovíme nutnú podmienku na 3-zafarbiteľnosť týchto grafov. Tieto modifikácie neskôr využijeme pri dôkaze hodnôt Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre zovšeobecnené Blanušove snarky.

**Definícia 2.3.13** (Modifikovaný Blanušov graf (bez  $I$ )). Nech  $\beta_k$  je  $(2, 2)$ -pól, ktorý vznikne operáciou asymetrického súčinu  $(2, 2)$ -pólov  $I \otimes B^i \otimes M \otimes B^j$ ;  $i, j \geq 0$ , pričom  $B^x$  je  $x$ -tá asymetrická mocnina Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu a  $M$  je ľubovoľný  $(2, 2)$ -pól. Potom graf, ktorý vznikne ako uzáver  $(2, 2)$ -pólu  $\beta_k$  nazývame *modifikovaný Blanušov graf*.

Nech  $\beta'_k$  je  $(2, 2)$ -pól taký, že  $\beta'_k = B^i \otimes M \otimes B^j$ ;  $i, j \geq 0$ , ktorý má konektory  $S'_1 = (x_1, x_2)$  a  $S'_2 = (y_1, y_2)$ . *Modifikovaný Blanušov graf bez  $I$*  vznikne tak, že polhrany  $x_1, x_2$  konektoru  $S'_1$  postupne spojíme s polhranami  $y_2, y_1$  konektoru  $S'_2$ .

U oboch grafov  $(2, 2)$ -pól  $M$  nazývame *modifikovaný*.

*Poznámka 2.3.14.* Všimnime si, že spájanie polhrán konektorov pri konštrukcii modifikovaného Blanušovho grafu bez  $I$  je iné, ako pri konštrukcii modifikovaného Blanušovho grafu. Má to svoj význam, ktorý uvidíme neskôr pri dôkaze samotného tvrdenia o hodnotách Kászonyiho funkcie pre hrany zovšeobecnených Blanušových grafov.

Dá sa ľahko ukázať, že existujú také modifikované  $(2, 2)$ -póly, ktoré keď použijeme pri konštrukcii modifikovaného Blanušovho grafu (bez  $I$ ), tak nám vznikne 3-zafarbiteľný kubický graf. Preto modifikovaný Blanušov graf vo všeobecnosti nie je snark.

Teraz vyslovíme a dokážeme nutnú podmienku pre *modifikovaný*  $(2, 2)$ -pól  $M$ , aby modifikovaný Blanušov graf (bez  $I$ ) mohol byť 3-zafarbiteľný.

**Lema 2.3.15.** *Nech  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf. Potom v každom hranovom 3-farbení  $c$  grafu  $B_k$  sú konektory  $S_1, S_2$  modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$  zafarbené buď  $c(S_1) = (a, a)$ ,  $c(S_2) = (b, b)$ , alebo  $c(S_1) = c(S_2) = (a, b)$  pričom v oboch prípadoch pre farby  $a, b$  platí  $a \neq b$ .*

*Dôkaz.* „Vráťme sa o krok späť“ a zoberme si  $(2, 2)$ -pól  $\beta_k = I \otimes B^i \otimes M \otimes B^j$ , z ktorého vznikol graf  $B_k$ . Z konštrukcie  $B_k$  vyplýva, že je 3-zafarbiteľný práve vtedy, keď existuje 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $\beta_k$  také, že  $c(S_1) = c(S_2)$ .

Z lemy 2.3.10 a napojenia modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$  na  $(2, 2)$ -póly  $B^i, B^j$  vyplýva, že vstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $B^i$  má rovnaké zafarbenie ako vstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $M$  a výstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $M$  má zase rovnaké zafarbenie ako výstupný konektor  $(2, 2)$ -pólu  $B^j$ . Preto nám stačí skúmať 3-zafarbiteľnosť  $(2, 2)$ -pólu  $I \otimes M$  za rovnakých podmienok.

V  $(2, 2)$ -póle  $I \otimes M$  vieme stále určiť konektory prislúchajúce pôvodne  $(2, 2)$ -pólom  $I$ ,  $M$ . Označme si konektory  $(2, 2)$ -pólu  $I$  ako  $S_1$ ,  $S_2$  a konektory  $(2, 2)$ -pólu  $M$  ako  $S_3$ ,  $S_4$ . Rozoberme teraz obe prípustné možnosti zafarbenia vstupného konektoru  $S_1$ .

- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b)$ ,  $a \neq b$ . Potom konektor  $S_2$  je zafarbený farbami  $c(S_2) = (b, a)$  a konektor  $S_3$  farbami  $c(S_3) = (a, b)$ . Konektor  $S_4$  musí byť zafarbený rovnako ako konektor  $S_1$ .
- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbou  $c(S_1) = (a, a)$ . Konektor  $S_4$  musí byť zafarbený rovnako ako konektor  $S_1$ . Potom konektory  $S_2$ ,  $S_3$  sú zafarbené farbami  $c(S_2) = c(S_3) = (b, b)$ , pričom  $a \neq b$ .

Z rozboru možných 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $I \otimes M$  priamo vyplýva daná lema.  $\square$

**Lema 2.3.16.** *Nech  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf bez  $I$ . Potom v každom hránovom 3-farbení  $c$  grafu  $B_k$  sú konektory  $S_1$ ,  $S_2$  modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$  zafarbené farbami  $c(S_1) = (a, b)$ ,  $c(S_2) = (b, a)$ . Farby  $a$ ,  $b$  sa môžu rovnáť.*

*Dôkaz.* Myšlienka dôkazu je analogická k myšlienke dôkazu predošlej lemy. Stačí si uvedomiť, že  $B_k$  je 3-zafarbitelný práve vtedy, keď existuje 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $\beta'_k = B^i \otimes M \otimes B^j$  také, že  $c(S_1) = (a, b)$  práve vtedy, keď  $c(S_2) = (b, a)$ . Keďže v  $\beta_k$  musí platiť  $c(S_1) = (a, b) \iff c(S_2) = (b, a)$ , potom z lemy 2.3.10 vyplýva, že to isté musí platiť aj o zafarbení konektorov modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$ .  $\square$

Teraz vyslovíme jednu lemu, ktorá dáva do súvisu počet 3-farbení modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$  a modifikovaného Blanušovho grafu (bez  $I$ ).

**Lema 2.3.17.** *Nech  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf (bez  $I$ ), ktorý obsahuje modifikovaný  $(2, 2)$ -pól  $M$ . Nech existuje  $m$  rôznych 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $M$  takých, že spĺňajú nutnú podmienku z lemy 2.3.15 a nech existuje  $n$  rôznych 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $M$  takých, že spĺňajú nutnú podmienku z lemy 2.3.16. Neuvažujeme permutácie farieb. Potom má graf  $B_k$ :*

- $m \cdot 2^k$  rôznych 3-farbení, ak  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf,
- $n \cdot 2^k$  rôznych 3-farbení, ak  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf bez  $I$ .

*Dôkaz.* Dokážeme naraz pre modifikovaný Blanušov graf aj pre modifikovaný Blanušov graf bez  $I$ . Z Liem 2.3.15 a 2.3.16 vieme, že iné možnosti 3-farbenia modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$  ako tie uvedené v tejto leme nemá význam uvažovať. Modifikovaný Blanušov graf (bez  $I$ ) obsahuje jeden modifikovaný  $(2, 2)$ -pól  $M$  a  $k$  rôznych Blanušových  $(2, 2)$ -pólov. Vieme, že zafarbenie konektorov Blanušových  $(2, 2)$ -pólov v grafe  $B_k$  je

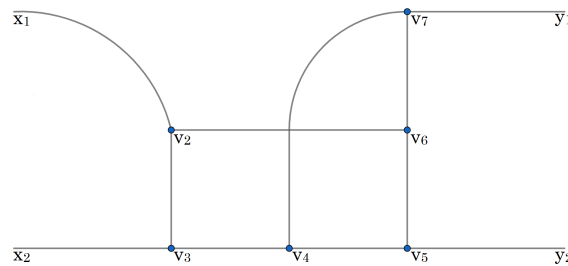
dané tým, ako zafarbíme konektory  $(2, 2)$ -pólu  $M$  (vyplýva to z lemy 2.3.10). Z rozboru možných 3-farbení Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B$  zase vieme, že ak má  $B$  „správne“<sup>1</sup> zafarbené konektory, tak potom existujú dve rôzne 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $B$ . Z lemy 2.3.10 a konštrukcie grafu  $B_k$  vyplýva, že 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $M$  jednoznačne určuje aj 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $I$  (ak ho graf  $B_k$  obsahuje).

Zafarbenie konektorov Blanušových  $(2, 2)$ -pólov je dané zafarbením modifikovaného  $(2, 2)$ -pólu  $M$ , avšak zafarbenie riadnych hrán každého Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B_i$  je *nezávislé* na tom, ako zafarbíme riadne hrany v ostatných  $(2, 2)$ -póloch. Preto existuje buď  $m \cdot 2^k$  alebo  $n \cdot 2^k$  rôznych 3-farbení grafu  $B_k$  v závislosti od toho, či graf  $B_k$  je modifikovaný Blanušov graf bez alebo s  $I$ .  $\square$

Nášim cieľom teraz bude rozobrať 3-farbenia na tých  $(2, 2)$ -póloch, ktoré vzniknú potlačením hrany na Blanušovom  $(2, 2)$ -póle, respektíve na grafe, ktorý vznikne spojením dvoch Blanušových  $(2, 2)$ -pólov alebo Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu a  $(2, 2)$ -pólu  $I$ . Nerozoberieme všetky možné 3-farbenia na týchto  $(2, 2)$ -póloch, ale len tie, ktoré spĺňajú nutnú podmienku z lemy 2.3.15 alebo 2.3.16. Niekedy rozoberieme zafarbenia konektorov podľa lemy 2.3.15 a inokedy zase podľa lemy 2.3.16 podľa toho, aký modifikovaný Blanušov graf s daným  $(2, 2)$ -pólom sa nám neskôr pri dôkaze tvrdenia o Kászonyiho hodnote  $\psi(e)$  pre zovšeobecnené Blanušove snarky hodí.

Následne ukážeme, že každý graf, ktorý vznikne z nejakého zovšeobecneného Blanušovho snarku potlačením hrany  $e$  je izomorfný s niektorým modifikovaným zovšeobecneným Blanušovým grafom (bez  $I$ ), ktorý ako modifikovaný  $(2, 2)$ -pól obsahuje jeden z nižšie uvedených  $(2, 2)$ -pólov.

**Definícia 2.3.18** ( $(2, 2)$ -pól  $A$ ). Multipól, ktorý vznikne z Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu po potlačení hrany  $v_1v_8$  nazývame  $(2, 2)$ -pól  $A$  (pozri obrázok 2.16).



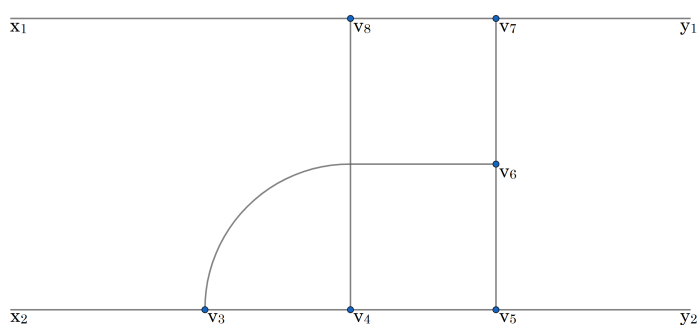
Obr. 2.16:  $(2, 2)$ -pól  $A$

Pozrime sa na všetky možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $A$  za podmienok z lemy 2.3.15. Neuvažujeme permutácie farieb.

<sup>1</sup>V zmysle, že existuje 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $B$  pri danom zafarbení konektorov.

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 1)$ . Zafarbením hrany  $v_6v_7$  farbou 2 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $A$ . Existujú preto v tomto prípade dve možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $A$ .
- Zafarbenie vstupného (a teda aj výstupného) konektoru je  $(1, 2)$ . Zo zafarbenia vstupného a výstupného konektora farbami  $c(S_1) = c(S_2) = (1, 2)$  dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $A$ . Existuje preto v tomto prípade jedna možnosť 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $A$ .

**Definícia 2.3.19** ( $(2, 2)$ -pól  $C$ ). Multipól, ktorý vznikne z Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu po potlačení hrany  $v_1v_2$  nazývame  $(2, 2)$ -pól  $C$  (pozri obrázok 2.17).



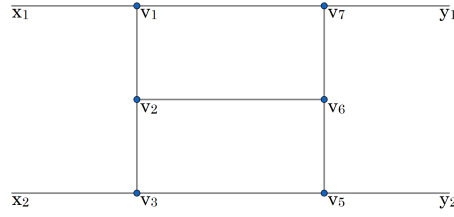
Obr. 2.17:  $(2, 2)$ -pól  $C$

Pozrime sa na všetky možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $C$  za podmienok z lemy 2.3.15. Neuvažujeme permutácie farieb.

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 1)$ . Z lemy 2.3.15 vyplýva, že výstupný konektor  $S_2$  je zafarbený jednou farbou inou ako 1, napríklad  $c(S_2) = (2, 2)$ . Zo zafarbenia konektorov farbami  $c(S_1) = (1, 1)$ ,  $c(S_2) = (2, 2)$  dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $C$ . Existuje preto v tomto prípade jedna možnosť 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $C$ .
- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 2)$ . Zafarbením hrany  $v_3v_6$  farbou 1 alebo 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $C$ . Existujú preto dve možnosti 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $C$ .

**Definícia 2.3.20** (v-rebrík). Multipól, ktorý vznikne z Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu po potlačení hrany  $v_8v_4$  nazývame v-rebrík (pozri obrázok 2.18).

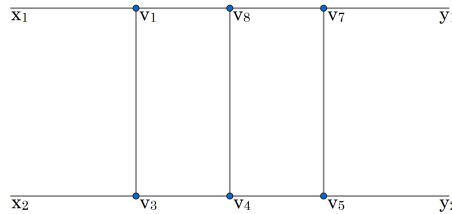
Názov  $(2, 2)$ -pólu v-rebrík je inšpirovaný vzhľadom samotného grafu – pripomína časť rebríku postaveného vo *vertikálnom* smere. Opäť sa pozrieme len na tie 3-farbenia, ktoré vyhovujú podmienkam z lemy 2.3.15. Neuvažujeme permutácie farieb.



