

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

BANOVA-LINIALOVA HYPOTÉZA
BAKALÁRSKA PRÁCA

2023

TATIANA HUSÁROVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

BANOVA-LINIALOVA HYPOTÉZA
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2023
Tatiana Husárová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Tatiana Husárová
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Banova-Linialova hypotéza
The Ban-Linial conjecture

Anotácia: V roku 2015 Ban a Linial vyslovili hypotézu, že každý kubický graf s výnimkou Petersenovho grafu má 2-bisekciu, čiže zafarbenie vrcholov dvomi farbami také, že komponenty grafu indukované každou z farieb majú najviac dva vrcholy a celkový počet vrcholov v jednotlivých farbách je rovnaký. Existencia takéhoto farbenia má súvislosti s viacerými oblasťami teórie grafov, napríklad cirkulárnym tokovým číslom. Spomínaná hypotéza je doposiaľ široko otvorená.

Úlohou študenta bude navrhnúť a implementovať algoritmus, ktorý bude testovať existenciu takéhoto farbenia na kubických grafoch a na základe počítačových výsledkov hľadať možné zosilnenia tejto hypotézy, prípadne dokázať teoretické tvrdenia, ktoré boli sformulované vďaka počítačovým experimentom.

Vedúci: doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania: 20.10.2022

Dátum schválenia: 31.10.2022

doc. RNDr. Dana Pardubská, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie: Ďakujem vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za priateľský prístup a cenné rady, ktoré mi poskytovala počas tvorby tejto práce. Ďalej chcem poďakovať svojej rodine, kamarátom a spolužiakom.

Abstrakt

V našej práci sme sa venovali rôznym variáciám a možným zosilneniam Banovej-Linialovej hypotézy, ktorá hovorí o existencii 2-bisekcie pre každý kubický bezmostový graf okrem Petersonovho. V prvej časti sme sa zameriavali na extrémálne grafy pre Banovu-Linialovu hypotézu, kde sme skúmali množinu grafov s najmenším počtom 2-bisekcií a množinu grafov s najväčším počtom 2-bisekcií. Popísali sme množinu grafov s minimálnym počtom 2-bisekcií a pre každý graf z tejto množiny sme dokázali existenciu jedinej 2-bisekcie. Pre množinu s maximálnym počtom 2-bisekcií sme popísali správanie grafov s rastúcim počtom vrcholov. V druhej časti sme upustili od podmienky rovnakého počtu vrcholov v oboch partíciách 2-bisekcie a pozorovali sme maximálny rozdiel vrcholov v týchto partíciách. Zdefinovali sme konštrukciu, ktorou sme dokázali zostrojiť graf s ľubovoľne veľkým rozdielom vrcholov medzi dvoma partíciami 2-bisekcie a teoreticky sme odvodili, že tento rozdiel je najväčší možný vzhľadom na počet vrcholov grafu.

Kľúčové slová: Banova-Linialova hypotéza, 2-bisekcia, extrémálne grafy, maximalizácia rozdielu

Abstract

In our paper, we focused on various variations and possible strengthening of Ban-Linial's conjecture, which states the existence of a 2-bisection for every bridgeless cubic graph except for the Peterson graph. In the first part, we studied extremal graphs for Ban-Linial's conjecture, where we examined the set of graphs with the smallest number of 2-bisections and the set of graphs with the largest number of 2-bisections. We described the set of graphs with the minimum number of 2-bisections and we proved the existence of a unique 2-bisection for each graph from this set. For the set with the maximum number of 2-bisections, we described the behavior of graphs with an increasing number of vertices. In the second part, we abandoned the condition of having an equal number of vertices in both partitions of the 2-bisection and instead observed the maximum difference in vertices between the two partitions. We defined a construction that allowed us to construct a graph with arbitrarily large differences in vertices between the two partitions of the 2-bisection, and theoretically derived that this difference is the largest possible given the number of vertices in the graph.

Keywords: Ban-Linial theorem, 2-bisection, extremal graphs, maximalization of difference

Obsah

Základné pojmy a označenia	1
Úvod	3
1 Východiská našej práce	5
1.1 Cycle premutation grafy	7
1.2 Claw-free grafy	8
1.3 Treelike snarky	9
2 Implementácia algoritmov	13
2.1 Backtrack	13
2.2 Algoritmus s orezávaním	14
3 Pozorovania	19
3.1 Časové porovnanie algoritmov	19
3.2 Výsledky pre pozorované atribúty	19
4 Vyslovenie hypotéz a ich dokazovanie	23
4.1 Minimalizácia počtu farbení	23
4.2 Maximalizácia počtu farbení	28
4.3 Maximalizácia rozdielu	31
4.3.1 Konštrukcia grafov s ľubovoľne veľkým rozdielom	31
4.3.2 Horné ohraničenie rozdielu	32
Záver	35
Príloha A	39

Zoznam obrázkov

1.1	Kontrapríklad pre grafy s mostom	6
1.2	Kubický cycle permutation graf	8
1.3	Príklad bisekcie na prsteneci diamantov z práce [7]	9
1.4	Príklad fragmentu [9]	10
1.5	Postup konštrukcie Petersonovho fragmentu z práce [9]	10
1.6	Príklady na treelike snarky z práce [9]	11
2.1	Kontrapříklad	15
2.2	Kontrapříklad	16
4.1	Mostový graf $2K_4$ s jednou 2-bisekciou	23
4.2	Možné korektné zafarbenia grafu $K_4 - e$	23
4.3	Graf naľavo je $K_{3,3}$ a graf napravo je $K_{2,3}$	24
4.4	Graf G' skonštruovaný 3-súčinom z dvoch $K_{3,3}$	25
4.5	Grafy B_0, B_1, B_2, B_3 s práve jedným farbením	27
4.6	Podgraf F	28
4.7	Transformácia	28
4.8	Grafy v prekreslenom tvare	29
4.9	Očakávané tvary grafu pre $n = 24$	29
4.10	Skúmané tvary grafov pre $n = 32$	30
4.11	Skúmané tvary grafov pre $n = 30$	30
4.12	Komponent T	31
4.13	Spájanie jednotlivých T komponentov	32

Základné pojmy a označenia

$G(V, E)$	graf G je daný konečnou neprázdnu množinou vrcholov V a množinou hrán E , kde E je množina 2-prvkových podmnožín množiny V
<i>hrana ab</i>	hranu $\{a, b\}$ budeme skrátene označovať ab
<i>incidentný vrchol</i>	vrchol v je <i>incidentný</i> s hranou e ak $v \in e$
<i>koncový vrchol</i>	dva vrcholy, ktoré sú incidentné s hranou e nazývame <i>koncové</i> vrcholy hrany e
<i>susedné vrcholy</i>	dva koncové vrcholy tej istej hrany nazývame <i>susedné</i>
<i>susedné hrany</i>	dve hrany, ktoré zdieľajú vrchol nazývame <i>susedné</i>
$N(v)$	množina susedných vrcholov vrchola v
$d(v)$	<i>stupeň vrchola</i> , počet hrán incidentných s vrcholom v
<i>minimálny stupeň</i>	$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$
<i>maximálny stupeň</i>	$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$
<i>regulárny graf</i>	graf nazveme <i>regulárny</i> ak všetky jeho vrcholy majú rovnaký stupeň. Ak je tento spoločný stupeň k , hovoríme, že graf je <i>k-regulárny</i>
<i>podgraf</i>	graf $G'(V', E')$ je <i>podgrafom</i> grafu $G(V, E)$ ak platí $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$
<i>indukovaný podgraf</i>	podgraf $G'(V', E')$ je <i>indukovaným podgrafom</i> grafu $G(V, E)$ ak platí $V' \subseteq V$ a medzi vrcholmi V' existujú v grafe G' rovnaké hrany ako v grafe G