Obr. 2.18: (2, 2)-pól v-rebrík

- Zafarbenie vstupného konektoru je (1, 1). Z lemy 2.3.15 vyplýva, že výstupný konektor  $S_2$  je zafarbený jednou farbou inou ako 1, napríklad  $c(S_2) = (2, 2)$ . (2, 2)-pól v-rebrík potom nemá v tomto prípade 3-farbenie, pretože zo zafarbenia konektorov vyplýva, že hrany  $v_1v_7$  aj  $v_3v_5$  sú zafarbené farbou 3. Potom ale hrany  $v_1v_2$  aj  $v_3v_2$  musia byť obe zafarbené farbou 2, čo je v spore s definíciou 3-farbenia.
- Zafarbenie vstupného konektoru je (1, 2). Hranu  $v_1v_7$  môžeme zafarbiť buď farbou 2, alebo 3. Ak  $c(v_1v_7) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie v-rebríka. Ak  $c(v_1v_7) = 3$  dostávame jednoznačné 3-farbenie až potom ako zafarbíme hranu  $v_2v_6$  pričom zo zafarbenia  $c(v_1v_7) = 3$  vyplýva, že  $c(v_2v_6) \neq 2$ . Existujú preto v tomto prípade tri možnosti 3-farbenia (2, 2)-pólu v-rebrík.

**Definícia 2.3.21** (h-rebrík). Multipól, ktorý vznikne z Blanušovho (2, 2)-pólu po potlačení hrany  $v_2v_6$  nazývame h-rebrík (pozri obrázok 2.19).



Obr. 2.19: (2, 2)-pól h-rebrík

Názov (2, 2)-pólu h-rebrík je inšpirovaný vzhľadom samotného grafu – pripomína časť rebríku ležiaceho na zemi v *horizontálnom* smere. Opäť sa pozrieme len na tie 3-farbenia, ktoré vyhovujú podmienkam z lemy 2.3.15. Neuvažujeme permutácie farieb.

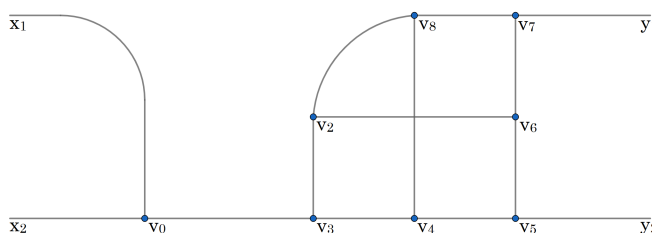
- Zafarbenie vstupného konektoru je (1, 1). Z lemy 2.3.15 vyplýva, že výstupný konektor  $S_2$  je zafarbený jednou farbou inou ako 1, napríklad  $c(S_2) = (2, 2)$ . Hranu  $v_1v_8$  môžeme zafarbiť buď farbou 2, alebo 3. Ak  $c(v_1v_8) = 3$  dostávame jednoznačné 3-farbenie h-rebríka. Ak  $c(v_1v_8) = 2$  dostávame jednoznačné 3-farbenie až potom ako zafarbíme hranu  $v_7v_8$  pričom zo zafarbenia  $c(v_1v_8) = 2$  vyplýva, že  $c(v_7v_8) \neq 2$ . Existujú preto v tomto prípade tri možnosti 3-farbenia (2, 2)-pólu h-rebrík.



- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2)$ . Pri danom zafarbení vstupného konektora nemá h-rebrík 3-farbenie, pretože zo zafarbenia konektorov vyplýva, že hrany  $v_1v_3$  aj  $v_5v_7$  sú zafarbené farbou 3. Potom ale hrany  $v_1v_8$  aj  $v_7v_8$  musia byť obe zafarbené farbou 2, čo je v spore s definíciou 3-farbenia. Preto v danom prípade neexistuje 3-farbenie h-rebríka.

*Poznámka 2.3.22.* Nahliadnime, že všetky štyri  $(2, 2)$ -póly  $A$ ,  $C$ , v-rebrík a h-rebrík majú tri rôzne 3-farbenia, ak neuvažujeme permutácie farieb a uvažujeme zafarbenie konektorov spĺňajúce podmienky z lemy 2.3.15. Tiež sa dá nahliadnuť, že každý  $(2, 2)$ -pól  $M$ , ktorý vznikne z Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu potlačením niektorej riadnej hrany  $e$  je izomorfný práve s jedným z týchto štyroch  $(2, 2)$ -pólov. Dohodnime sa preto, že každý  $(2, 2)$ -pól, ktorý je izomorfný s jedným zo štyroch vyššie spomenutých  $(2, 2)$ -pólov nazývame  $(2, 2)$ -pól po potlačení riadnej hrany.

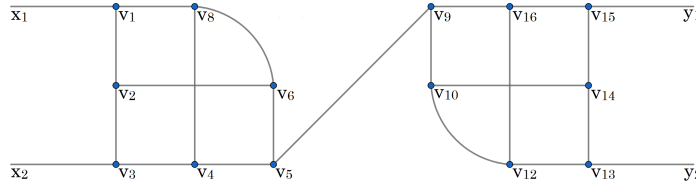
**Definícia 2.3.23** ( $(2, 2)$ -pól  $D$ ). Multipól, ktorý vznikne spojením  $(2, 2)$ -pólov  $IB$  a následným potlačením riadnej hrany, ktorá vznikla spojením  $(2, 2)$ -pólov nazývame  $(2, 2)$ -pól  $D$  (pozri obrázok 2.20).



Obr. 2.20:  $(2, 2)$ -pól  $D$

Pozrime sa na všetky možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $D$  za podmienok z lemy 2.3.16. Neuvažujeme permutácie farieb.

- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 1)$ . V tomto prípade  $(2, 2)$ -pól  $D$  nemá 3-farbenie, pretože vrchol  $v_0$  je incidentný s dvomi visiacimi hranami, ktoré sú zafarbené rovnakou farbou.
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2)$ . Potom zafarbenie výstupného konektora je  $c(S_2) = (2, 1)$ . Zafarbením hrany  $v_7v_8$  farbou 1 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $D$ . Ak zafarbíme hranu  $v_7v_8$  farbou 3 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu až potom, ako zafarbíme hranu  $v_2v_8$ , pričom hrana  $v_2v_8$  môže byť zafarbená už len farbou 1 alebo 2. Preto existujú v tomto prípade 3 možnosti 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $D$ .

Obr. 2.21:  $(2, 2)$ -pól  $E$ 

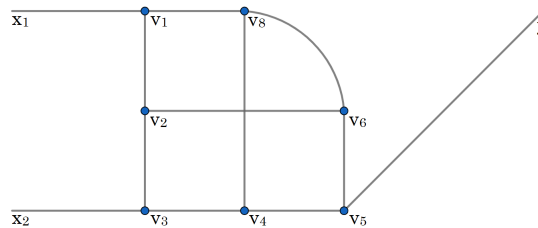
**Definícia 2.3.24** ( $(2, 2)$ -pól  $E$ ). Multipól, ktorý vznikne spojením dvoch Blanušových  $(2, 2)$ -pólov  $BB$  a následným potlačením hrany, ktorá vznikla spojením dvoch visiacych hrán nazývame  $(2, 2)$ -pól  $E$  (pozri obrázok 2.21).

3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $E$  nebudeme rozoberať priamo, ale pomôžeme si pomocným  $(2, 1)$ -pólom.

**Definícia 2.3.25** (Pomocný  $(2, 1)$ -pól). Graf, ktorý vznikne z Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu odobratím jednej visiacej hrany a následným vyhladením vrchola stupňa 2 nazývame pomocný  $(2, 1)$ -pól (pozri obrázok 2.22).

Vstupným konektorom  $S_1$  pomocného  $(2, 1)$ -pólu rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán  $x_1, x_2$  prislúchajúcich rovnomenným visiacych hranám, teda  $S_1 = (x_1, x_2)$ .

Výstupným konektorom  $S_2$  pomocného  $(2, 1)$ -pólu rozumieme polhranu patriacu zvyšnej visiacej hrane  $(2, 1)$ -pólu.  $S_2 = y$ .

Obr. 2.22: Pomocný  $(2, 1)$ -pól

*Poznámka 2.3.26.* Ak nebude ďalej v texte tejto kapitoly vyslovene povedané inak,  $(2, 1)$ -pólom budeme mať na mysli pomocný  $(2, 1)$ -pól.

Všimnime si, že ak zoberieme dva  $(2, 1)$ -póly a spojíme visiace hrany z ich výstupných konektorov vznikne  $(2, 2)$ -pól  $E$ . Tento poznatok využijeme pri skúmaní 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $E$ , pričom nás zaujímajú len 3-farbenia za podmienok z lemy 2.3.15.

**Lema 2.3.27.** *Existujú tri rôzne 3-farbenia  $(2, 1)$ -pólu také, že vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbou  $c(S_1) = (1, 2)$ . V každom z týchto 3-farbení je výstupný konektor  $S_2$  zafarbený farbou 3.*

Ďalej platí, že neexistuje také 3-farbenie  $(2, 1)$ -pólu, že obe hrany vstupného konektora  $S_1$   $(2, 1)$ -pólu sú zafarbené rovnakou farbou.

*Dôkaz.* Prvá časť lemy: hrana  $v_1v_8$  môže byť zafarbená farbou 2 alebo 3. Ak  $c(v_1v_8) = 2$ , dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 1)$ -pólu, pričom  $c(S_2) = 3$ . Ak zafarbíme hrana  $v_1v_8$  farbou 3 musí byť hrana  $v_3v_4$  tiež zafarbená farbou 3. Ukážeme sporom. Ak by sme zafarbili hrana  $v_3v_4$  farbou 1, tak potom z už zafarbených hrán jednoznačne vyplýva, že hrany  $v_6v_8$  a  $v_2v_6$  musíme zafarbiť farbou 1. To je ale v spore s definíciou 3-farbenia. Ak  $c(v_3v_4) = 3$ , potom hrana  $v_4v_5$  môžeme zafarbiť len farbami 1 alebo 2. V oboch prípadoch dostávame zafarbenie výstupného konektoru  $c(S_2) = 3$ .

Druhú časť tejto lemy je dôsledkom Paritnej lemy.  $\square$

Pozrime sa teraz na všetky možné 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $E$  za podmienok z lemy 2.3.15. Neuvažujme permutácie farieb.

- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 1)$ . Z predošlej lemy vieme, že  $(2, 2)$ -pól  $E$  je v tomto prípade 3-nezafarbiteľný, pretože vznikol spojením dvoch  $(2, 1)$ -pólov, a ak sú hrany vstupného konektoru  $(2, 1)$ -pólu zafarbené rovnakou farbou, tak nie je 3-zafarbiteľný. Preto je aj celý  $(2, 2)$ -pól  $E$  3-nezafarbiteľný.
- Zafarbenie vstupného konektoru je  $(1, 2)$ . Vieme, že  $(2, 2)$ -pól  $E$  sa skladá z dvoch pomocných  $(2, 1)$ -pólov. Z predošlej lemy vieme, že zafarbenie vstupného konektoru  $(2, 1)$ -pólu farbami  $c(S_1) = (1, 2)$  určuje zafarbenie výstupného konektoru  $c(S_2) = 3$ . Všetky vyhovujúce 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $E$  potom vieme získať ako druhú mocninu počtu 3-farbení  $(2, 1)$ -pólu za daných podmienok, pretože zafarbenie riadnych hrán jedného  $(2, 1)$ -pólu je nezávislé od zafarbenia druhého  $(2, 1)$ -pólu. Preto existuje v tomto prípade deväť rôznych 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $E$ .

Pripomeňme si, že *spájajúce hrany* zovšeobecného Blanušovho snarku sú tie, ktoré vznikli spojením visiaticich hrán medzi dvomi Blanušovými  $(2, 2)$ -pólmi.

**Tvrdenie 2.3.28.** *Pre každý zovšeobecný Blanušov snark  $\tilde{B}_n$  a pre ľubovoľnú hrana  $e \in E(\tilde{B}_n)$  platí, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  je nasledovná:*

- $\psi(e) = 9 \cdot 2^{n-2}$ , ak  $e$  je spájajúca hrana,
- $\psi(e) = 3 \cdot 2^{n-1}$  inak.

*Dôkaz.* Dôkaz vykonáme rozborom prípadov podľa toho, ktorú hrana potláčame.

Nech hrana  $e$  je *spájajúca* hrana medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $B_i$  a  $B_{i+1}$  zovšeobecného Blanušovho snarku  $\tilde{B}_n$ , pre ľubovoľné  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

Nahliadnime, že graf, ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  je izomorfný s modifikovaným Blanušovým grafom  $B_{n-2}$ , s modifikovaným  $(2, 2)$ -pólom  $E$  (pozri obrázok 2.21) takým, že vznikol z  $(2, 2)$ -pólu  $\beta_{n-2} = I \otimes B^{i-1} \otimes E \otimes B^{n-i-1}$ .

Vieme, že  $(2, 2)$ -pól  $E$  má deväť rôznych 3-farbení, ak neuvažujeme permutácie farieb a uvažujeme zafarbenie konektorov podľa lemy 2.3.15. Potom z lemy 2.3.17

o počte rôznych 3-farbení modifikovaného Blanušovho grafu vyplýva, že graf  $B_{n-2}$  má  $9 \cdot 2^{n-2}$  rôznych 3-farbení. Preto hodnota Kászonyiho funkcie je  $\psi(e) = 9 \cdot 2^{n-2}$ , ak  $e$  je spájajúca hrana zovšeobecneného Blanušovho snarku  $\tilde{B}_n$ .

Nech hrana  $e$  nie je spájajúca hrana. Potom zrejme hrana  $e$  je buď riadna hrana niektorého Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B_i$ , alebo riadna hrana  $(2, 2)$ -pólu  $I$  alebo hrana, ktorá vznikla spojením visiacych hrán medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $I$  a  $B_1$ , respektíve  $I$  a  $B_n$ . Rozoberieme každú z týchto troch možností samostatne.

- Hrana  $e$  je riadna hrana Blanušovho  $(2, 2)$ -pólu  $B_i$  zovšeobecneného Blanušovho snarku  $\tilde{B}_n$  pre ľubovoľné  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pripomeňme si, že potlačením ľubovoľnej riadnej hrany v Blanušovom  $(2, 2)$ -póle získame  $(2, 2)$ -pól po potlačení riadnej hrany, teda  $(2, 2)$ -pól izomorfný s jedným z  $(2, 2)$ -pólov:  $A$ ,  $C$ , v-rebrík alebo h-rebrík (pozri obrázky 2.16, 2.17, 2.18, 2.19). Vieme, že každý  $(2, 2)$ -pól po potlačení riadnej hrany má tri rôzne 3-farbenia ak neuvažujeme permutácie a uvažujeme zafarbenie konektorov podľa lemy 2.3.15. Môžeme nahliadnuť, že graf, ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  je izomorfný s niektorým<sup>2</sup> z modifikovaných Blanušových grafov  $B_{n-1}$ , ktorý ako modifikovaný  $(2, 2)$ -pólom  $M$  obsahuje  $(2, 2)$ -pól po potlačení hrany. Preto je podľa lemy 2.3.17 hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  v danom prípade  $\psi(e) = 3 \cdot 2^{n-1}$ .
- Hrana  $e$  je hrana, ktorá vznikne spojením visiacych hrán medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $I$  a  $B_1$ , respektíve  $I$  a  $B_n$ . Myšlienka dôkazu je rovnaká ako v predošlom prípade. Zrejme graf  $G$ , ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  je izomorfný s modifikovaným Blanušovým grafom  $B_{n-1}$  bez  $I$  s modifikovaným  $(2, 2)$ -pólom  $D$  (pozri obrázok 2.20). Ten má tri rôzne 3-farbenia spĺňajúce podmienky podľa lemy 2.3.16. Preto pomocou lemy 2.3.17 o počte rôznych 3-farbení modifikovaného Blanušovho grafu bez  $I$  dostávame, že hodnota funkcie  $\psi(e)$  je v tomto prípade tiež  $\psi(e) = 3 \cdot 2^{n-1}$ .
- Hrana  $e$  je pôvodne riadna hrana  $(2, 2)$ -pólu  $I$ . Tento prípad vyriešime drobným trikom – ako modifikovaný  $(2, 2)$ -pól použijeme Blanušov  $(2, 2)$ -pól. Graf  $G$ , ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  je izomorfný s modifikovaným Blanušovým grafom  $B_{n-1}$  bez  $I$  s modifikovaným  $(2, 2)$ -pólom  $B$ , ktorý je Blanušov  $(2, 2)$ -pól. Dá sa nahliadnuť, že Blanušov  $(2, 2)$ -pól má tri rôzne 3-farbenia spĺňajúce podmienky podľa lemy 2.3.16 ak neuvažujeme permutácie farieb. Preto pomocou lemy 2.3.17 o počte rôznych 3-farbení modifikovaného Blanušovho grafu bez  $I$  dostávame, že hodnota funkcie  $\psi(e)$  je v tomto prípade tiež  $\psi(e) = 3 \cdot 2^{n-1}$ .

Tým sme dokázali tvrdenie pre všetky hrany  $e \in E(\tilde{B}_n)$  každého zovšeobecneného Blanušovho snarku  $\tilde{B}_n$ . □

<sup>2</sup>V závislosti od toho, koľkátý v poradí je  $(2, 2)$ -pól  $B_i$ , na ktorom sme potlačili riadnu hrana.

# Kapitola 3

## Skúmanie paralelnej a sériovej rezistencie

Cieľom tejto kapitoly je zaviesť nové pojmy paralelnej a sériovej rezistencie, vychádzajúc z Kászonyiho funkcie. Neformálne povedané, pojmy paralelnej a sériovej rezistencie sú istým zovšeobecnením Kászonyiho funkcie. Zatiaľ, čo pri Kászonyiho funkcii sa pýtame koľko rôznych 3-farbení existuje po tom, ako potlačíme jednu hranu, pri paralelnej a sériovej rezistencii nás zaujíma koľko najmenej hrán (za určitých podmienok) musíme na danom grafe potlačiť, aby sme získali 3-zafarbiteľný graf.

Po zavedení základných pojmov a definícií sa zameriame na skúmanie vlastností paralelnej a sériovej rezistencie a vzťahov medzi nimi.

Vo všeobecnosti pod pojmom graf v tejto kapitole uvažujeme graf bez visiacych a izolovaných hrán. Ostatné typy hrán v grafe pripúšťame. Ak v nejakom grafe pripúšťame aj visiace a izolované hrany, bude to zrejmé zo samotnej definície daného grafu.

### 3.1 Pojmy a definície súvisiace s paralelnou a sériovou rezistenciou

V tejto podkapitole zavedieme základné definície potrebné na formuláciu pojmov paralelnej a sériovej rezistencie.

**Definícia 3.1.1** (Grafová postupnosť). Usporiadanú postupnosť  $P_G = (G_0, \dots, G_n)$  grafov  $G_0, \dots, G_n$  nazveme grafovou postupnosťou, ak platí, že graf  $G_{i+1}$  vznikol z grafu  $G_i$  operáciou potlačenia hrany pre všetky hodnoty  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Usporiadanú postupnosť hrán  $P_e = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$  nazveme postupnosťou potlačených hrán prislúchajúcu ku grafovej postupnosti  $P_G$  ak pre každé  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  platí, že graf  $G_{i+1}$  vznikol z grafu  $G_i$  operáciou potlačenia hrany  $e_i$ .

Hovoríme, že grafu  $G$  prislúcha grafová postupnosť  $P_G = (G_0, \dots, G_n)$ , ak  $G = G_0$ .

**Definícia 3.1.2** (Sériová rezistencia). Sériová rezistencia  $\sigma(G)$  kubického grafu  $G$  je minimálna dĺžka grafovej postupnosti  $P_G = (G, G_1, \dots, G_n)$  zmenšená o 1, pričom postupnosť  $P_G$  prislúcha grafu  $G$  a graf  $G_n$  je hranovo 3-zafarbiteľný. Ak takáto grafová postupnosť neexistuje, hovoríme, že  $\sigma(G) = \infty$ .

**Lema 3.1.3.** *Výsledný graf, ktorý vznikne z kubického grafu  $G$  potlačením hrán, ktoré spolu tvoria párenie  $P$  je rovnaký bez ohľadu na poradie, v akom hrany z párenia  $P$  potláčame.*

*Dôkaz.* Vykonáme operáciu potlačenia hrany „paralelne“ na všetkých hranách, ktoré spolu tvoria párenie a ukážeme, že výsledný graf je rovnaký, ako keby sme dané hrany potláčali postupne, v ľubovoľnom poradí.

Zoberme graf  $G$  a odoberme z neho tie hrany, ktoré patria do párenia  $P$ . Nakoľko odobraté hrany sú po dvoch nezávislé platí, že graf po ich odobratí obsahuje len vrcholy stupňa 3 a 2. Následným vyhladením vrcholov stupňa 2 získame výsledný graf  $G'$ .

Najprv ukážeme, že množina vrcholov grafu  $G'$  je rovnaká aj keď hrany z párenia  $P$  potláčame postupne (v ľubovoľnom poradí). Vrcholy, ktoré vyhladíme pri „paralelnom“ potláčaní hrán musia byť vyhladené aj keď hrany potláčame postupne, pretože sú incidentné s nejakou hranou z párenia  $P$ . Žiadne iné vrcholy pri postupnom potláčaní hrán nemôžu byť vyhladené, lebo jedným potlačením hrany odoberieme z grafu vždy dva vrcholy a pri „paralelnom“ odobratí hrán z párenia  $P$  má  $2|P|$  vrcholov stupeň 2.

Teraz sa pozrime na množinu hrán grafu  $G'$ . Všimnime si, že incidencia ľubovoľnej hrany, ktorá vznikne vyhladením niekoľkých vrcholov stupňa 2 nezávisí od toho, v akom poradí dané vrcholy vyhladíme. Preto je výsledná množina novovzniknutých hrán v grafe  $G'$  jednoznačne určená množinou vrcholov, ktoré boli „paralelne“ vyhladené a nie poradím, v akom hrany potláčame.  $\square$

**Definícia 3.1.4** (Paralelná rezistencia). Paralelná rezistencia  $\pi(G)$  kubického grafu  $G$  je minimálna dĺžka grafovej postupnosti  $P_G = (G, G_1, \dots, G_n)$  zmenšená o 1, pričom postupnosť  $P_G$  prislúcha grafu  $G$ , graf  $G_n$  je hranovo 3-zafarbiteľný a postupnosť  $P_G$  prislúcha hranová postupnosť  $P_e$  taká, že pre všetky hrany  $e_i \in P_e$  platí  $e_i \in E(G)$ . Ak takáto grafová postupnosť neexistuje, hovoríme, že  $\pi(G) = \infty$ .

Nech  $P$  je minimálne párenie hrán, ktorých potlačením získame 3-zafarbiteľný kubický graf. Potom môžeme paralelnú rezistenciu  $\pi(G)$  kubického grafu  $G$  ekvivalentne definovať ako  $\pi(G) = |P| + 1$ . Ak takáto množina nezávislých hrán neexistuje, potom hovoríme, že  $\pi(G) = \infty$ .

*Poznámka 3.1.5.* Všimnime si, že hrany z hranovej postupnosti  $P_e$  definovanej podľa prvej definície paralelnej rezistencie tvoria párenie. Je tomu tak preto, lebo ak by mali nejaké dve hrany  $e_i, e_j$  spoločný vrchol  $v$ , tak ich nie je možné obe potlačiť. Potom priamo z predošlej lemy vyplýva, že obe vyššie uvedené definície paralelnej rezistencie sú si ekvivalentné.

Zrejme pre paralelnú a sériovú rezistenciu ľubovoľného kubického grafu  $G$  platí vzťah  $\pi(G) = 0 \iff \sigma(G) = 0$  a  $\pi(G) = 1 \iff \sigma(G) = 1$ , pretože paralelná a sériová rezistencia sú obe rovné 0 práve vtedy, keď je graf  $G$  3-zafarbiteľný a  $\pi(G) = \sigma(G) = 1$  práve vtedy, keď existuje hrana  $e \in E(G)$ , taká, že pre hodnotu Kászonyiho funkcie platí  $\psi(e) \neq 0$ .

Z definície paralelnej a sériovej rezistencie tiež vyplýva, že pre každý kubický graf  $G$  platí  $\pi(G) \geq \sigma(G)$ .

## 3.2 Rozdiely medzi rezistenciami na kubických grafoch

Okrem paralelnej a sériovej rezistencie je známa aj vrcholová, hranová a toková rezistencia, ktoré v našej práci pre úplnosť tiež uvádzame. Je dokázané, že vrcholová a hranová rezistencia sú si ekvivalentné. Tiež sú známe prípady snarkov, pre ktoré je vrcholová a toková rezistencia rôzna.

Avšak cieľom tejto podkapitoly je predovšetkým skúmať rozdiely medzi paralelnou a sériovou rezistenciou. Na úvod síce do istej miery zasadíme tieto dve rezistencie do kontextu ostatných rezistencií, ale celkovo sa tejto problematike venujeme v našej práci len okrajovo.

Okrem zhrnutia známych vzťahov medzi vrcholovou, hranovou a tokovou rezistenciou v tejto podkapitole tiež ukážeme, že sériová rezistencia je pre každý kubický graf konečná. Na záver tejto podkapitoly ešte ukážeme, že existuje nekonečne veľa kubických grafov s nekonečnou paralelnou rezistenciou.

**Definícia 3.2.1** (Vrcholová rezistencia). Vrcholová rezistencia  $r(G)$  kubického grafu  $G$  je veľkosť minimálnej vrcholovej podmnožiny  $V \subseteq V(G)$  takej, že odobratím vrcholov z  $V$  získame 3-zafarbiteľný graf.

**Definícia 3.2.2** (Hranová rezistencia). Hranová rezistencia  $r_e(G)$  kubického grafu  $G$  je veľkosť minimálnej hranovej podmnožiny  $E \subseteq E(G)$  takej, že odobratím hrán z  $E$  získame 3-zafarbiteľný graf.

**Tvrdenie 3.2.3** (Steffen, Eckhard). [15] *Pre každý kubický graf  $G$  sa vrcholová rezistencia  $r(G)$  a hranová rezistencia  $r_e(G)$  rovnajú.*

Teraz ukážeme, že pre vrcholovú a paralelnú, respektíve sériovú rezistenciu neplatia vzťahy  $r(G) \leq \pi(G)$  a  $r(G) \leq \sigma(G)$ . Je známe, že vrcholová rezistencia  $r(G)$  Petersenovho grafu  $G$  (pozri obrázok 2.13) je  $r(G) = 2$ . Napríklad z tvrdenia o hodnotách Kászonyiho funkcie pre zovšeobecnené Blanušove snarky vyplýva, že pre paralelnú aj sériovú rezistenciu Petersenovho grafu platí  $\pi(G) = \sigma(G) = 1$ . Preto vzťahy  $r(G) \leq \pi(G)$  a  $r(G) \leq \sigma(G)$  všeobecne neplatia.

Taktiež medzi vrcholovou a paralelnou rezistenciou neplatí vzťah  $\pi(G) \leq r(G)$ . Vrcholová rezistencia každého kubického grafu je konečná, pretože odobratím všetkých vrcholov z grafu  $G$  dostávame triviálne 3-zafarbitelný kubický graf. Súčasne vieme, že existujú kubické grafy s nekonečnou paralelnou rezistenciou (pozri tvrdenie 3.2.13).

Otázka, či pre vrcholovú a sériovú rezistenciu ľubovoľného kubického grafu  $G$  platí vzťah  $\sigma(G) \leq r(G)$  ostáva otvorená.

Okrem vrcholovej a hranovej rezistencie sa zvykne na kubických grafoch skúmať ešte aj takzvaná toková rezistencia. Medzi tokovou a vrcholovou rezistenciou neplatí žiadna nerovnosť, pretože existujú také kubické grafy, pre ktoré je hodnota vrcholovej rezistencie väčšia ako hodnota tokovej rezistencie, a súčasne existujú kubické grafy, ktoré majú hodnotu vrcholovej rezistencie menšiu ako hodnotu tokovej rezistencie. Na formuláciu pojmu toková rezistencia si spravíme menšiu odbočku k nikde-nulovým tokom na grafoch.