<i>komponent</i>	<i>komponent</i> je maximálny súvislý podgraf grafu G vzhľadom na inklúziu
<i>sled</i>	postupnosť $v_1e_1v_2...v_n$, kde v_i je vrchol pre $i \in \{1, 2, ..., n\}$, e_j je hrana pre $j \in \{1, 2, ..., n - 1\}$ a $e_k = v_kv_{k+1}$
<i>ťah</i>	<i>ťah</i> je sled, kde sa neopakujú hrany
<i>cesta</i>	<i>cesta</i> je ťah, kde sa neopakujú vrcholy
<i>dĺžka cesty</i>	je definovaná ako počet hrán na ceste
<i>vrcholové farbenie</i>	<i>vrcholové farbenie</i> grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \rightarrow S$, prvkom množiny S hovoríme aj farby

Úvod

V teórii grafov je mnoho otvorených hypotéz. Od jednej z nich sa bude odvíjať aj téma našej bakalárskej práce. Ban a Linial vo svojej práci *Internal partitions of regular graphs*[2] vyslovili hypotézu pre všetky bezmostové kubické grafy. Tá hovorí o tom, že pre všetky takéto grafy okrem Petersenovho existuje 2-bisekcia, čiže zafarbenie vrcholov dvomi farbami také, že komponenty grafu indukované každou z farieb majú najviac dva vrcholy a celkový počet vrcholov v jednotlivých farbách sa rovná.

Táto hypotéza bola doposiaľ dokázaná len pre menšie množiny grafov. Viac sa tejto téme budeme venovať v kapitole *Východiská našej práce*.

V našej práci sa budeme venovať skúmaniu možných zosilnení a iných variácií samotnej Banovej-Linialovej hypotézy na menších množinách grafov, nie jej priamemu dokazovaniu. V prvej časti sa budeme venovať opisu implementácie dvoch algoritmov, ktoré nám poslúžia pri prehľadávaní rôznych vrcholových farbení na kubických grafoch. Za korektné budeme považovať farbenie vtedy, ak každý komponent indukovaný týmto farbením bude najviac 2-vrcholový. Oba algoritmy budú overovať každé možné korektné zafarbenie, pričom prvý bude používať nami navrhnuté orezávanie a druhý bude používať hrubú výpočtovú silu. Zvolili sme dva algoritmy, nakoľko sa algoritmus s orezávaním nevnára do všetkých vetiev. Druhý jednoduchší algoritmus využívajúci prehľadávanie formou backtracku nám poslúži na kontrolu výsledkov.

Budeme sa zameriavať na extrémálne grafy pre Banovu-Linialovu hypotézu. To sú také, pre ktoré existuje iba jedno korektné farbenie za podmienky rovnakého počtu vrcholov jednej farby a vrcholov druhej farby a také, pre ktoré existuje najviac takýchto farbení za rovnakej podmienky vzhľadom na počet vrcholov. Pre množinu grafov s minimálnym počtom 2-bisekcií nájdených pomocou algoritmického prehľadávania v kapitole *Minimalizácia počtu farbení*, dokážeme pre každý graf z danej množiny tvrdenie o existencii práve jedného korektného farbenia, spĺňajúceho podmienku rovnosti počtu vrcholov. Rovnako vyslovíme hypotézu o množine grafov s touto vlastnosťou. Ďalej, na základe pozorovaní výsledkov programu, vyslovíme v kapitole *Maximalizácia počtu farbení* hypotézu o grafoch s maximálnym počtom korektných farbení, spĺňajúcich podmienku rovnosti počtu vrcholov oboch farieb.

V ďalšej časti upustíme od podmienky rovnakého počtu vrcholov dvoch farieb a v

kapitole *Maximalizácia rozdielu* budeme maximalizovať rozdiel medzi počtom vrcholov jednej farby a počtom vrcholov druhej farby. Popíšeme triedu grafov, ktorá nadobúda ľubovoľne veľký rozdiel, a teoreticky odvodíme horné ohraničenie veľkosti tohto rozdielu vzhľadom na počet vrcholov grafu, čím ukážeme, že tento odhad je tesný.

Kapitola 1

Východiská našej práce

V tejto kapitole sa pozrieme na dokázané tvrdenia a hypotézy, na základe ktorých vznikla téma pre našu bakalársku prácu. V súčasnosti je daná problematika stále široko otvorená a má prienik s mnohými inými oblasťami teórie grafov.

Definícia 1.0.1. *Vonkajšie delenie* n -vrcholového grafu $G = (V, E)$ je také delenie vrcholov, že každý vrchol má najviac toľko susediacich vrcholov v jeho vlastnej časti ako v ostatných.

Definícia 1.0.2. *Vnútorne delenie* n -vrcholového grafu $G = (V, E)$ je také delenie vrcholov, že každý vrchol má aspoň toľko susediacich vrcholov v jeho vlastnej časti ako v ostatných.

Definícia 1.0.3. *Bisekcia* je rozdelenie vrcholovej množiny grafu G na dve časti tak, aby sa počet vrcholov v jednotlivých častiach líšil najviac o jedna. Keďže kubické grafy majú párny počet vrcholov, v kubických grafoch sa počet vrcholov v oboch častiach rovná. Bisekcia môže byť indukovaná vrcholovým farbením dvoma farbami F_1, F_2 , budeme označovať (F_1, F_2) . Bisekciu budeme hovoriť k -bisekcia, ak každý komponent indukovaný takýmto farbením bude mať počet vrcholov najviac k .

Poznámka 1.0.4. Vonkajšia (vnútorná) bisekcia je špeciálny prípad vonkajšieho (vnútorného) delenia, kde máme graf rozdelený len na dve časti.

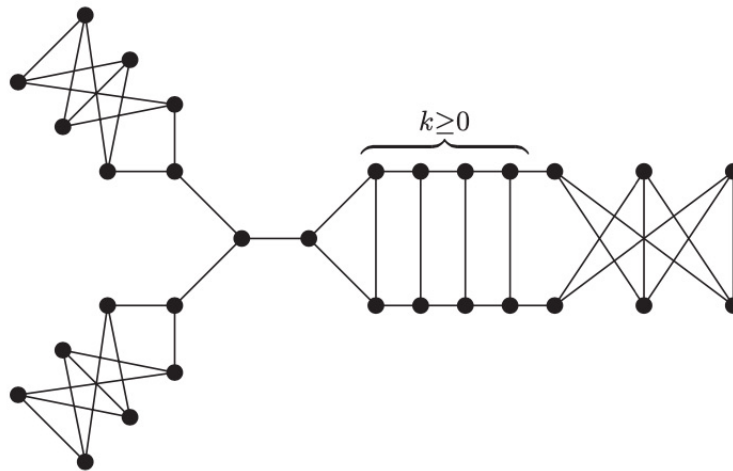
V našej práci sa budeme zameriavať na kubické grafy. Pre lepšiu predstavu by sme vonkajšiu bisekciu na kubických grafoch opísali ako farbenie dvoma farbami, ktoré spĺňa nasledovné podmienky:

- Počet vrcholov jednej farby sa rovná počtu vrcholov druhej farby
- Každý vrchol má najviac jedného suseda rovnakej farby

Predpokladá sa, že každý d -regulárny graf s $n > N(d)$ vrcholmi má vnútorné delenie[3]. V roku 2015 Ban a Linial vo svojej štúdií [2] dokázali tento predpoklad pre $d = 6$. Ďalej sa v práci špeciálne zaoberali prípadmi, kde platilo $d = n - 4$, čo viedlo k mnohým novým otvoreným problémom pre kubické grafy. Vyslovili hypotézu:

Hypotéza 1.0.5. (Ban a Linial [2]) *Petersenov graf je jediný 2-súvislý kubický graf, ktorý nemá vonkajšiu 2-bisekciu.*

Ban a Linial sa venovali bezmostovým grafom, ale kubický graf s mostom, ktorý naozaj potvrdzoval nutnosť požiadavky na neprítomnosť mostov v Banovej-Linialovej hypotézy 1.0.5 uverejnili až Esperet, Mazzuoccolo a Tarsi rok nato vo svojej práci [6] (Obr. 1.1).