**Definícia 3.2.4** (Tok na grafe). Nech  $D$  je orientácia hrán grafu  $G$ . Ďalej nech  $E^-(v)$  je množina hrán vychádzajúcich z vrchola  $v$  vzhľadom na orientáciu  $D$  a  $E^+(v)$  je zase množina hrán vchádzajúcich do vrchola  $v$  vzhľadom na orientáciu  $D$ . Potom pod pojmom tok na grafe  $G$  máme na mysli usporiadanú dvojicu  $(D, f)$ , kde zobrazenie  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  je také priradenie hodnôt jednotlivým hranám, v ktorom je pre každý vrchol  $v \in V(G)$  splnená nasledovná podmienka *kontinuity*:

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e).$$

$k$ -tok je taký tok na grafe  $G$ , v ktorom funkcia  $f$  priraduje hranám len hodnoty z množiny  $\{0, \pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ .

*Nikde-nulový  $k$ -tok* je taký tok na grafe  $G$ , v ktorom funkcia  $f$  priraduje hranám len hodnoty z množiny  $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ .

**Definícia 3.2.5** (Toková rezistencia). Toková rezistencia  $r_f(G)$  kubického grafu  $G$  je minimálny počet hrán, ktorým musíme priradiť hodnotu 0, aby existoval na grafe  $G$  4-tok.

Je všeobecne známe, že kubický graf má nikde-nulový 4-tok práve vtedy, keď je 3-zafarbitelný, teda  $r(G) = 0 \iff r_f(G) = 0$ . Preto má význam skúmať rozdiely medzi (vrcholovou) rezistenciou a tokovou rezistenciou len na 3-nezafarbitelných kubických grafoch.

Je dokázané, že medzi (vrcholovou) rezistenciou a tokovou rezistenciou neplatí ani jedna z možných nerovností.

Nerovnosť  $r(G) \leq r_f(G)$ , kde  $G$  je ľubovoľný kubický graf neplatí napríklad kvôli Petersenovmu grafu  $G$ , pretože je známe, že pre (vrcholovú) rezistenciu a tokovú rezistenciu na tomto grafe platí  $r(G) = 2$  a  $r_f(G) = 1$ . Hypotéza, že pre ľubovoľný kubický



graf  $G$  platí  $r(G) \geq r_f(G)$  [6] bola nedávno vyvrátená v článku *Snarks with resistance  $n$  and flow resistance  $2n$*  autorov I. Allie, E. Máčajová a M. Škoviera [1].

Zrejme medzi tokovou a paralelnou rezistenciou neplatí vzťah  $\pi(G) \leq r_f(G)$ . Toková rezistencia každého kubického grafu je konečná, priradením hodnoty 0 každej hrane získavame na grafe  $G$  4-tok. Súčasne vieme, že existujú kubické grafy s nekonečnou paralelnou rezistenciou (pozri tvrdenie 3.2.13).

Zvyšným vzťahom medzi tokovou a paralelnou respektíve sériovou rezistenciou sa v našej práci nevenujeme. Tokovú rezistenciu a jej zasadenie do kontextu s vrcholovou rezistenciou v našej práci uvádzame najmä preto, aby sme zasadili paralelnú a sériovú rezistenciu do širšieho kontextu danej problematiky. Ostáva otvoreným problémom, či platí niektorý zo zvyšných vzťahov medzi tokovou a paralelnou respektíve sériovou rezistenciou.

**Lema 3.2.6.** *Pre paralelnú a sériovú rezistenciu každého kubického grafu  $G$  platí:*

- $\sigma(G) \leq \frac{n}{2}$ , alebo  $\sigma(G) = \infty$ ,
- $\pi(G) \leq \frac{n}{2}$ , alebo  $\pi(G) = \infty$ .

*Dôkaz.* Potlačením riadnej hrany zmenšíme počet vrcholov grafu o 2 a posledný graf z grafovej postupnosti  $P_G$  nemôže mať menej ako 0 vrcholov. Preto, ak existuje vyhovujúca grafová postupnosť, tak má dĺžku nanajviš  $n/2 + 1$ , z čoho vyplýva daná lema.  $\square$

**Tvrdenie 3.2.7.** *Pre každý kubický graf  $G$  existuje konečná sériová rezistencia  $\sigma(G)$ .*

*Dôkaz.* Pripomeňme si, že výsledkom operácie potlačenia hrany na kubickom grafe je vždy kubický graf. Jediná hrana, ktorú nevieme potlačiť je slučka (polhrany a izolované hrany neuvažujeme). Lenže kubický graf nemôže obsahovať iba slučky. Preto v každom kubickom grafe s neprázdnu množinou vrcholov existuje nejaká riadna hrana, ktorú môžeme potlačiť, čím získame kubický graf na menej vrcholoch. Opakovaním daného postupu eventuálne získame graf na 0 vrcholoch (môže obsahovať izolované kružnice), ktorý je triviálne 3-zafarbiteľný.  $\square$

**Dôsledok 3.2.8.** *Pre sériovú rezistenciu každého kubického grafu  $G$  platí  $\sigma(G) \leq n/2$ .*

Teraz si ukážeme, že existuje nekonečne veľká trieda kubických grafov s nekonečnou paralelnou rezistenciou. Neskôr, ako dôsledok tvrdenia v nasledujúcej podkapitole ukážeme, že každý kubický graf  $G$  s paralelnou rezistenciou  $\pi(G) = \infty$  musí obsahovať most.

**Definícia 3.2.9** (3-artikulácia). 3-artikulácia je vrchol stupňa 3, ktorý je incidentný s tromi mostmi.

**Lema 3.2.10.** *Kubický graf je hranovo 3-zafarbiteľný práve vtedy, keď jeho množina hrán sa dá rozložiť na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc párnej dĺžky.*

*Dôkaz.*  $\Rightarrow$  Majme nejaké 3-zafarbenie grafu. Potom hrany zafarbené jednou farbou spolu tvoria 1-faktor. Po ich odobratí majú všetky vrcholy stupeň 2, z čoho vyplýva, že zvyšné hrany tvoria množinu disjunktných kružníc. Ak by nejaká kružnica mala nepárnu dĺžku, nebolo by možné ju zafarbiť dvomi farbami, čo je v spore s predpokladom, že graf je 3-zafarbiteľný.

$\Leftarrow$  Zafarbením 1-faktora jednou farbou a zafarbením hrán z množiny disjunktných kružníc párnej dĺžky zvyšnými dvomi farbami dostávame 3-farbenie grafu  $G$ .  $\square$

**Lema 3.2.11.** *Kubický graf s mostom je hranovo 3-nezafarbiteľný.*

*Dôkaz.* Sporom. Predpokladajme, že graf  $G$  s mostom  $e$  má 3-farbenie. Potom existuje také rozdelenie hrán na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc  $C$ , že  $e \in E(C)$ . To je ale v spore s tým, že  $e$  je most.  $\square$

**Lema 3.2.12.** *Nech  $G$  je kubický graf s 3-artikuláciou  $v$ . Potom odobratím vrchola  $v$  vzniknú tri komponenty, každá s nepárnym počtom vrcholov.*

*Dôkaz.* Výsledný počet komponentov je zrejmý. Druhú časť lemy dokážeme sporom. Predpokladajme, že komponent  $Z$  grafu  $G - \{v\}$  má párný počet vrcholov. Potom obsahuje  $2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  vrcholov stupňa 3 a jeden vrchol  $w$  stupňa 2.

Z vrchola  $w$  vychádzajú do množiny vrcholov stupňa 3 dve hrany. Počítaním počtu hrán potrebných na pokrytie všetkých vrcholov stupňa 3 dospejeme k tomu, že okrem dvoch hrán vychádzajúcich z vrchola  $w$  potrebujeme ešte  $3k - \frac{7}{2}$  hrán na to, aby bolo všetkých  $2k - 1$  vrcholov stupňa 3, čo je zrejme spor.  $\square$

**Tvrdenie 3.2.13.** *Kubický graf  $G$  s 3-artikuláciou má paralelnú rezistenciu  $\pi(G) = \infty$ .*

*Dôkaz.* Označme si 3-artikuláciu ako  $v$ . Ďalej si označme tri rôzne podgrafy grafu  $G$ , ktoré sú izomorfné s tromi komponentmi grafu  $G - \{v\}$  ako  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Z predchádzajúcej lemy vieme, že tieto podgrafy majú nepárny počet vrcholov. Označme si ešte množinu hrán grafu  $G$ , ktoré nie sú incidentné s vrcholom  $v$  ako  $E_v$ .

Samotný dôkaz rozdelíme na dve časti. Najprv nech  $P$  v párení, ktoré potlačíme sú len hrany z množiny  $E_v$ . Nech  $G'$  je graf, ktorý vznikne z grafu  $G$  potlačením hrán z párenia  $P$ . Zrejme potlačením ľubovoľného počtu hrán nezmeníme paritu počtu vrcholov na niektorom z podgrafov  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Preto nie je možné vybrať také párenie  $P$  z množiny hrán  $E_v$ , ktorého potlačením by sme redukovali počet vrcholov niektorého z podgrafov  $Z_1, Z_2$  alebo  $Z_3$  na 0, a teda vrchol  $v$  ostáva 3-artikuláciou aj v grafe  $G'$ . Potom ale výsledný graf  $G'$  obsahuje most, a teda je 3-nezafarbiteľný.

Teraz nech párenie  $P$ , ktoré potlačíme obsahuje jednu hranu  $e$  incidentnú s vrcholom  $v$ . Vieme, že hrany z párenia  $P$  môžeme potlačiť aj postupne. Potlačením hrany  $e$

získame graf s dvomi komponentmi, pričom jeden z nich je tvorený niektorými dvomi podgrafmi z podgrafov  $Z_1, Z_2, Z_3$ , ktoré sú spojené mostom  $e'$ . Most  $e'$  vznikol vyhladením vrchola  $v$ , a preto nemôže patriť do párenia  $P$ . Každý z týchto dvoch podgrafov má nepárny počet vrcholov, a teda potlačením zvyšných hrán z párenia  $P$  nemôžeme zredukovať počet vrcholov v daných podgrafoch na 0. Potom ale výsledný graf, ktorý vznikne potlačením všetkých hrán z párenia  $P$  obsahuje most, a teda je 3-nezafarbiteľný.  $\square$

Pomocou predošlého tvrdenia vieme ľahko skonštruovať nekonečnú triedu kubických grafov s nekonečnou paralelnou rezistenciou. Stačí zobrať ľubovoľné tri kubické grafy s jednou visiacou hranou a napojiť tieto visiace hrany na izolovaný vrchol  $v$ . Rôznych kubických grafov s jednou visiacou hranou existuje nekonečne veľa.

### 3.3 Súvislosť medzi 1-faktorom a paralelnou rezistenciou

V tejto podkapitole dokážeme, že pre paralelnú rezistenciu ľubovoľného kubického grafu  $G$  platí, že ak graf  $G$  má 1-faktor, tak potom  $\pi(G) \neq \infty$ . Tiež pomocou protipríkladu ukážeme, že opačná implikácia neplatí (pre nekonečne veľa grafov).

Dôsledkom daného tvrdenia a známej Petersenovej vety [13] je potom tvrdenie, že každý bezmostový kubický graf má konečnú paralelnú rezistenciu. Preto nekonečnú paralelnú rezistenciu môžu mať len kubické grafy s mostom.

Na záver tejto podkapitoly uvedieme ešte jednu lemu nesúvisiacu s predošlým tvrdením, ktorú sa nám počas skúmania súvislostí uvedených v tejto podkapitole podarilo dokázať.

Začnime tým, že si pripomenieme jednu lemu, ktorú následne využijeme pri dôkaze hlavného tvrdenia tejto podkapitoly.

**Lema 3.3.1.** *Každý kubický graf  $G$  s 1-faktorom sa dá rozdeliť na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc.*

**Tvrdenie 3.3.2.** *Kubický graf s 1-faktorom má konečnú paralelnú rezistenciu.*

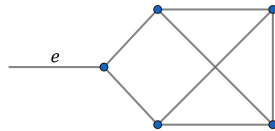
*Dôkaz.* Nech  $G$  je kubický graf s 1-faktorom. Potom podľa predošlej lemy sa dá graf  $G$  rozložiť na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc. Hrany z 1-faktoru spolu tvoria párenie  $P$ . Môžeme nahliadnuť, že výsledný graf  $G'$ , ktorý vznikne potlačením všetkých hrán z párenia  $P$  je tvorený množinou izolovaných kružníc a jeho množina vrcholov  $V(G')$  je prázdna. Preto graf  $G'$  je triviálne 3-zafarbiteľný, čím získavame horný odhad na hodnotu paralelnej rezistencie  $\pi(G) \leq |P|$ , teda  $\pi(G) \neq \infty$ .  $\square$

**Tvrdenie 3.3.3** (Petersenova veta). [13] *Bezmostový kubický graf obsahuje 1-faktor.*

**Dôsledok 3.3.4.** Z tvrdenia o 1-faktore a Petersenovej vety vyplýva, že každý bezmostový kubický graf má konečnú paralelnú rezistenciu.

Teraz uvedením protipríkladu ukážeme, že implikácia *ak má kubický graf konečnú paralelnú rezistenciu, tak má 1-faktor* neplatí.

**Definícia 3.3.5** (Graf  $K'_4$ ). Kubický graf  $K'_4$  je graf na piatich vrchoch s jednou visiacou hranou  $e$  (pozri obrázok 3.1).



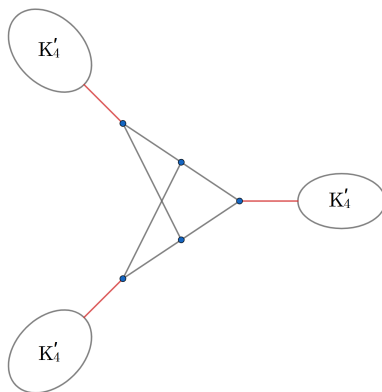
Obr. 3.1: Graf  $K'_4$

*Poznámka 3.3.6.* Odobratím visiacej hrany a vyhladením vrchola stupňa 2 grafu  $K'_4$  vznikne kompletný graf na štyroch vrchoch. Odtiaľ pochádza názov grafu  $K'_4$ .

Môžeme nahliadnuť, že ak kubický graf, ktorého podgrafom je graf  $K'_4$  obsahuje 1-faktor, tak potom je v 1-faktore aj pôvodne visiaci hrana  $e$  grafu  $K'_4$ . Je tomu tak preto, že ak by sme túto hranu do 1-faktoru nezahrnuli, nie je možné vytvoriť perfektné párenie na grafe  $K'_4 - \{e\}$ , nakoľko má nepárny počet vrcholov.

**Definícia 3.3.7** (Graf  $G_{20}$ ). Kubický graf  $G_{20}$  je graf, ktorý vznikne tak, že zoberieme tri kópie grafu  $K'_4$ , množinu piatich vrcholov pospájaných hranami tak, ako je vyobrazené na obrázku 3.2 a napojíme visiace hrany grafov  $K'_4$  na vrcholy stupňa 2.

Červené hrany grafu  $G_{20}$  sú hrany, ktoré vznikli napojením visiacich hrán grafov  $K'_4$  na vrcholy stupňa 2 (pozri obrázok 3.2).



Obr. 3.2: Graf  $G_{20}$

**Definícia 3.3.8** (Centrálny podgraf grafu  $G_{20}$ ). Maximálny podgraf grafu  $G_{20}$ , ktorého množina hrán a vrcholov je disjunktná s každým z troch podgrafov  $K'_4$  grafu  $G_{20}$  nazývame *centrálny podgraf grafu  $G_{20}$* .

Teraz ukážeme, že graf  $G_{20}$  má konečnú paralelnú rezistenciu, ale nemá 1-faktor. Najprv nahliadneme, že graf  $G_{20}$  má konečnú paralelnú rezistenciu.

Potlačením červených hrán grafu  $G_{20}$  vznikne nový graf  $G'_{20}$  so štyrmi komponentmi, z toho tri komponenty sú kompletne grafy na štyroch vrchoch a štvrtý komponent je dvojica vrcholov spojených 3-násobnou hranou. Každý z týchto komponentov je 3-zafarbiteľný. Potom je 3-zafarbiteľný aj graf  $G'_{20}$ , a preto má graf  $G_{20}$  konečnú paralelnú rezistenciu.

Teraz sporom ukážeme, že graf  $G_{20}$  nemá 1-faktor. Ak by graf  $G_{20}$  obsahoval 1-faktor, museli by v ňom byť zahrnuté červené hrany, pretože ide o pôvodne visiace hrany podgrafov  $K'_4$  (pozri poznámku 3.3.6). Potom ale nevieme pokryť zvyšné dva vrcholy centrálneho podgrafu grafu  $G_{20}$  hranami tak, aby tvorili spolu s *červenými* hranami párenie. Preto graf  $G_{20}$  nemá 1-faktor.

Uvedomme si, že na základe konštrukcie grafu  $G_{20}$  nie je ťažké skonštruovať nekonečnú triedu kubických grafov s mostom, ktoré majú konečnú paralelnú rezistenciu.

To, že ktoré kubické grafy s mostom majú konečnú paralelnú rezistenciu ostáva otvoreným problémom.

Na záver podkapitoly dokážeme jednu lemu, súvisiacu s 1-faktorom kubického grafu, ktorú sa nám podarilo počas skúmania vyššie uvedením súvislostí dokázať, aj keď sme ju nakoniec pri dôkaze samotného tvrdenia o 1-faktore nijak nevyužili.

**Lema 3.3.9.** *Nech  $G'$  je kubický graf, ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  kubického grafu  $G$ . Potom platí, že ak graf  $G$  nemá 1-faktor a graf  $G'$  má 1-faktor, tak do 1-faktoru patrí aspoň jedna novovzniknutá hrana.*

*Dôkaz.* Dôkaz vykonáme sporom. Naraz rozoberieme prípad, kedy je potlačená jednoduchá (pozri obrázok 1.1) aj 2-násobná hrana. Predpokladajme, že potlačíme hranu  $e = uv$  a žiadnu novovzniknutú hranu nepoužijeme v 1-faktore grafu  $G'$ . Potom ale v pôvodnom grafe  $G$  vieme vytvoriť také párenie  $P$ , ktoré obsahuje všetky vrcholy grafu  $G$ , okrem vrcholov  $u, v$  bez toho, aby sme v ňom použili niektorú z hrán incidentných s vrcholmi  $u, v$ . Pridaním hrany  $e$  do párenia  $P$  získavame perfektné párenie, čiže 1-faktor grafu  $G$ .

Potlačanie 3-násobnej hrany nemusíme uvažovať. Potlačením 3-násobnej hrany nemôže vzniknúť z kubického grafu bez 1-faktoru graf s 1-faktorom.  $\square$

### 3.4 Grafy s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou

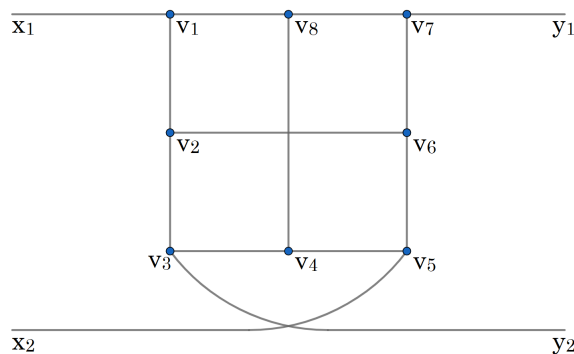
V tejto podkapitole ukážeme, že existuje nekonečná trieda bezmostových kubických grafov s rozličnou konečnou paralelnou a sériovou rezistenciou takou, že pre ľubovoľné číslo  $n \in \mathbb{N}$  existuje v tejto triede graf  $G$ , ktorý má rozdiel rezistencií  $\pi(G) - \sigma(G) \geq n$ . To je okrem iného dôkazom toho, že má význam skúmať obe rezistencie.

V prvej časti podkapitoly sa zaoberáme najmenším kubickým grafom z danej nekonečnej triedy. Následne pomocou daného grafu istým zovšeobecnením skonštruujeme požadovanú nekonečnú triedu kubických grafov.

Začneme tým, že zavedieme niekoľko pomocných  $(2, 2)$ -pólov, pomocou ktorých skonštruujeme najmenší graf z tejto triedy a ukážeme o nich potrebné vlastnosti, ktoré neskôr využijeme pri dôkaze tvrdenia, že nami skonštruovaný kubický graf má rôznu paralelnú a sériovú rezistenciu.

**Definícia 3.4.1** (Petersenov  $(2, 2)$ -pól). Pod pojmom Petersenov  $(2, 2)$ -pól máme na mysli  $(2, 2)$ -pól  $P = (V_P, E_P)$  pričom množina vrcholov  $V_P = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  a hrany  $E_P = \{v_{i+1}v_{j+1} \mid i \in \mathbb{Z}_8, j = i + 1 \pmod{8}\} \cup \{v_2v_6, v_4v_8\} \cup \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ . Hrany  $x_1, x_2, y_1, y_2$  sú visiace hrany, postupne incidentné s vrcholmi  $v_1, v_5, v_7, v_3$ . Zvyšné hrany sú riadne (pozri obrázok 3.3).

Vstupným konektorom  $S_1$  Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán hrán  $S_1 = (x_1, x_2)$ . Výstupným konektorom  $S_2$  Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu zase rozumieme usporiadanú dvojicu polhrán hrán  $S_2 = (y_1, y_2)$ , pričom máme na mysli rovnomenné polhrany visiacich hrán označené ako  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .



Obr. 3.3: Petersenov  $(2, 2)$ -pól

*Poznámka 3.4.2.* Môžeme si všimnúť, že rozdiel medzi Blanušovým a Petersenovým  $(2, 2)$ -pólom je len v zaradení polhrán do konektorov.

Nakoľko teraz skúmame rezistencie a nie hodnoty Kászonyiho funkcie, nemusíme vždy rozoberať všetky 3-farbenia. Často nám stačí vedieť, či existuje „nejaké“ 3-farbenie.

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľné dve farby  $a, b \in \{1, 2, 3\}$  existuje na Petersenovom  $(2, 2)$ -póle také 3-farbenie  $c$ , že zafarbí vstupný a výstupný konektor  $S_1, S_2$  farbami,  $c(S_1) = (a, a)$ ,  $c(S_2) = (b, b)$ . Tiež ukážeme, že žiadne iné 3-farbenie (vzhľadom na zafarbenie konektorov) na Petersenovom  $(2, 2)$ -póle neexistuje.

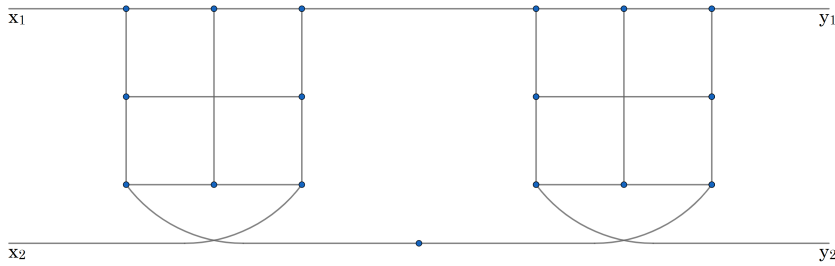
Vstupný konektor  $S_1$  môže byť zafarbený buď farbou  $c(S_1) = (1, 1)$  alebo farbami  $c(S_1) = (1, 2)$ . Všetky ostatné zafarbenia vstupného konektora vieme získať permutáciou farieb. Názvy vrcholov uvažujeme podľa obrázku 3.3.

- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 1)$ . Z Paritnej lemy vieme, že výstupný konektor  $S_2$  môže byť zafarbený len farbami  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  alebo  $(3, 3)$ . Ukážeme, že existuje 3-farbenie Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu  $M$  pre všetky prípustné možnosti zafarbenia výstupného konektora  $S_2$ . Nech  $c(S_2) = (1, 1)$ . Potom napríklad zafarbením hrany  $v_1v_8$  farbou 2 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $M$ . Teraz nech výstupný konektor je zafarbený farbou  $c(S_2) = (2, 2)$ . Potom napríklad zafarbením hrany  $v_1v_8$  farbou 2 dostávame jednoznačné 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $M$ . 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $M$  také, že  $c(S_2) = (3, 3)$  dostávame z predchádzajúceho 3-farbenia tak, že spermutujeme farby 2 a 3.
- Zafarbenie vstupného konektora je  $(1, 2)$ . Z Paritnej lemy vyplýva, že zafarbenie výstupného konektora  $S_2$  musí byť buď  $c(S_2) = (1, 2)$  alebo  $c(S_2) = (2, 1)$ . Avšak graf, ktorý vznikne z dvoch vrcholov  $v_9, v_{10}$  navzájom spojených hranou a z Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu tak, že napojíme visiace hrany  $x_1, y_1$  na vrchol  $v_9$  a visiace hrany  $x_2, y_2$  na vrchol  $v_{10}$  je izomorfný s Petersenovým grafom. Preto ak by existovalo 3-farbenie Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu také, že vstupný konektor zafarbíme farbami  $c(S_1) = (1, 2)$  a výstupný konektor zase farbami  $c(S_2) = (1, 2)$  alebo  $c(S_2) = (2, 1)$ , tak dofarbením hrany  $v_9v_{10}$  farbou 3 dostávame 3-farbenie Petersenovho grafu, čo je spor. Tým pádom nemôže existovať 3-farbenie Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu také, že vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (1, 2)$ .

Teraz zavedieme nový  $(2, 2)$ -pól „oblúk“  $O$ , ktorý je tvorený dvomi Petersenovými  $(2, 2)$ -pólmi. Pomocou neho následne skonštruujeme kubický graf s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou. Ešte predtým ale ukážeme, že  $(2, 2)$ -pól  $O$  je 3-nezafarbiteľný.

**Definícia 3.4.3** ( $(2, 2)$ -pól  $O$ ). Multipól, ktorý vznikne spojením dvoch Petersenových  $(2, 2)$ -pólov  $M_xM_y$  a následnou subdivíziou hrany, ktorá vznikla spojením polhrán  $y_2$   $(2, 2)$ -pólu  $M_x$  a  $x_2$   $(2, 2)$ -pólu  $M_y$  nazývame  $(2, 2)$ -pól oblúk  $O$ , skrátene  $(2, 2)$ -pól  $O$  (pozri obrázok 3.4).

Hranu  $e$   $(2, 2)$ -pólu  $O$ , ktorá má jeden koniec incidentný s vrcholom patriacim pôvodne Petersenovmu  $(2, 2)$ -pólu  $M_x$  a druhý koniec incidentný s vrcholom patriacim pôvodne Petersenovmu  $(2, 2)$ -pólu  $M_y$  nazývame *medzipetersenovská*.

Obr. 3.4: (2, 2)-pól oblúk  $O$ 

*Poznámka 3.4.4.* Môžeme nahliadnuť, že (2, 2)-pól  $O$  je z doteraz všetkých definovaných (2, 2)-pólov jediný, ktorý nie je kubický, pretože obsahuje jeden vrchol stupňa 2.

**Lema 3.4.5.** (2, 2)-pól oblúk  $O$  je hranovo 3-nezafarbiteľný.

*Dôkaz.* (2, 2)-pól  $O$  sa skladá z dvoch Petersenových (2, 2)-pólov  $M_x, M_y$  a vrchola  $v$  stupňa 2. Nech  $S'_2 = (y'_1, y'_2)$  je výstupný konektor Petersenovho (2, 2)-pólu  $M_x$  a  $S'_1 = (x'_1, x'_2)$  je zase vstupný konektor Petersenovho (2, 2)-pólu  $M_y$ .

Sporom predpokladajme, že (2, 2)-pól  $O$  je 3-zafarbiteľný. Vieme, že Petersenov (2, 2)-pól je 3-zafarbiteľný len vtedy, keď pre každý jeho konektor platí, že obe polhrany daného konektora sú zafarbené rovnakou farbou. Preto pre dané 3-farbenie  $c$  (2, 2)-pólu  $O$  musí platiť, že  $c(S'_2) = (a, a)$ . Potom ale pre zafarbenie polhrán vstupného konektora  $S'_1$  platí:  $c(x'_1) = a$  a  $c(x'_2) \neq a$ . To je spor, lebo polhrany vstupného konektora (2, 2)-pólu  $M_y$  musia byť zafarbené rovnakou farbou, aby bol (2, 2)-pól  $M_y$  3-zafarbiteľný. Preto je (2, 2)-pól  $O$  3-nezafarbiteľný.  $\square$

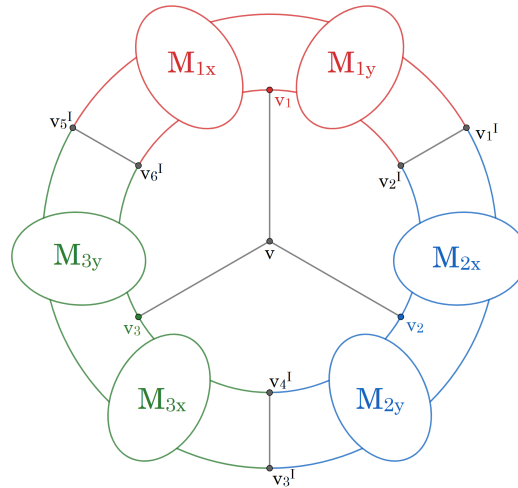
**Definícia 3.4.6** (Graf kormidlo). Nech  $M$  je (2, 2)-pól, ktorý vznikne tak, že zoberieme tri kópie (2, 2)-pólu  $O$ , tri kópie (2, 2)-pólu  $I$  (pozri obrázok 2.14) a spojíme ich postupne v poradí  $OIOIOI$ . Nech graf  $G$  je uzáverom (2, 2)-pólu  $M$ . Nahliadnime, že graf  $G$  má práve tri vrcholy stupňa 2.