Obr. 1.1: Kontrapríklad pre grafy s mostom

Hypotéza 1.0.5 bola dokázaná pre konkrétne triedy bezmostových grafov: Cycle permutation grafy[8], Claw-free grafy[7] a Treelike snarky[11].

Ďalšia hypotéza 1.0.6 Bana a Liniala hovorí o tom, že ľubovoľný kubický graf sa dá zafarbiť dvomi farbami tak, aby každý komponent indukovaný takýmto zafarbením bol najviac dvojvrcholový a rozdiel počtu vrcholov jednej farby a druhej farby bol najviac dva.

Hypotéza 1.0.6. (Ban a Linial [2]) *Každý kubický graf má vonkajšie delenie (B, W) s $||B| - |W|| \leq 2$.*

Hypotéza 1.0.5 ako aj hypotéza 1.0.6 úzko súvisia aj s inými oblasťami teórie grafov, a to napríklad s cirkulárnym tokovým číslom.

Definícia 1.0.7. Tok na grafe G je usporiadaná dvojica (D, f) , kde D je orientácia hrán grafu a f je priradenie hodnôt hranám. Hodnotu hrany e budeme označovať $\varphi(e)$. Pre každý vrchol v platí *podmienka kontinuity* - súčet hodnôt hrán, ktoré vychádzajú z vrchola v je rovný súčtu hodnôt hrán, ktoré vchádzajú do vrchola v .

Nikde-nulový r -tok je tok grafu G , od ktorého požadujeme pre všetky hrany e grafu G $\varphi(e) \neq 0$ a zároveň $\varphi(e) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(r-1)\}$.

Definícia 1.0.8. Cirkulárne tokové číslo $\phi_c(G)$ grafu G je infimum množiny reálnych čísel r , pre ktoré má G nikde-nulový r -tok. Ak má graf G most, definujeme $\phi_c(G) = \infty$.

Tutte vyslovil hypotézu, že celočíselné tokové číslo bezmostového grafu je najviac 5, čo je ekvivalentné nasledujúcej hypotéze:

Hypotéza 1.0.9. (*W. T. Tutte [6]*) Pre každý bezmostový graf G platí $\phi_c(G) \leq 5$.

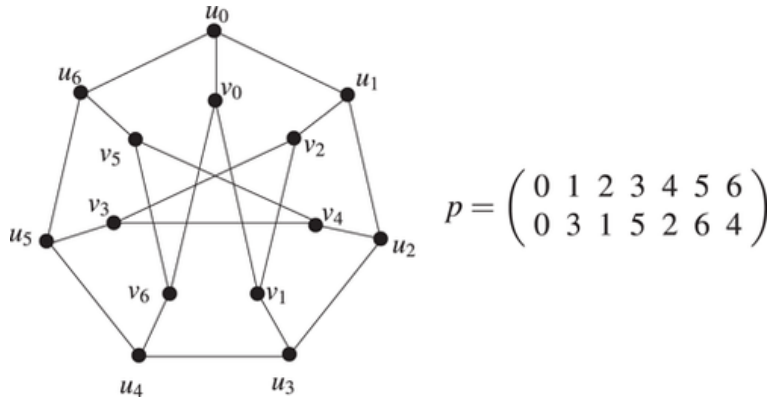
Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf spĺňa Banovu-Linialovu hypotézu 1.0.6. Kontrapríklady by sme teda hľadali v množine kubických grafov, pre ktoré platí $\phi_c(G) \geq 5$. Tutte však prišiel s Hypotézou 1.0.9. Problém je teda naďalej otvorený pre $\phi_c(G) = 5$.

V našej práci sa nebudeme venovať dokazovaniu ani jednej zo samotných Banovej-Linialových hypotéz, ale zameriame sa na skúmanie extrémálnych grafov vzhľadom na počet 2-bisekcií. V ďalšej časti upustíme od podmienky rovnakého počtu vrcholov v oboch partíciách, pričom ale zachováme podmienku o najviac 2-vrcholových komponentoch a budeme hľadať maximálny rozdiel medzi počtom vrcholov v oboch partíciách. Na záver uvedieme niektoré nekonečné množiny grafov, pre ktoré je Banova-Linialova hypotéza overená.

1.1 Cycle permutation grafy

Majme graf G s n vrcholmi pričom platí $n \leq 4$. Vrcholy grafu G budú postupne označené od 0 po $n-1$. Ďalej majme permutáciu $\alpha \in S_n$. Graf α -permutation G_α bude určený grafom G a permutáciou $P_\alpha(G)$. Graf G_α zostrojíme z grafu G vytvorením jeho dvoch kópií G', G'' a pridaním n hrán pre $i \in \{0, \dots, n-1\}$ medzi vrcholmi i v grafe G' a vrcholmi $\alpha(i)$ v grafe G'' . Ak pre graf G_α platí, že vrchol i je susedný práve s vrcholom $(i+1) \bmod n$ a s vrcholom $(i-1) \bmod n$, potom hovoríme, že graf G_α je *cycle permutation* graf a budeme ho označovať $C(n, \alpha)$. Príklad kubického cycle permutation grafu je na Obr. 1.2[8]

Abreu, Goedgebeur, Labbate a Mazzuoccolo sa vo svojej práci *Colourings of cubic graphs inducing isomorphic monochromatic subgraphs*[8] zameriavali na dokázanie



Obr. 1.2: Kubický cycle permutation graf

silnej závislosti medzi Banovou-Linialovou Hypotézou 1.0.5 a hypotézou o lineárnom delení kubických grafov na lineárne lesy z práce *Problem 13*[10], s hypotézou o bisekcii kubických grafov na izomorfné podgrafy z práce *Graphs with monochromatic triangles in every edge coloring*[1]

Tvrdenie 1.1.1. (*Ban a Linial [2]*) Každý 3-zafarbiteľný kubický graf má 2-bisekciu.

Tvrdenie 1.1.2. (*Mazzuoccolo, Esperet a Tarsi [5]*) Ak bezmostový kubický graf G neobsahuje 2-bisekciu, potom pre graf G platí $\phi_c(G) \geq 5$.

Tvrdenie 1.1.2 je silnejšou verziou tvrdenia 1.1.1 a dokázali ho Mazzuoccolo, Esperet a Tarsi v práci *The structure of graphs with circular flow number 5 or more, and the complexity of their recognition problem.* [5].

V dôkaze existencie 2-bisekcie pre všetky kubické cycle permutation grafy budeme riešiť dva prípady - párný a nepárny počet vrcholov pôvodného grafu G . Pri párnom počte vrcholov n vieme, že graf G je 2-faktor z 2 kružníc párnej dĺžky. Je zjavné, že v tomto prípade môžeme zafarbiť hrany kružnice v grafe G' striedavo dvomi farbami. Rovnaké platí pre hrany grafu G'' . Tretiu farbu použijeme na zafarbenie hrán, ktoré nepatria grafu G' ani G'' . Tu sa odvoláme na tvrdenie 1.1.1 a tým je dôkaz pre párne n ukončený.

Prípad nepárneho n je rozobraný v práci *Colourings of cubic graphs inducing isomorphic monochromatic subgraphs*[8] v časti 2.1.

1.2 Claw-free grafy

Definícia 1.2.1. *Hviezda (star)* je kompletný bipartitný graf $K_{1,k}$. *Pazúr (claw)* je hviezda $K_{1,3}$.

Graf nazývame *claw-free*, ak neobsahuje claw ako indukovaný podgraf. Nech G je claw-free bezmostový kubický graf. *Diamantom (diamond)* budeme nazývať graf, ktorý

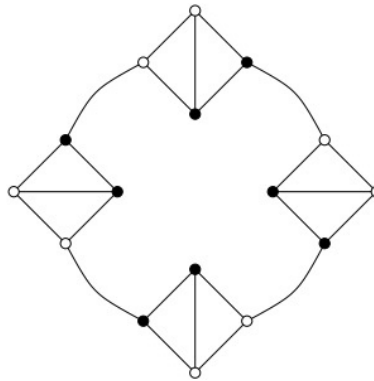
je indukovaný podgraf grafu G a je izomorfný s $K_4 - e$. Ďalej budeme označovať takéto grafy D . *Reťazec diamantov* (*string of diamonds*) grafu G je najdlhšia postupnosť $D_1, \dots, D_k$ diamantov, kde pre $1 \leq i \leq k - 1$ má D_i susedný vrchol v D_{i+1} . Ak je navyše každý vrchol súvislého claw-free grafu G súčasťou diamantu, graf G nazývame *prstenec diamantov* (*ring of diamonds*). [7]

Tvrdenie 1.2.2. (*Oum [4]*) Graf G je claw-free bezmostový a kubický práve vtedy keď

- (i) $G \simeq K_4$ alebo
- (ii) G je prstenec diamantov alebo
- (iii) G vieme zostrojiť z bezmostového kubického multigrafu H nahradením ľubovoľných hrán reťazcami diamantov a nahradením každého vrchola grafu H trojuholníkom

Príklad zafarbenia prstenca diamantov je zobrazený na Obr 1.3. Zovšeobecnením tohto farbenia dokážeme algoritmicky generovať farbenie pre ľubovoľný prstenec diamantov. Indukovaním popísaného farbenia vzniká 2-bisekcia a týmto sme teda ukázali dôkaz pre bod (i) a bod (ii).

Dôkaz o existencii 2-bisekcie pre bod (iii) nájdeme popísaný v práci *A note on 2-bisections of claw-free cubic graphs* [7] na strane 216.



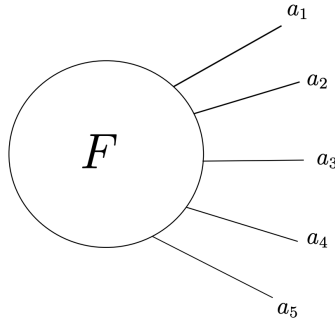
Obr. 1.3: Príklad bisekcie na prstenci diamantov z práce [7]

1.3 Treelike snarky

Snarkmi budeme nazývať množinu kubických grafov, ktoré sa nedajú hranovo zafarbiť tromi farbami. Snarkov existuje nekonečne veľa a pravdepodobne najznámejším snarkom je Petersenov graf.

Každá hrana sa skladá z dvoch *polhrán* (*half-edges*). Každá polhrana je incidentná s práve jedným vrcholom a budeme hovoriť, že dve hrany sú *pridružené* (*associated*)

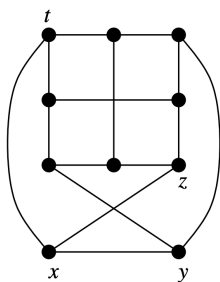
pokiaľ spolu tvoria hranu. Jedna polhrana môže byť súčasťou najviac jednej hrany a polhrane, ktorá nie je súčasťou žiadnej hrany, budeme hovoriť *voľná (loose)*. Grafy, ktoré obsahujú voľné polhrany budeme označovať *zovšeobecnené grafy (generalised graphs)*. Podobne ako pri grafoch, s ktorými sme pracovali doteraz, zovšeobecnený graf budeme nazývať kubický, ak z každého vrchola budú vychádzať práve 3 polhrany. Ďalší termín, ktorý zavedieme, bude *fragment*, označujúci zovšeobecnený graf s práve piatimi voľnými polhranami, usporiadanými ako na Obr1.4.



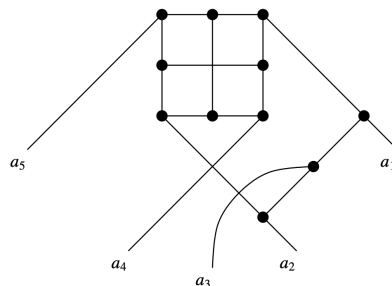
Obr. 1.4: Príklad fragmentu [9]

Petersenov fragment F_P dostaneme z Petersenovho grafu odstránením vrchola a rozdeľovaním hrán nasledovne:

1. z Petersenovho grafu odstránime vrchol x (Obr. 1.5), a ponecháme polhrany a_3, a_4 , a a_5 na incidentných vrchoch pôvodných hrán teda y, z, t
2. podrozdelíme dve hrany incidentné s vrcholom y
3. na nové vrcholy pridáme podľa obrázka 1.5 nové polhrany a_1, a_2



(a) The Petersen graph.

(b) The Petersen fragment F_0 .

Obr. 1.5: Postup konštrukcie Petersonovho fragmentu z práce [9]

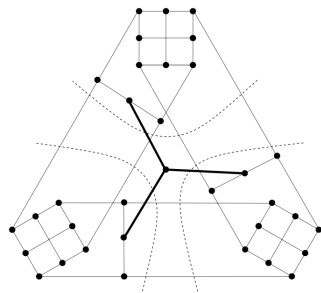
Halinov graf (Halin graph) G_H je kubický graf, ktorý vznikne zo stromu so stupňami 1 a 3 vnoreného do roviny a následným pospájaním listov do kružnice v „cyklickom“ poradí. Halinove grafy sú množina kubických planárnych grafov.

Nech G_H je Halinov graf, pričom vnútorný strom grafu G_H budeme označovať T_H a vonkajšiu kružnicu grafu G_H budeme označovať C_H .

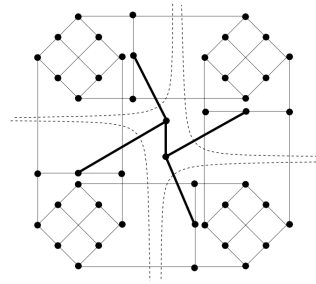
Treelike snark vznikne nasledovnou konštrukciou:

- každý vrchol na kružnici C_H nahradíme kópiou Petersenovho fragmentu, ktorý budeme označovať F_P^ℓ , tak, aby nám zostali voľné polhrany a_1, a_2, a_4 a a_5 .
- zafixujeme smer kružnice C_H a slovo predchodca bude vyjadrovať predchádzajúci list na orientovanej kružnici. Potom ak pre list ℓ a jeho predchodcu ℓ' platí, že F_P^ℓ má voľné polhrany $(a_1, \dots, a_5)$ a $F_P^{\ell'}$ má voľné polhrany $(a'_1, \dots, a'_5)$, vytvoríme nové hrany spojením voľných polhrán a_4 s a'_2 a a_5 s a'_1 .

Vyššie spomínaná konštrukcia treelike snarkov, rovnako ako príklady 1.6 sú z práce *Treelike snarks*[9]



(a) Windmill 1 [7, Figure 7].



(b) Blowup(*Prism*, C_4) [12, Figure 7].

Obr. 1.6: Príklady na treelike snarky z práce [9]

Tvrdenie 1.3.1. (*Abreu, Kaiser, Labbate a Mazzuoccolo [9]*) Pre treelike snarky platí $\phi_c(G) \geq 5$.