Potom graf, ktorý vznikne tak, že zoberieme graf  $G$ , nový vrchol  $u$  a hranami spojíme vrchol  $u$  s každým vrcholom  $v \in V(G)$  stupňa 2 nazývame kormidlo (pozri obrázok 3.5).

*Poznámka 3.4.7.* Názov grafu kormidlo je inšpirovaný vzhľadom grafu – pripomína kormidlo na lodi. Podgrafy na obrázku označené ako  $M_{i\{x,y\}}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  sú Petersenove (2, 2)-póly.

Môžeme si všimnúť, že graf kormidlo ako podgrafy obsahuje tri navzájom disjunktné (2, 2)-póly  $O$  (na obrázku 3.5 farebne vyznačené). Nakoľko každý z (2, 2)-pólov  $O$  je sám o sebe 3-nezafarbiteľný, je 3-nezafarbiteľný aj samotný graf kormidlo.





Obr. 3.5: Graf kormidlo

Teraz ukážeme, že pre graf kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) = 3$  a  $\sigma(G) = 2$ .

Z vlastností paralelnej a sériovej rezistencie vieme, že pre každý kubický graf  $H$  platí  $\pi(H) = 0$  práve vtedy, keď  $\sigma(H) = 0$  a  $\pi(H) = 1$  práve vtedy, keď  $\sigma(H) = 1$ . Preto na dôkaz  $\sigma(G) = 2$  nám stačí ukázať, že platí  $\pi(G) = 3$  a  $\sigma(G) \leq 2$ .

Najprv ukážeme, že graf  $G'$ , ktorý vznikne z grafu kormidlo  $G$  potlačením hrany  $v_1v$  a následným potlačením novovzniknutej hrany  $v_2v_3$  je 3-zafarbiteľný, z čoho vyplýva, že  $\sigma(G) \leq 2$ . Všimnime si, že graf  $G'$  je izomorfný s grafom, ktorý vznikne ako uzáver spojenia  $(2, 2)$ -pólov  $M_{1x}M_{1y}I_1M_{2x}M_{2y}I_2M_{3x}M_{3y}I_3$ , pričom  $(2, 2)$ -póly  $M_{i\{x,y\}}$  sú Petersenove  $(2, 2)$ -póly a  $I_i$  sú  $(2, 2)$ -póly  $I$ . Vieme, že pre  $(2, 2)$ -pól  $I$  s konektormi  $S_1, S_2$  existuje také 3-farbenie  $c$ , že  $c(S_1) = (a, a)$  a  $c(S_2) = (b, b)$ , pričom pre farby  $a, b$  platí  $a \neq b$ . Pre Petersenov  $(2, 2)$ -pól  $M$  s konektormi  $S'_1, S'_2$  zase existuje pre ľubovoľné dve farby  $a, b$  také 3-farbenie  $c$ , že  $c(S'_1) = (a, a)$  a  $c(S'_2) = (b, b)$ .

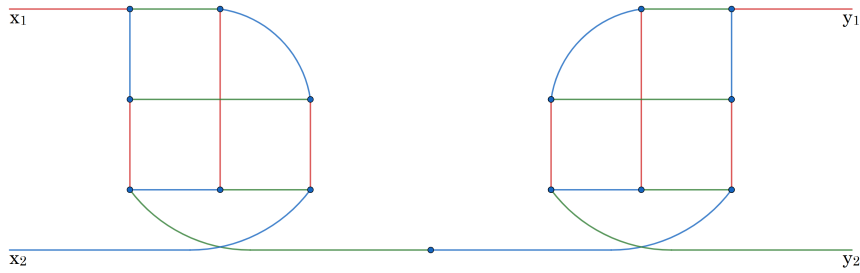
Potom ak zafarbíme hrany medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $I_3, M_{1x}, M_{1y}, I_1$  farbou 1, hrany medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $I_1, M_{2x}, M_{2y}, I_2$  farbou 2 a hrany medzi  $(2, 2)$ -pólmi  $I_2, M_{3a}, M_{3b}, I_3$  farbou 3, tak zrejme vieme dofarbiť jednotlivé  $(2, 2)$ -póly takým spôsobom, aby sme dostali 3-farbenie grafu  $G'$ . Preto pre sériovú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  platí  $\sigma(G) \leq 2$ .

Dôkaz, že pre paralelnú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) = 3$  rozdelíme na dve časti. Najprv ukážeme, že platí  $\pi(G) \leq 3$ . Následne ukážeme, že neexistuje dvojica nezávislých hrán grafu  $G$  taká, že ich potlačením získame 3-zafarbiteľný graf.

Na dôkaz  $\pi(G) \leq 3$  si pomôžeme pomocným  $(2, 2)$ -pólom  $Q$  a ukážeme na ňom jedno možné 3-farbenie.

**Definícia 3.4.8** ( $(2, 2)$ -pól  $Q$ ). Multipól, ktorý vznikne potlačením *medzipetersenovskej* hrany  $(2, 2)$ -pólu  $O$  nazývame  $(2, 2)$ -pól  $Q$  (pozri obrázok 3.6).

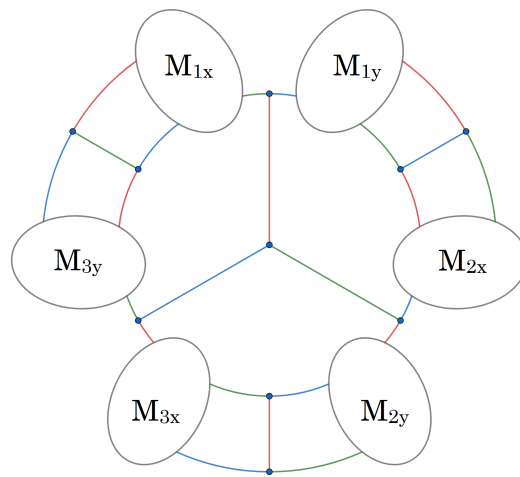
*Vstupný* a *výstupný* konektor  $(2, 2)$ -pólu  $Q$  sú rovnaké, ako konektory  $(2, 2)$ -pólu  $O$ , z ktorého  $(2, 2)$ -pól  $Q$  vznikol, teda  $S_1 = (x_1, x_2)$  a  $S_2 = (y_1, y_2)$ .

Obr. 3.6:  $(2, 2)$ -pól  $Q$  s možným hranovým 3-farbením  $c$ 

*Poznámka 3.4.9.* Môžeme nahliadnuť, že pre ľubovoľné navzájom rôzne farby  $a, b, c$  existuje na  $(2, 2)$ -póle  $Q$  také hranové 3-farbenie  $c$ , že vstupnému konektoru  $S_1$  priradí farby  $c(S_1) = (a, b)$  a výstupnému konektoru  $S_2$  priradí farby  $c(S_2) = (a, c)$ . Vzhľadom na veľkosť  $(2, 2)$ -pólu  $Q$  nám príde vhodnejšie existenciu takéhoto 3-farbenia ukázať graficky. Vizualizáciu tohto 3-farbenia je možné si pozrieť priamo na obrázku 3.6.

**Definícia 3.4.10** (Graf potlačené kormidlo). Nech  $M$  je  $(2, 2)$ -pól ktorý vznikne tak, že zoberieme tri kópie  $(2, 2)$ -pólu  $Q$ , tri kópie  $(2, 2)$ -pólu  $I$  a spojíme ich postupne v poradí  $QIQIQI$ . Nech graf  $G$  je uzáverom  $(2, 2)$ -pólu  $M$ .

Potom graf, ktorý vznikne tak, že zoberieme graf  $G$ , nový vrchol  $u$  a hranami spojíme vrchol  $u$  s každým vrcholom  $v \in V(G)$  stupňa 2 nazývame potlačené kormidlo (pozri obrázok 3.7).

Obr. 3.7: Graf potlačené kormidlo s možným hranovým 3-farbením  $c$ 

*Poznámka 3.4.11.* Multipóly  $M_{ix}, i \in \{1, 2, 3\}$  na obrázku 3.7 sú  $(2, 1)$ -póly, ktoré vzniknú tak, že z Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu odoberieme visiacu hranu  $y_1$  a následne vyhladíme vrchol stupňa 2. Multipóly  $M_{iy}, i \in \{1, 2, 3\}$  sú zase  $(1, 2)$ -póly, ktoré vzniknú z Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu odobratím visiacej hrany  $x_1$  a vyhladením vrchola stupňa 2.

Môžeme si všimnúť, že  $(2, 2)$ -pól, ktorý vznikne napojením polhrany z výstupného konektoru  $(2, 1)$ -pólu  $M_{ix}$  a polhrany vstupného konektoru z  $(1, 2)$ -pólu  $M_{iy}$  na nový izolovaný vrchol tak, ako je vyobrazené na obrázku 3.7 je izomorfný s  $(2, 2)$ -pólom  $Q$ .

Nahliadnime, že hrany na obrázku 3.7 grafu potlačené kormidlo sme už zafarbili tromi farbami. Využitím vhodnej permutácie farieb a známeho 3-farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $Q$  (pozri obrázok 3.6) vieme následne dofarbiť hrany multipólov  $M_{i\{a,b\}}$  tak, aby sme získali 3-farbenie grafu potlačené kormidlo. Preto je graf potlačené kormidlo 3-zafarbiteľný.

Všimnime si, že rozdiel v konštrukcii grafu potlačené kormidlo  $H$  a grafu kormidlo  $G$  je len v tom, že na konštrukciu grafu  $G$  sa použijú tri kópie  $(2, 2)$ -pólu  $O$ , zatiaľ čo na konštrukciu grafu  $H$  tri kópie  $(2, 2)$ -pólu  $Q$ , pričom  $(2, 2)$ -pól  $Q$  vznikne z  $(2, 2)$ -pólu  $O$  potlačením *medzipetersenovskej* hrany. Preto by sme graf potlačené kormidlo  $H$  mohli skonštruovať aj tak, že najprv skonštruujeme graf kormidlo  $G$  a následne na ňom potlačíme tri *medzipetersenovské* hrany  $e_1, e_2, e_3$ .

Povedané inými slovami, existujú tri nezávislé hrany  $e_1, e_2, e_3$  grafu kormidlo  $G$  také, že ich potlačením získame graf izomorfný s grafom potlačené kormidlo, ktorý je 3-zafarbiteľný. Preto pre paralelnú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) \leq 3$ .

Na záver nám ešte ostáva ukázať, že v grafe kormidlo  $G$  neexistujú také dve nezávislé hrany, že ich potlačením vznikne 3-zafarbiteľný graf.

**Lema 3.4.12.** *Pre paralelnú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) > 2$ .*

*Dôkaz.* Lemu dokážeme tak, že ukážeme, že neexistujú nanaajvyš dve nezávislé hrany grafu kormidlo  $G$  také, že ich potlačením vznikne 3-zafarbiteľný graf.

Uvedomme si, že graf kormidlo  $G$  obsahuje tri disjunktné podgrafy, ktoré sú izomorfné s  $(2, 2)$ -pólom  $O$ , a že potlačením ľubovoľnej hrany grafu  $G$  vieme modifikovať nanaajvyš jeden z týchto podgrafov (pozri obrázok 3.5). Preto každý graf  $G'$ , ktorý vznikne potlačením nanaajvyš dvoch ľubovoľných nezávislých hrán grafu kormidlo  $G$  ako svoj podgraf obsahuje aspoň jeden  $(2, 2)$ -pól  $O$ , a teda je 3-nezafarbiteľný. Potom ale pre paralelnú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  nemôže platiť  $\pi(G) \leq 2$ , a preto platí  $\pi(G) > 2$ .  $\square$

Z predchádzajúcej lemy a pozorovania, že pre paralelnú a sériovú rezistenciu grafu kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) \leq 3$  a  $\sigma(G) \leq 2$  vyplýva nasledovné tvrdenie:

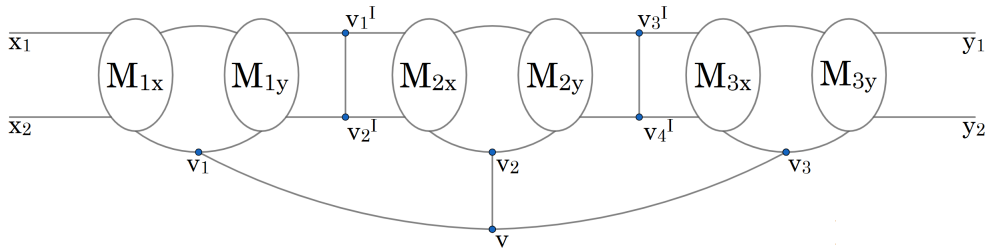
**Tvrdenie 3.4.13.** *Pre graf kormidlo  $G$  platí  $\pi(G) = 3$  a  $\sigma(G) = 2$ .*

Tým sme našli prvý bezmostový kubický graf s rôznou konečnou paralelnou a sériovou rezistenciou. Vychádzajúc z grafu kormidlo  $G$ , naším cieľom teraz bude skonštruovať nekonečnú triedu bezmostových kubických grafov takých, že pre ľubovoľné číslo  $k \in \mathbb{N}$  existuje v tejto triede graf  $G$ , ktorý má rozdiel rezistencií  $\pi(G) - \sigma(G) \geq k$ .

Začneme tým, že si zdefinujeme nový  $(2, 2)$ -pól, pomocou ktorého následne budeme konštruovať kubické bezmostové grafy s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou.