Doposiaľ bolo dokázané tvrdenie 1.3.1. Za predpokladu platnosti Tuttovej hypotézy 1.0.9 platí pre treelike snarky silnejšie $\phi_c(G) = 5$. Ako sme už spomínali vyššie, ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf spĺňa Banovu-Linialovu hypotézu 1.0.6. Kontrapríklady hypotézy 1.0.6, by sme hľadali v množine grafov, pre ktorú platí $\phi_c(G) \geq 5$. Množina treelike snarkov je teda jednou z potencionálnych kontrapríkladov. To ale vyvrátil J.P. Zerafa v práci *Ban-Linial's Conjecture and treelike snarks* [11], kde dokázal, že treelike snarky obsahujú 2-bisekciu.

Kapitola 2

Implementácia algoritmov

Hlavným problémom pri prehľadávaní farbení grafov je časová náročnosť tohto procesu. Ak n je počet vrcholov grafu G , pri hľadaní všetkých vrcholových farbení grafu G dvomi farbami, je počet takýchto farbení 2^n , čo predstavuje exponenciálna zložitosť v závislosti od veľkosti vstupu. Takéto prehľadávanie môže byť značne neefektívne. Ak má výsledné farbenie spĺňať konkrétnu podmienku, za určitých okolností je možné už počas generovania čiastočného farbenia indikovať, že toto generované farbenie nie je korektné. Z toho vyplýva, že aj výsledné farbenie, ktoré obsahuje toto čiastočné farbenie bude nekorektné. V takomto prípade môže naše prehľadávanie značne zrýchliť proces orezávania vetiev, o ktorých vieme povedať, že budú obsahovať jedine nekorektné farbenia.

V našej práci nás budú zaujímať vonkajšie 2-bisekcie na kubických grafoch. Farbenie bude predstavovať vonkajšiu 2-bisekciu a ďalej ho budeme označovať ako *korektné*, ak bude každý vrchol spĺňať podmienku najviac jedného suseda rovnakej farby. Budeme sledovať dva atribúty:

1. Počet všetkých korektných farbení grafu za predpokladu, že sa počet vrcholov jednej farby rovná počtu vrcholov druhej farby
2. Najväčší rozdiel medzi počtom vrcholov jednej a druhej farby zo všetkých korektných farbení grafu

Bez ujmy na všeobecnosti budeme v našich algoritmoch grafy farbiť bielou a čiernou farbou, pričom budeme používať značenie w pre vrchol bielej farby a b pre vrchol čiernej farby.

2.1 Backtrack

Pre overenie správnosti farbení grafov nájdených pomocou algoritmu s orezávaním sme sa rozhodli implementovať aj štandardný algoritmus prehľadávania backtrackom, ktorý

postupne overí všetky farbenia.

Pri algoritme backtracku sme postupovali pomerne priamočiaro. Algoritmus postupne zafarboval vrchol všetkými farebnými možnosťami, v našom prípade čiernou a bielou, a ďalej pokračoval v prehľadávaní na nezafarbenom vrchole. Pokiaľ taký nenašiel, prehľadávanie sa skončilo a korektnosť farbenia sa overila pomocnou funkciou.

Algoritmus na overenie korektnosti farbenia je pomerne priamočiary. Pomocná funkcia postupne prechádza všetky vrcholy a porovnáva farbu vrchola v s farbami všetkých vrcholov susediacich s v . Pokiaľ má vrchol v viac ako jedného suseda rovnakej farby akou je zafarbený on sám, funkcia vráti **FALSE**. V opačnom prípade vráti **TRUE**.

Počet nezafarbených vrcholov počas prehľadávania budeme označovať U a počet čiernych/bielych vrcholov budeme označovať B/W . Ak má platiť podmienka rovnakého počtu vrcholov oboch farieb (pri sledovaní prvého atribútu), bolo možné urobiť orezávanie v momente, keď bola splnená podmienka $|W - B| > U$. Vetvy prehľadávania, do ktorých by sme sa vnorili aj napriek tomu, že indikujeme väčšiu absolútnu hodnotu rozdielu po porovnaní, by neobsahovali dostatočný počet nezafarbených vrcholov na to, aby sa počet čiernych a bielych vrcholov vo výslednom farbení rovnal.

Pri druhom atribúte sa táto podmienka nevyhodnocovala a teda algoritmus backtracku prehľadal 2^n možností.

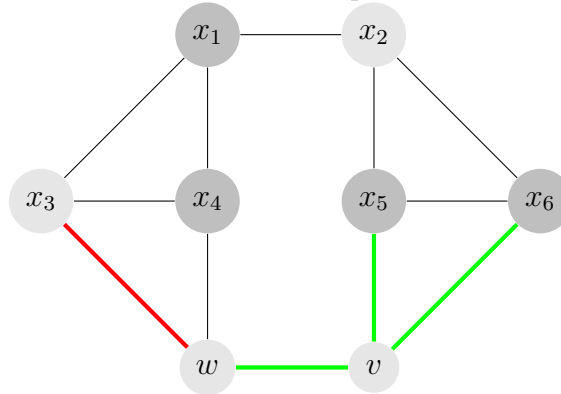
2.2 Algoritmus s orezávaním

To, že prehľadávanie hrubou silou popísané v časti Backtrack nájde všetky korektné farbenia je pomerne zjavné. Algoritmus popísaný v tejto časti používajúci orezávanie je menej intuitívny. Dokážeme jeho korektnosť popísaním orezávaných vetiev, čím ukážeme, že vetvy, ktoré sú počas nášho algoritmu ignorované nevedú ku korektnému farbeniu.

Náš algoritmus postupne rekurzívne zafarbujú zatiaľ nezafarbené vrcholy. Algoritmus sa nikdy opäť nevnára do vrcholov, ktoré už raz boli navštívené a teda zafarbené. Pri priradovaní farby vrcholu v máme na začiatku množinu možností, ktorá obsahuje čiernu a bielu farbu. V backtracku by sme v tomto momente skúsili obe možnosti zafarbenia a vnorili sa do ďalšieho nezafarbeného vrchola. V algoritme, ktorý popisujeme, ale nastupuje prvé orezávanie vetiev.

Ďalej budeme používať pojem *dvojkový* na označenie vrchola, ktorý je súčasťou dvojprvkového komponentu po delení grafu indukovaného zafarbením. Inak povedané, dvojkový vrchol bude vrchol, ktorý bude mať práve jedného suseda rovnakej farby ako

Obr. 2.1: Kontrapríklad



on sám. Dvojkový vrchol budeme označovať c_2 , kde $c \in \{b, w\}$ je farba komponentu. Od tohto momentu budú značenia b a w označovať vrcholy, ktoré nie sú dvojkové.

Krátke pozorovanie: Ak chceme určiť, či vieme zafarbiť vrchol v bielou farbou, pozorujeme, že farbenie bielou farbou neobmedzujú doposiaľ nezafarbené susedné vrcholy. Ďalej si môžeme všimnúť, že korektnosť zafarbenia sa odvíja od počtu susedov bielej farby. Obdobné platí aj pre farbenie vrchola v čiernou farbou.

Pri orezávaní vetiev v danom prehľadávaní budeme postupne prechádzať možnosti farbenia vrcholu v a na základe farbenia jeho susedov určíme, či by bolo farbenie korektné aj po zafarbení vrchola zvolenou možnosťou. Bez ujmy na všeobecnosti rozoberme prípad farbenia vrchola v bielou farbou. Postupným prechádzaním susedných vrcholov vrchola v môže nastať prípad, že sused w je

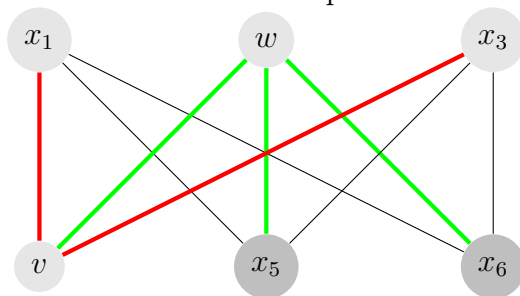
1. *nezafarbený*: ako sme už písali v pozorovaní 2.2, susedný vrchol w nijak neovplyvňuje to, či vrchol v môžeme alebo nemôžeme zafarbiť bielou farbou. (Naopak, na základe farby, ktorou zafarbíme vrchol v , budeme potom vyberať farbu pre vrchol w .)
2. *biely*: keďže sa zaoberáme farbením vrchola v bielou farbou, musíme rozlišovať či je susedný vrchol w dvojkový alebo nie.

- V prípade, že áno, odstránime bielu farbu z možností farbenia vrchola v . Ak by sme sa sústredili len na farby susedných vrcholov a podmienku korektného farbenia riešime lokálne, a ak by mal vrchol v najviac jedného suseda bielej farby, potom nemáme zjavný dôvod na odstránenie bielej farby z možností pre vrchol v . Mohol by nastať prípad pre Obr. 2.1:

Korektné farbenie by v tomto prípade porušoval vrchol w , ktorý už považujeme za navštívený a tým pádom korektne zafarbený.

- Ak vrchol w dvojkový nie je, ale nie je ani prvý prehľadávaný sused vrchola v , ktorý je biely, odstránime bielu z možností farbenia vrchola v . Zafarbenie vrchola v bielou farbou by za týchto okolností porušovalo podmienku

Obr. 2.2: Kontrapríklad



korektného farbenia (situácia na Obr. 2.2). V opačnom prípade je vrchol w prvý doposiaľ nájdený biely sused vrchola v . Vrchol w si potrebujeme zapamätať, nakoľko ak vrchol v nesusedí s bielym vrcholom rôznym od w a rozhodneme sa zafarbiť vrchol v bielou farbou, vrchol w rovnako ako vrchol v bude dvojkový. Z predchádzajúceho bodu vidieť, že indikátor toho, či je vrchol dvojkový alebo nie, potrebujeme upraviť aj pre vrchol w . Keby sme tak nespravili, mohol by nastať obdobný problém s lokálnym riešením korektnosti farbenia pre vrchol w .

3. *čierny*: pokiaľ by bol vrchol w prvý susedný vrchol vrchola v , ktorý je čierny, o farbení vrchola v bielou farbou nevieme povedať s istotou nič. Ak je však susedný vrchol w vrchola v druhý alebo tretí, vzhľadom na počet prehľadaných susedov vrchola v čiernej farby, potom je farba vrchola v nutne biela. Táto situácia je takmer ekvivalentná k situácií, ktorú sme rozoberali pri možnosti bielej farby vrchola w v prípade, že vrchol w nebol dvojkový. V tomto prípade neobmedzujeme prehľadávanie odstránením testovanej farby z možných farbení vrchola v , ale určíme testovanú farbu ako jediná korektnú možnosť farbenia vrchola v .

Náš efektívny algoritmus bude orezávať vetvy na základe podmienok opísaných v druhom bode (pseudokód 2.1). Všeobecne bude teda platiť, že farbu c vylúčime ako možnosť farbenia pre vrchol v na základe susedných vrcholov vrchola v zafarbených farbou c . Problém pri kontrolovaní podmienok len z tretieho prípadu, ktorý na prvý pohľad nemusí byť zjavný, je lokálnosť farbenia (podobne ako je rozpísané v bode dva v prípade, že je vrchol w dvojkový). Nekontrolujeme totižto, či niektorý zo susedných vrcholov nie je dvojkový. Musíme si uvedomiť, že pokiaľ by nám vyšla jediná korektná možnosť farbenia vrchola v z podmienok v bode tri, dané farbenie by bolo s istotou korektné len vzhľadom na susedné vrcholy opačnej farby.

Z vyššie opísaných situácií, je zrejmé, že ako možnosti farbenia vrchola v vylúčujeme len tie farby, ktoré by viedli ku nekorektnému čiastočnému farbeniu a teda aj nekorektnému celkovému farbeniu.

Podobne ako pri backtracku, pri sledovaní prvého atribútu môžeme ukončiť prehľa-

Algoritmus 2.1: Orezávanie možností farbenia v jazyku C++

```

std::set<int> potencial_colorings = {w, b};
int black_n = -1; /* ulozeny biely, cierny sused */
int white_n = -1;

for (int i = 0; i < 3; i++)
{
    int neigh = graph[cur_vertex][i];

    /* sused je nezafarbeny */
    if (vertices[neigh] < 0) continue;

    /* sused je cierny */
    else if (vertices[neigh] % 2 == b)
    {
        /* sused je sucastou ciernej dvojice vrcholov alebo
        ma prehladavany vrchol dvoch ciernych susedov */
        if (vertices[neigh] == b2 || black_n >= 0)
            potencial_colorings.erase(b);
        else
            black_n = neigh;
    }

    /* sused je biely */
    else
    {
        /* sused je sucastou bielej dvojice vrcholov alebo
        ma prehladavany vrchol dvoch bielych susedov */
        if (vertices[neigh] == w2 || white_n >= 0)
            potencial_colorings.erase(w);
        else
            white_n = neigh;
    }
}

```

dávanie v niektorých vetvách na základe porovnania rozdielu počtu bielych a čiernych vrcholov s počtom doposiaľ nezafarbených vrcholov. Odvodenie korektnosti tejto podmienky by bolo rovnaké ako v prípade backtracku.

Pre porovnanie, časová zložitosť algoritmu používajúceho backtrack je pri sledovaní druhého atribútu $3n2^n$, kde 2^n je počet všetkých možností farbenia, na ktoré sa volá pomocná funkcia overujúca korektnosť farbenia. Nakoľko v pomocnej funkcii potrebujeme pre každý z n vrcholov grafu overiť farbu všetkých jeho susedov, čo je v kubických grafoch pre každý vrchol konštantný počet 3, dostávame ako časovú zložitosť tejto funkcie $3n$.

Časová zložitosť algoritmu s orezávaním pri sledovaní druhého atribútu leží v $O(3n2^n)$, kde $3n$ je časová zložitosť priebežného overovania možností. Najväčší možný počet vygenerovaných farbení je 2^n . Je zjavné, že najhorší prípad by bol, keby sme neorezali žiadnu vetvu prehľadávania a prešli všetky možnosti. Z toho vyplýva, že celkový počet konečných farbení bude patriť do $O(2^n)$, avšak veľká časť týchto farbení bude rozpoznaná ako nekorektná už počas prehľadávania. Priemerný prípad bude teda oveľa rýchlejší. Z toho vidíme, že náš algoritmus je skutočne zrýchlením.

Podobné odvodenie zložitosti môžeme urobiť aj pri sledovaní prvého atribútu. Nakoľko pri sledovaní prvého atribútu požadujeme doplňujúcu podmienku rovnosti počtu vrcholov oboch farieb, robíme orezávanie vetiev aj v prípade, keď v danej vetve neexistuje také farbenie, v ktorom sa počet vrcholov oboch farieb rovná. Orežávania tohto typu bude ale v oboch algoritmoch rovnaké a teda zrýchlenie nášho algoritmu opäť prichádza z priebežného prehľadávania korektnosti farbení.

Kapitola 3

Pozorovania

3.1 Časové porovnanie algoritmov

V tabuľke 3.1 sa nachádza niekoľko časových údajov, v ktorých uvádzame ako dlho boli prehľadávané všetky n -vrcholové grafy algoritmom s orezávaním a backtrackom. Tabuľku sme rozdelili na sledovanie prvého atribútu (počet všetkých korektných farbení grafu za predpokladu, že sa počet vrcholov jednej farby rovná počtu vrcholov druhej farby) a druhého atribútu (najväčší rozdiel medzi počtom vrcholov jednej a druhej farby z všetkých korektných farbení grafu). Nakoľko sme v prípade prvého robili väčšie orezávanie, očakávame väčšiu rýchlosť.