**Definícia 3.4.14** ((2, 2)-pól polkormidlo  $K$ ). Nech  $M$  je (2, 2)-pól, ktorý vznikne tak, že zoberieme tri kópie (2, 2)-pólu  $O$ , dve kópie (2, 2)-pólu  $I$  a spojíme ich postupne v poradí  $OIOIO$ . Môžeme si všimnúť, že (2, 2)-pól  $M$  má práve tri vrcholy stupňa 2.

Potom (2, 2)-pól, ktorý vznikne tak, že zoberieme (2, 2)-pól  $M$ , nový vrchol  $u$  a hranami spojíme vrchol  $u$  s každým vrcholom  $v \in V(M)$  stupňa 2 nazývame (2, 2)-pól polkormidlo  $K$  (pozri obrázok 3.8).



Obr. 3.8: (2, 2)-pól polkormidlo  $K$

*Poznámka 3.4.15.* Podgrafy na obrázku označené ako  $M_{i\{x,y\}}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  sú Peter-sonove (2, 2)-póly.

**Lema 3.4.16.** Pre paralelnú rezistenciu (2, 2)-pólu polkormidlo  $K$  platí  $\pi(K) > 2$ .

*Dôkaz.* Dôkaz je v podstate analogický k dôkazu predošlej lemy o dolnom odhade paralelnej rezistencie grafu kormidlo.

Stačí nám ukázať, že neexistujú nanajvyš dve nezávislé hrany (2, 2)-pólu  $K$ , ktorých potlačením vznikne 3-zafarbiteľný graf. Uvedomme si, že (2, 2)-pól polkormidlo  $K$  obsahuje tri disjunktné podgrafy, ktoré sú izomorfné s (2, 2)-pólom  $O$ , a že potlačením ľubovoľnej hrany (2, 2)-pólu  $K$  vieme modifikovať nanajvyš jeden z týchto podgrafov. Preto každý (2, 2)-pól  $K'$ , ktorý vznikne potlačením nanajvyš dvoch ľubovoľných nezávislých hrán (2, 2)-pólu  $K$  ako svoj podgraf obsahuje aspoň jeden (2, 2)-pól  $O$ , a teda je 3-nezafarbiteľný.  $\square$

Teraz pre ľubovoľné číslo  $k \in \mathbb{N}$  zdefinujeme graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  a ukážeme, že pre každý takýto graf platí  $\pi(G_k) - \sigma(G_k) \geq k$ , čím zakončíme naše výsledky skúmania paralelnej a sériovej rezistencie.

**Definícia 3.4.17** (Zovšeobecnené kormidlo  $G_k$ ). Nech  $M$  je (2, 2)-pól, ktorý vznikne spojením (2, 2)-pólov  $KI$ . Potom kubický graf, ktorý vznikne ako uzáver  $k$  po sebe spojených (2, 2)-pólov  $M$  nazývame zovšeobecnené kormidlo  $G_k$ .

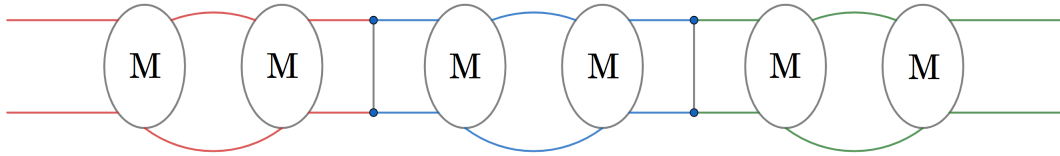
*Poznámka 3.4.18.* Zrejme trieda grafov zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  je nekonečná. Môžeme si tiež všimnúť, že pre  $k = 1$  je graf zovšeobecnené kormidlo  $G_1$  izomorfný s grafom kormidlo  $G$ .

Najprv ukážeme, že pre sériovú rezistenciu každého grafu zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  platí  $\sigma(G_k) \leq 2k$ . Môžeme nahliadnuť, že graf  $G_k$  ako svoje podgrafy obsahuje  $k$  disjunktných  $(2, 2)$ -pólov polkormidlo  $K$ . Nech  $G'_k$  je kubický graf, ktorý vznikne tak, že na každom z týchto  $k$  disjunktných podgrafov grafu  $G_k$  potlačíme najprv hranu  $vv_1$  a následne novovzniknutú hranu  $v_2v_3$  (pre lepšie pochopenie toho, ktoré hrany máme na mysli pozri obrázok 3.8). Všimnime si, že graf  $G'_k$  vznikne postupným potlačením  $2k$  hrán grafu  $G_k$ .

**Definícia 3.4.19** (Potlačené zovšeobecnené kormidlo  $G'_k$ ). Graf, ktorý vznikne z grafu zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  vyššie popísaným postupom nazývame potlačené zovšeobecnené kormidlo  $G'_k$ .

Naším cieľom je teraz ukázať, že graf  $G'_k$  je 3-zafarbiteľný, a preto platí  $\sigma(G_k) \leq 2k$ . Na to si pomôžeme ešte jedným pomocným  $(2, 2)$ -pólom.

**Definícia 3.4.20** ( $(2, 2)$ -pól potlačené polkormidlo  $K'$ ). Multipól, ktorý vznikne tak, že v  $(2, 2)$ -póle polkormidlo  $K$  potlačíme hranu  $vv_1$  a následne potlačíme novovzniknutú hranu  $v_2v_3$  nazývame  $(2, 2)$ -pól potlačené polkormidlo  $K'$  (pozri obrázok 3.9).



Obr. 3.9:  $(2, 2)$ -pól potlačené polkormidlo  $K'$  s možným 3-farbením  $c$

*Poznámka 3.4.21.* Podgrafy na obrázku označené ako  $M$  sú Petersenove  $(2, 2)$ -póly.

Pomocou známych 3-farbení Petersenovho  $(2, 2)$ -pólu  $M$  a  $(2, 2)$ -pólu  $I$  môžeme nahliadnuť, že pre  $(2, 2)$ -pól  $K'$  existuje také 3-farbenie  $c$ , ktoré vstupnému konektoru  $S_1$  priradí farbu  $c(S_1) = (a, a)$  a výstupnému konektoru  $S_2$  farbu  $c(S_2) = (b, b)$ , pričom pre farby  $a, b$  platí  $a \neq b$  (pozri obrázok 3.9).

Nech  $M'$  je  $(2, 2)$ -pól, ktorý vznikne spojením  $(2, 2)$ -pólov  $K'I$ . Využitím znalostí o 3-farbení  $(2, 2)$ -pólov  $K'$  a  $I$  môžeme nahliadnuť, že existuje 3-farbenie  $(2, 2)$ -pólu  $M' = K'I$  také, že zafarbí jeho konektory  $S'_1, S'_2$  farbou  $c(S'_1) = c(S'_2) = (a, a)$ .

Nech  $\Gamma_k$  je graf, ktorý vznikne ako uzáver  $k$  postupne spojených  $(2, 2)$ -pólov  $M'$ . Potom z poznatku, že pre každý  $(2, 2)$ -pól  $M'$  existuje také 3-farbenie  $c$ , že zafarbí konektory  $S'_1, S'_2$  farbou  $c(S'_1) = c(S'_2) = (a, a)$  a z konštrukcie grafu  $\Gamma_k$  vyplýva, že graf  $\Gamma_k$  je 3-zafarbiteľný.

Nahliadnime, že graf  $\Gamma_k$  je izomorfný s grafom potlačené zovšeobecnené kormidlo  $G'_k$ , a preto pre sériovú rezistenciu grafu zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  platí  $\sigma(G_k) \leq 2k$ .

Ostáva nám ešte ukázať, že pre každé  $k \in \mathbb{N}$  pre graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  platí  $\pi(G_k) \geq 3k$ .

**Lema 3.4.22.** *Pre ľubovoľný graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  platí  $\pi(G_k) \geq 3k$ .*

*Dôkaz.* Graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  ako svoje podgrafy obsahuje  $k$  disjunktných  $(2, 2)$ -pólov polkormidlo  $K$ , pričom z konštrukcie grafu  $G_k$  vyplýva, že každá hrana grafu  $G_k$  prislúcha najviac jednému z  $(2, 2)$ -pólov  $K$ .

Z lemy 3.4.16 o paralelnej rezistencii  $(2, 2)$ -pólu polkormidlo vieme, že na  $(2, 2)$ -póle polkormidlo  $K$  musíme potlačiť aspoň tri nezávislé hrany, aby vznikol 3-zafarbiteľný graf. Preto musíme na grafe  $G_k$  potlačiť aspoň  $3k$  nezávislých hrán, aby bol výsledný graf 3-zafarbiteľný.

Konečnosť paralelnej rezistencie grafu  $G_k$  zase vyplýva z dôsledku 3.3.4 tvrdenia o 1-faktore, nakoľko ľubovoľný graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  je bezmostový.  $\square$

Tým sme dokázali, že pre každý graf zovšeobecnené kormidlo  $G_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  platí  $\pi(G_k) \geq 3k$  a  $\sigma(G_k) \leq 2k$ . Preto pre ľubovoľné prirodzené číslo  $k$  existuje v triede grafov zovšeobecnené kormidlo taký graf  $G_k$ , pre ktorý platí  $\pi(G_k) - \sigma(G_k) \geq k$ .

Všimnime si, že hodnoty paralelnej a sériovej rezistencie neurčujeme „presne“, uvádzame ich len ako nerovnosti. Je tomu tak z dvoch dôvodov. Jedným dôvodom je, že naším cieľom bolo nájsť „len“ nekonečnú triedu bezmostových kubických grafov s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou takú, že tento rozdiel môže byť ľubovoľne veľký. Druhým dôvodom je fakt, že poznatok o hodnote sériovej rezistencie  $\sigma(G) = 2$  grafu kormidlo  $G$  nie je možné triviálne zovšeobecniť. Síce sa dá ľahko ukázať, že sériová rezistencia  $(2, 2)$ -pólu polkormidlo  $K$  je  $\sigma(K) = 2$ , ale z daného pozorovania nevyplýva, že aj sériová rezistencia ľubovoľného grafu zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  je nutne  $\sigma(G_k) = 2k$ . Je tomu tak preto, že pri sériovej rezistencii môžeme potláčať aj novovzniknuté hrany. Nie je ťažké nahliadnuť, že pri postupnom potláčaní hrán na grafe  $G_k$  môžu niektoré novovzniknuté hrany naraz prislúchať dvom disjunktným podgrafom, ktoré sú izomorfné s  $(2, 2)$ -pólom  $K$ . Preto nevyklúčujeme možnosť, že potlačením niektorých novovzniknutých hrán prislúchajúcich obom  $(2, 2)$ -pólom  $K$  je možné získať 3-zafarbiteľný graf aj skôr ako po  $2k$  potlačeniach hrany.

Ak by sme niekedy chceli skonštruovať nekonečnú triedu bezmostových grafov s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou so známymi hodnotami rezistencií, ako návod nám môže poslúžiť nami zadaná nekonečná trieda grafov zovšeobecnené kormidlo. Intuitívne, ak by sme medzi dva  $(2, 2)$ -póly  $K$  umiestnili „dostatočne veľa“  $(2, 2)$ -pólov  $I$  (v závislosti od  $k$ ), nebolo by možné postupným potláčaním hrán vytvoriť takú hranu, ktorá prislúcha naraz dvom  $(2, 2)$ -pólom  $K$  skôr, ako po  $2k$  potlačeniach hrany. Preto by pre každý graf  $H_k$  z tejto nie príliš exaktne definovanej nekonečnej triedy grafov malo platiť  $\sigma(H_k) = 2k$ , pričom číslo  $k$  reprezentuje počet  $(2, 2)$ -pólov  $K$  v grafe  $H_k$ .

Čo sa týka hodnoty paralelnej rezistencie každého grafu zovšeobecnené kormidlo  $G_k$  domnievame sa, že je skutočne  $\pi(G_k) = 3k$ . Danú rovnosť by nemalo byť ťažké dokázať zovšeobecným 3-farbením grafu potlačené kormidlo.

# Kapitola 4

## Opis funkcionality programu

Súčasťou našej práce je aj program v jazyku C++, ktorý počíta hodnoty Kászonyiho funkcie, paralelnej a sériovej rezistencie. Využíva pri tom dva algoritmy na počítanie hranových 3-farbení na kubických grafoch. Je dobré si uvedomiť, že problém hranovej 3-zafariteľnosti je NP-úplný, a teda nie je známy polynomiálny algoritmus riešiaci tento problém. Preto si musíme vystačiť s algoritmami, ktoré pracujú v exponenciálnej časovej zložitosti. Ich efektívnosť je možné docieľiť len rôznymi heuristikami. Ukazuje sa, že sú na to dobré napríklad SAT solvery. Preto je jedným z algoritmov, ktoré používame SAT solver CryptoMiniSat od autora Mate Soos [14]. Druhý algoritmom je nami implementovaný a vychádza z lemy 3.2.10 o ekvivalencii hranovej 3-zafariteľnosti a rozkladu množiny hrán na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc párnej dĺžky na kubickom grafe. Experimentálnymi pozorovaniami sme zistili, že pre malé grafy je o niečo efektívnejší náš algoritmus, zatiaľ čo pre väčšie grafy je výrazne efektívnejšie redukovať problém hranovej 3-zafariteľnosti na formulu v konjunktívnej normálnej forme a následne na nej spustiť SAT solver. Náš program sa preto na základe veľkosti kubického grafu rozhoduje, ktorý z týchto dvoch algoritmov použije na počítanie počtu rôznych hranových 3-farbení.

Program je schopný efektívne počítať Kászonyiho funkciu, paralelnú a sériovú rezistenciu pre kubické grafy do 60 vrcholov. V priebehu pár minút je dokonca schopný zistiť výsledok pre grafy až do 80 vrcholov.

Ďalej pomocou testovania vstupného súboru vie program rozpoznať a zamietnuť drvivú väčšinu zlých vstupov. Okrem toho, že testuje, či je súbor vyslovene chybný, program tiež vyhodnocuje, či používateľ zadal graf na toľkých vrcholoch, ako deklaruje, či je ním zadaný graf kubický a či neobsahuje orientované hrany.

Súčasťou programu je aj jednoduché grafické rozhranie, čo robí program prístupným aj pre ľudí, ktorí nie sú príliš technicky zdatní.

Program je možné nájsť spolu s návodom na inštaláciu a používanie na stránke: <https://github.com/MatusZubcak/CubicGraphKaszonyiFunctionProgram>

## 4.1 Vybrané implementačné detaily programu

Vzhľadom na rozsah teoretickej časti našej práce sme sa rozhodli pri opise programu vyhnúť podrobným implementačným detailom a opísať len hlavné myšlienky algoritmov, z ktorých vychádza náš program. Opis členenia programu na triedy a použité návrhové vzory sme sa rozhodli vynechať.

Nižšie popísané algoritmy a redukcia hranovej 3-zafarbiteľnosti na problém SAT nie sú novými teoretickými poznatkami a nemali by sme ich chápať ako nový teoretický prínos do tejto oblasti. Uvádzame ich kvôli tomu, aby mal čitateľ lepší prehľad o teoretických základoch, z ktorých vychádza náš program.

### 4.1.1 Počítanie Kászonyiho funkcie, paralelnej a sériovej rezistencie

Kászonyiho funkciu  $\psi(e)$  počítame tak, že najprv potlačíme hranu  $e$  v pôvodnom kubickom grafe a následne na novom grafe spustíme jeden z algoritmov na počítanie hranových 3-farbení, pričom sa pýtame na počet všetkých možných hranových 3-farbení. Pri počítaní paralelnej a sériovej rezistencie okrem algoritmov na počítanie hranových 3-farbení využívame aj prehľadávanie do šírky. Postupne generujeme z už vytvorených grafov hĺbky<sup>1</sup>  $k$  operáciou potlačenia hrany grafy hĺbky  $k + 1$ . Vždy, keď zgenerujeme nový graf, pýtame sa, či existuje hranové 3-farbenie pre daný graf. Takto postupujeme, kým nenájdeme hranovo 3-zafarbiteľný graf alebo nevyskúšame všetky prípustné možnosti.

### 4.1.2 Algoritmus počítajúci hranové 3-farbenia

Z lemy 3.2.10 vieme, že kubický graf má hranové 3-farbenie práve vtedy, keď sa jeho množina hrán dá rozložiť na 1-faktor a množinu disjunktných kružníc párnej dĺžky. Ak by sme mali nedeterministický Turingov stroj  $A$ , mohli by problém hranovej 3-zafarbiteľnosti riešiť nasledovne:

1. „tipneme“ si vyhovujúci 1-faktor  $F$ ,
2. overíme, či sú všetky kružnice z  $E(G) - F$  párnej dĺžky

Náš algoritmus funguje simulovaním nedeterministického Turingovho stroja  $A$ . Pomocou spätného prehľadávania postupne generujeme všetky 1-faktory kubického grafu  $G$  a následne overujeme, či pre daný 1-faktor  $F'$  sú všetky kružnice z  $E(G) - F'$  párnej dĺžky.

---

<sup>1</sup>Pod pojmom hĺbka grafu  $G'$  máme v tomto kontexte na mysli počet hrán, ktoré je potrebné potlačiť, aby z pôvodného grafu  $G$  vznikol graf  $G'$ .



Aj keď má tento algoritmus exponenciálnu časovú zložitosť rovnako ako algoritmus založený na skúšaní všetkých hranových 3-farbení pomocou spätného prehľadávania, experimentálne sme zistili, že nami popísaný algoritmus je efektívnejší pre malé grafy.

### 4.1.3 Redukcia hranovej 3-zafarbiteľnosti na problém SAT

Vieme, že kubický graf  $G$  s množinou izolovaných kružníc  $C$  je 3-zafarbiteľný práve vtedy, keď je zafarbiteľný kubický graf  $G' = (V(G), E(G) - C)$ . Preto nám stačí spraviť redukciu problému hranovej 3-nezafarbiteľnosti na problém SAT pre kubické grafy bez izolovaných kružníc.

Problém hranovej 3-zafarbiteľnosti na kubických grafov prevedieme na problém SAT konštrukciou formuly  $F$  v konjunktívnom normálnom tvare. Následne dokážeme, že je táto redukcia správna.

Pre každú hranu  $x$  grafu  $G$  zavedieme tri boolovské premenné  $x_1, x_2, x_3$ . Každá z týchto premenných reprezentuje jednu z farieb  $\{1, 2, 3\}$ , ktorými môže byť hrana  $x$  zafarbená. Formula  $F$  potom obsahuje nasledovné klauzuly:

- pre každú hranu  $x \in E(G)$  pridáme do formuly klauzulu  $K_x = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ . Daná klauzula  $K_x$  vyjadruje, že hrana  $x$  je zafarbená aspoň jednou farbou,
- pre každý vrchol  $v \in E(G)$  a ľubovoľnú farbu  $a \in \{1, 2, 3\}$  pridáme do formuly tri nasledovné klauzuly  $K_{v,a}^1 = (\neg x_a \vee \neg y_a)$ ,  $K_{v,a}^2 = (\neg x_a \vee \neg z_a)$ ,  $K_{v,a}^3 = (\neg y_a \vee \neg z_a)$ , pričom  $x, y, z$  sú tri hrany, s ktorými je vrchol  $v$  incidentný. Tieto tri klauzuly spoločne vyjadrujú, že najviac jedna spomedzi všetkých hrán incidentných s vrcholom  $v$  je zafarbená farbou  $a$ .

Formula  $F$  neobsahuje žiadne iné klauzuly. Teraz dokážeme, že táto redukcia je správna.

**Lema 4.1.1.** *Nech  $G$  je kubický graf bez izolovaných kružníc. Ďalej nech  $F_G$  je formula v konjunktívnej normálnej forme, ktorá vznikla z grafu  $G$  vyššie popísaným spôsobom. Potom graf  $G$  je hranovo 3-zafarbiteľný práve vtedy, keď je formula  $F_G$  splniteľná.*

*Dôkaz.* Na úvod krátka odbočka k značeniu. Boolovská hodnota 1 značí pravdu – true a boolovská hodnota 0 značí nepravdu – false.

$\Rightarrow$  Nech  $G$  je hranovo 3-zafarbiteľný. Potom existuje hranové 3-farbenie  $c$  grafu  $G$ , ktoré priradí každej hrane  $x \in E(G)$  práve jednu farbu z množiny  $\{1, 2, 3\}$ . Ohodnoňme boolovské premenné  $x_a, x \in E(G), a \in \{1, 2, 3\}$  nasledovne:

- $x_a = 1$  ak  $c(x) = a$ ,
- $x_a = 0$  inak.

Môžeme nahliadnuť, že všetky klauzuly  $K_x$ ,  $x \in E(G)$  sú splnené, pretože 3-farbenie  $c$  priradilo každej hrane  $x \in E(G)$  jednu farbu. Dané ohodnotenie boolovských premenných nám tiež zaručuje, že pre každý vrchol  $v \in V(G)$  a farbu  $a \in \{1, 2, 3\}$  sú splnené všetky tri formuly  $K_{v,a}^1, K_{v,a}^2, K_{v,a}^3$ . Dané pozorovanie vyplýva z toho, že pre každé dve susedné hrany  $x, y \in E(G)$  a 3-farbenie  $c$  platí  $c(x) \neq c(y)$ .

$\Leftarrow$  Predpokladajme, že existuje také ohodnotenie boolovských premenných, že formula  $F$  je splniteľná. Na základe tohto ohodnotenia ukážeme, že existuje 3-farbenie  $c$  grafu  $G$ .

Definujme zobrazenie  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  nasledovným spôsobom:  $c(x) = a$ , ak boolovská premenná  $x_a = 1$ , pričom  $a \in \{1, 2, 3\}$ . Tvrdíme, že zobrazenie  $c$  je hranové 3-farbenie grafu  $G$ . Sú len tri možnosti, čo by sa mohlo pri tomto definovaní „pokažiť.“ Prvým problémom môže byť, že zobrazenie  $c$  nie je jednoznačné. Ďalej sa ešte môže stať, že zobrazenie  $c$  nepriraduje hodnotu každej hrane z  $E(G)$ . Posledný problém, ktorý môže nastať je, že zobrazenie  $c$  nie je 3-farbením. Teraz *sporom* ukážeme, že ani jedna z týchto troch možností nastať nemôže:

- predpokladajme, že pre niektorú hranu  $x \in E(G)$  je zobrazenie  $c$  nejednoznačné. Potom ale musia byť aspoň dve z premenných  $x_1, x_2, x_3$  ohodnotené hodnotou 1. Nech  $v$  je vrchol incidentný s hranou  $x$ . Potom môžeme nahliadnuť, že aspoň jedna z klauzúl  $K_{v,a}^i$ ,  $a, i \in \{1, 2, 3\}$  nie je splniteľná. To je v spore so splniteľnosťou formuly  $F$ ,
- predpokladajme, že existuje hrana  $x \in E(G)$ , pre ktorú zobrazenie  $c$  nie je definované. Potom ale  $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$ , teda aj klauzula  $K_x$  je ohodnotená  $K_x = 0$ , čo je v spore so splniteľnosťou formuly  $F$ . Táto možnosť teda tiež nemôže nastať,
- predpokladajme, že zobrazenie  $c$  nie je 3-farbenie, teda existujú dve *susedné* hrany  $x, y$  a farba  $a \in \{1, 2, 3\}$ , pre ktoré platí  $c(x) = c(y) = a$ . Potom pre vrchol  $v$ , ktorý je incidentný s hranami  $x, y$  nie je splnená klauzula  $K_{v,a}^1 = (\neg x_a \vee \neg y_a)$ , čo je spor.

Tým sme dokázali, že nami definované zobrazenie  $c$  je jednoznačné a je 3-farbením, čím sme dokázali, že platí aj opačná implikácia.  $\square$

# Záver

V našej práci sme za pomoci výpočtovej techniky skúmali hodnoty Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  ako aj paralelnú a sériovú rezistenciu na kubických grafoch. Určili sme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(e)$  pre každú hranu  $e$  každého grafu z dvoch nekonečných tried 3-nezafarbitelných kubických grafov – Isaacsových snarkov a zovšeobecnených Blanušových snarkov. Ako jedno z možných pokračovaní skúmania Kászonyiho funkcie je možné zamerať sa na hľadanie všeobecného postupu, ako určovať hodnoty Kászonyiho funkcie pre ľubovoľnú hranu každého kubického 3-nezafarbitelného grafu.

Tiež sme skúmali rozdiely medzi paralelnou a sériovou rezistenciou. Dokázali sme, že každý kubický graf s 1-faktorom má konečnú paralelnú rezistenciu, čoho dôsledkom je, že všetky bezmostové kubické grafy majú konečnú paralelnú rezistenciu. Ďalej sme skonštruovali nekonečnú triedu kubických grafov s nekonečnou paralelnou rezistenciou. Ostáva však otvoreným problémom hodným ďalšieho skúmania, ktoré kubické grafy s mostom majú konečnú paralelnú rezistenciu.

V závere skúmania rozdielov medzi paralelnou a sériovou rezistenciou sme skonštruovali nekonečnú triedu bezmostových kubických grafov s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou, pričom pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n \in \mathbb{N}$  existuje v tejto triede taký graf  $G$ , pre ktorý je rozdiel jeho paralelnej a sériovej rezistencie väčší ako  $n$ . Tento poznatok je dôkazom toho, že má zmysel v budúcnosti skúmať obe rezistencie, pretože existujú také kubické grafy, ktoré majú rôzne hodnoty paralelnej a sériovej rezistencie. Rozumným pokračovaním výskumu by tu mohla byť konštrukcia nekonečnej triedy bezmostových kubických grafov s takou vlastnosťou, že pre ľubovoľné racionálne číslo  $q \in \mathbb{Q}^+$  existuje v tejto triede kubický graf  $G$  taký, že pre jeho rezistencie platí  $\sigma(G)/\pi(G) \leq q$ . Skúmanie rozdielov medzi paralelnou respektíve sériovou rezistenciou a vrcholovou respektíve tokovou rezistenciou ostáva tiež otvoreným problémom hodným ďalšieho výskumu.

Súčasťou našej práce je aj program na počítanie hodnôt Kászonyiho funkcie a paralelnej či sériovej rezistencie. Vďaka nášmu programu sa nám podarilo sformulovať niektoré hypotézy, ktoré sa následnej premietli aj do teoretických výsledkov našej práce. Veríme, že si program nájde uplatnenie aj v budúcnosti, ak sa napríklad niekto rozhodne pokračovať v skúmaní Kászonyiho funkcie alebo paralelnej a sériovej rezistencie.



# Literatúra

- [1] I. Allie, E. Máčajová, and M. Škoviera. Snarks with resistance  $n$  and flow resistance  $2n$ . *The Electronic Journal of Combinatorics*, 29(1), March 2022.
- [2] Emily Walther Ariana Cappon. Prime factorization of Kászonyi numbers. *Research Experience for Undergraduates Research Reports*, pages 60–89, 2013.
- [3] D. Blanuša. Problem cetiriju boja. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [4] Richard C. Bradley. Snarks from a Kászonyi perspective: A survey. *Discret. Appl. Math.*, 189:8–29, 2015.
- [5] Reinhard Diestel and Daniela Kühn. Graph-theoretical versus topological ends of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 87(1):197–206, 2003.
- [6] M. A. Fiol, G. Mazzuoccolo, and E. Steffen. Measures of edge-uncolorability of cubic graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 25(4), December 2018.
- [7] M. Gardner. Mathematical games: Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem. *Scientific American*, 234:126–130, 1976.
- [8] Rufus Isaacs. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 82:221–239, 1975.
- [9] A. B. Kempe. A memoir on the theory of mathematical form. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 177:1–70, 1886.
- [10] L. Kászonyi. On the nonplanarity of some cubic graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 15:123–131, 1972.
- [11] L. Kászonyi. On the structure of coloring graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 16:25–36, 1973.
- [12] Ján Mazák. Circular chromatic index of type 1 Blanuša snarks. *Journal of Graph Theory*, 59(2):89–96, 2008.
- [13] J. Petersen. Die theorie der regulären graphe. *Acta Math., Stockholm*, 15:193–220, 1891.

- [14] Mate Soos, Karsten Nohl, and Claude Castelluccia. Extending SAT solvers to cryptographic problems. In Oliver Kullmann, editor, *Theory and Applications of Satisfiability Testing - SAT 2009, 12th International Conference, SAT 2009, Swansea, UK, June 30 - July 3, 2009. Proceedings*, volume 5584 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 244–257. Springer, 2009.
- [15] Eckhard Steffen. Classifications and characterizations of snarks. *Discrete Mathematics*, 188:183–203, 06 1998.
- [16] John J. Watkins. Snarks. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576(1):606–622, 1989.