Vidíme, že časy postupne rastú so zvyšujúcim sa n . Pri sledovaní oboch atribútov je to čiastočne dôsledkom rastu počtu grafov, ktorý rastie so zväčšujúcim sa počtom vrcholov. Po porovnaní časov v prípade prvého sledovaného atribútu vidíme, že algoritmu s orezávaním je viac ako 100 násobne rýchlejší oproti backtracku, a v prípade druhého sledovaného atribútu je algoritmus s orezávaním rýchlejší viac ako 300 násobne. Algoritmus s orezávaním je teda skutočne zrýchlením oproti jednoduchému backtracku. Oba algoritmy po spustení na všetkých grafoch od 6-vrcholových po 20-vrcholové nachádzali rovnaké počty korektných farbení.

3.2 Výsledky pre pozorované atribúty

V druhej tabuľke 3.2 máme zaznamenané výsledky pre jednotlivé skupiny grafov vzhľadom na sledované atribúty. Pri sledovaní 1. atribútu sme sa zameriavali na extrémálne grafy. Za podmienky rovnakého počtu vrcholov oboch farieb sme pozorovali:

- počet grafov s práve jedným farbením vzhľadom na n
- maximálny počet farbení p na grafe vzhľadom na n

Počet vrcholov	1. atribút		2. atribút	
	orezávanie	backtrack	orezávanie	backtrack
6-vrcholový	0.000461	0.000189	0.000527	0.000942
8-vrcholový	0.000495	0.001378	0.000497	0.00206
10-vrcholový	0.003278	0.020445	0.003156	0.031053
12-vrcholový	0.026384	0.367175	0.0255	0.6215
14-vrcholový	0.269592	7.95891	0.293064	14.6095
16-vrcholový	3.75385	264.957	3.79608	579.755
18-vrcholový	70.0591	8865.18	73.2131	22615.6

Tabuľka 3.1: Tabuľka s časovými údajmi udávanými v sekundách

- počet grafov obsahujúcich práve p farbení

Pri sledovaní 2. atribútu sme pozorovali maximálny rozdiel medzi počtom vrcholov čiernej a bielej farby.

Odporovali sme, že grafy s práve jedným korektným farbením sa objavujú v triedach grafov, kde $n = 6 + 4k$ pre $k = \{0, 1, 2, 3\}$, $4 \leq n \leq 20$. Vyplývajú z analýzy jednotlivých grafov s práve jednou 2-bisekciou, sme predpokladali, že prípadný ďalší graf s touto vlastnosťou bude 22-vrcholový a bez trojuholníkov. Na základe tohto predpokladu sme spustili algoritmus s orezávaním na všetky 22-vrcholové kubické grafy s najkratšou kružnicou dĺžky 4. Týchto grafov bolo rádovo toľko, ako všetkých 20-vrcholových grafov. Algoritmus nenašiel žiadny graf spĺňajúci túto podmienku, a to nás viedlo k vysloveniu Hypotézy 4.1.3 v kapitole *Vyslovenie hypotéz a ich dokazovanie*.

Ďalší výsledok prehľadávania, ktorý sme získali, bol počet grafov s maximálnym počtom farbení vzhľadom na n . Tento počet vyšiel pre každé pozorované n práve jedna. Nakoľko pri grafoch s malým počtom vrcholov môže dochádzať k výnimkám v určitom správaní, rozhodli sme sa spustiť prehľadávanie aj na všetkých 22-vrcholových grafoch. Vychádzajúc z výstupov všetkých prehľadávaní, sme vyvodili dva očakávané výsledky pre 24-vrcholové grafy. Zaujímalo nás, ktorý z týchto grafov má väčší počet farbení a či pre ľubovoľne veľké n platí, že n -vrcholový graf s maximálnym počtom farbení je práve jeden. Tieto grafy, rovnako ako ich vzorec (pattern), podľa ktorého sa javí ich správanie v prípade otázky maximálneho počtu farbení, ďalej popisujeme v kapitole *Maximalizácia počtu farbení*.

Počet vrcholov	1. atribút			2. atribút
	počet grafov s jedným farbením	maximálny počet farbení p	počet grafov s p farbeniami	maximálny rozdiel
6-vrcholový	1	2	1	0
8-vrcholový	0	6	1	0
10-vrcholový	2	14	1	1
12-vrcholový	0	21	1	1
14-vrcholový	1	44	1	1
16-vrcholový	0	71	1	1
18-vrcholový	1	130	1	1
20-vrcholový	0	236	1	2

Tabuľka 3.2: Výsledky pozorovaní

Pri sledovaní druhého atribútu sme sa snažili nájsť závislosť medzi rastom rozdielu počtu vrcholov oboch farieb a triedou grafov, ktorá tento rozdiel nadobúda. Počas skúmania jednotlivých tried sme objavili opakujúcu sa štruktúru podgrafov, na ktorej grafy naberali najväčší rozdiel vzhľadom na výsledky prehľadávania. To nás viedlo k myšlienke, či sa dá toto správanie zovšeobecniť. Cieľom bolo popísať konštrukciu, ktorou vznikne trieda grafov s vlastnosťou maximálneho rozdielu a teoretické odvodenie, že nadobudnutý rozdiel je najväčší možný vzhľadom na počet vrcholov grafu.

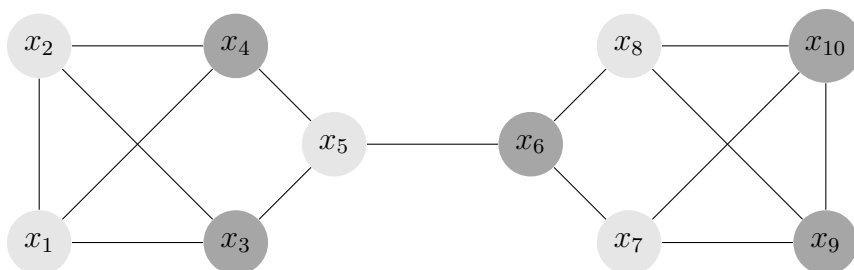
Kapitola 4

Vyslovenie hypotéz a ich dokazovanie

4.1 Minimalizácia počtu farbení

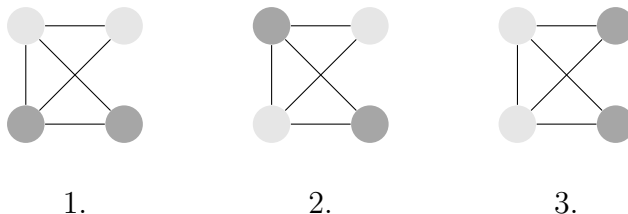
V tejto kapitole sme sa zameriavali na kubické grafy, ktoré majú práve jednu 2-bisekciu. Pri sledovaní prvého atribútu sme objavili päť grafov s využitím počítača s práve jedným korektným farbením, za podmienky rovnakého počtu bielych a čiernych vrcholov. Až na jeden mostový graf boli všetky štyri grafy podobného charakteru.

Mostový graf $2K_4$ s práve jednou 2-bisekciou je zobrazený na Obr. 4.1.



Obr. 4.1: Mostový graf $2K_4$ s jednou 2-bisekciou

Vieme, že všetky korektné farbenia grafu $K_4 - e$ zobrazené na Obr. 4.2 obsahujú rovnaký počet bielych a čiernych vrcholov.



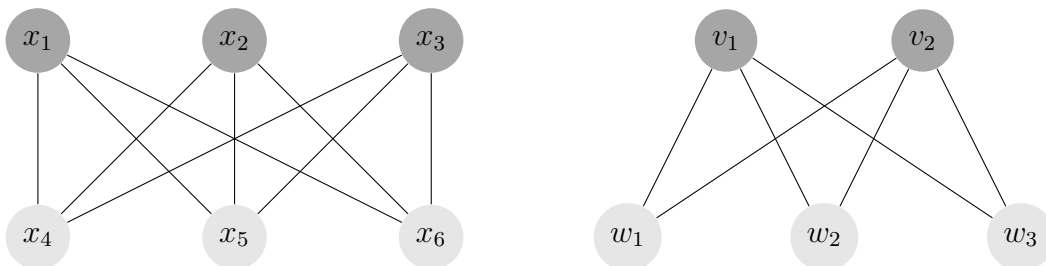
Obr. 4.2: Možné korektné zafarbenia grafu $K_4 - e$

V grafe $2K_4$ sa nachádzajú dva podgrafy, ktoré sú $K_4 - e$. Jeden je na vrcholech x_1, x_2, x_3, x_4 a druhý je na vrcholech x_7, x_8, x_9, x_{10} . Aby bola zachovaná podmienka

rovnakého počtu vrcholov oboch farieb, pre zostávajúce vrcholy x_5, x_6 platí, že jeden z týchto vrcholov bude mať bielu farbu a druhý z týchto vrcholov bude mať čiernu farbu. Bez ujmy na všeobecnosti zafarbíme vrchol x_5 bielou farbou. Podgraf $K_4 - e$ na vrcholech x_1, x_2, x_3, x_4 môžeme zafarbiť tromi spôsobmi z Obr. 4.2. Avšak nakoľko je vrchol x_4 v prvej aj v druhej možnosti biely dvojkový, pri susednosti vrcholov x_4 a x_5 dostávame v oboch týchto možnostiach spor s korektnosťou farbenia. Z toho vyplýva, že vrcholy x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 majú jediné korektné farbenie. Podobné úvahy vieme spraviť pre čierny vrchol x_6 a podgraf $K_4 - e$ na vrcholech x_7, x_8, x_9, x_{10} . Týmto sme dokázali, že mostový graf $2K_4$ má práve jednu 2-bisekciu.

Definícia 4.1.1. Nech G a H sú kubické grafy, nech $v \in V(G)$ a $u \in V(H)$. $\mathcal{B}$ -súčin $G *_3 H$ grafov G a H je graf, ktorý vznikne z grafov $G - v$ a $H - u$ pridávaním troch hrán medzi vrcholy stupňa 2 v grafe $G - v$ a vrcholy stupňa 2 v grafe $H - u$ tak, aby výsledný graf bol kubický.

Zostávajúce štyri grafy vychádzali z rovnakej konštrukcie. Nech $V_1 \cup V_2$ je bipartícia grafu $K_{3,3}$. Symbolom B_i pre $i = \{0, 1, 2, 3\}$ budeme označovať graf, ktorý vznikne opakovaným aplikovaním 3-súčinu na i vrcholov množiny V_i s grafom $K_{3,3}$. Vo všeobecnosti graf $G *_3 H$ z definície 4.1.1 nie je jednoznačný, no vo výsledných konštrukciách naše grafy vďaka existujúcemu izomorfizmu jednoznačné budú. Dokážeme, že všetky takto definované grafy, majú práve jednu 2-bisekciu.



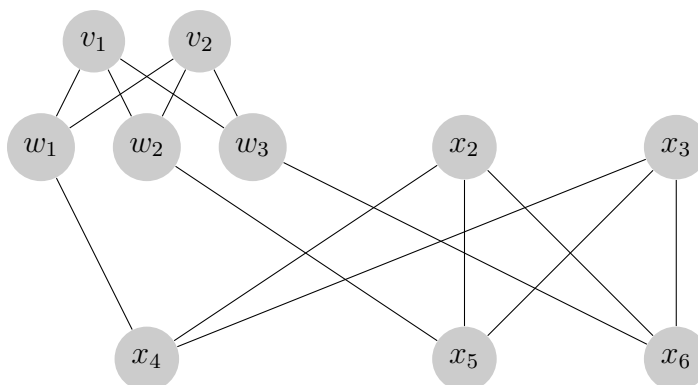
Obr. 4.3: Graf naľavo je $K_{3,3}$ a graf napravo je $K_{2,3}$

Ako prvé ukážeme, že graf $K_{2,3}$ (Obr. 4.3 napravo), ktorý vznikne odstránením ľubovoľného vrchola z $K_{3,3}$ má práve jedno korektné farbenie. Bez ujmy na všeobecnosti zafarbíme vrchol v_1 čiernou farbou. Ďalej zafarbíme na čierne aj vrchol w_1 . S takýmto zafarbením sú vrcholy v_1, w_1 čierne dvojkové. Čierny dvojkový v_1 vynúti bielu farbu vrcholom w_2, w_3 , inak by farbenie porušovalo podmienku korektného farbenia. Podobne čierny dvojkový vrchol w_1 vynúti bielu farbu vrcholu v_2 . Tu dostávame spor s korektným farbením na vrcholech v_2, w_2 a w_3 . Obdobne by sme vedeli odvodiť nekorektnosť farbení pri rovnakej farbe vrcholov v_j a w_i pre ľubovoľné $j \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2, 3\}$. Korektné farbenie je jedine v prípade, že vrcholy v_j pre $j \in \{1, 2\}$ majú bielu(čiernu) farbu a vrcholy w_i pre $i \in \{1, 2, 3\}$ majú čiernu(bielu) farbu.

Poznámka 4.1.2. Vidíme z toho, že po zafarbení ľubovoľného vrchola grafu $K_{2,3}$ vieme jednoznačne odvodiť farbenie všetkých vrcholov grafu.

Pre B_0 dostávame pôvodný graf $K_{3,3}$, o ktorom už vieme, že má jediné korektné zafarbenie, nakoľko je zjednotením dvoch grafov $K_{2,3}$.

Dokážeme teraz teoreticky, že aj ľubovoľný graf B_1 má práve jednu 2-bisekciu. Bez ujmy na všeobecnosti nech graf B_1 vznikne aplikovaním 3-súčinu na vrchol x_1 s grafom $K_{3,3}$. Takto skonštruovaný graf je zobrazený na Obr. 4.4.



Obr. 4.4: Graf G' skonštruovaný 3-súčinom z dvoch $K_{3,3}$

Už vieme, že:

1. všetky vrcholy jednej partície v grafe $K_{2,3}$ majú rovnakú farbu a dve partície sú navzájom farebne rôzne.
2. Rozdiel počtu vrcholov bielej a čiernej farby v grafe $K_{2,3}$ bude práve 1 pre farbu, ktorú má trojková partícia.

Bod 2. vyplýva z bodu 1. Z bodu 1. spolu s bodom 2. vidíme, že pri hľadaní korektného farbenia sa podgraf $K_{2,3}$ na vrchoch v_1, v_2, w_1, w_2 a w_3 v grafe B_1 bude správať podobne ako vrchol x_1 v grafe $K_{3,3}$ (z Obr. 4.3 vľavo) s farbou trojkovej partície podgrafu $K_{2,3}$. Ďalej budeme používať P na označenie partície grafu $K_{3,3}$ (z Obr. 4.3), kde $P = \{x_4, x_5, x_6\}$ a P' na označenie partície grafu B_1 , kde $P' = \{x_4, x_5, x_6\}$. Partíciu obsahujúcu vrcholy x_1, x_2, x_3 v grafe $K_{3,3}$ budeme označovať R . Podgraf $K_{2,3}$ sa bude správať podobne ako vrchol s farbou trojkovej partície podgrafu $K_{2,3}$ nakoľko v oboch prípadoch platí:

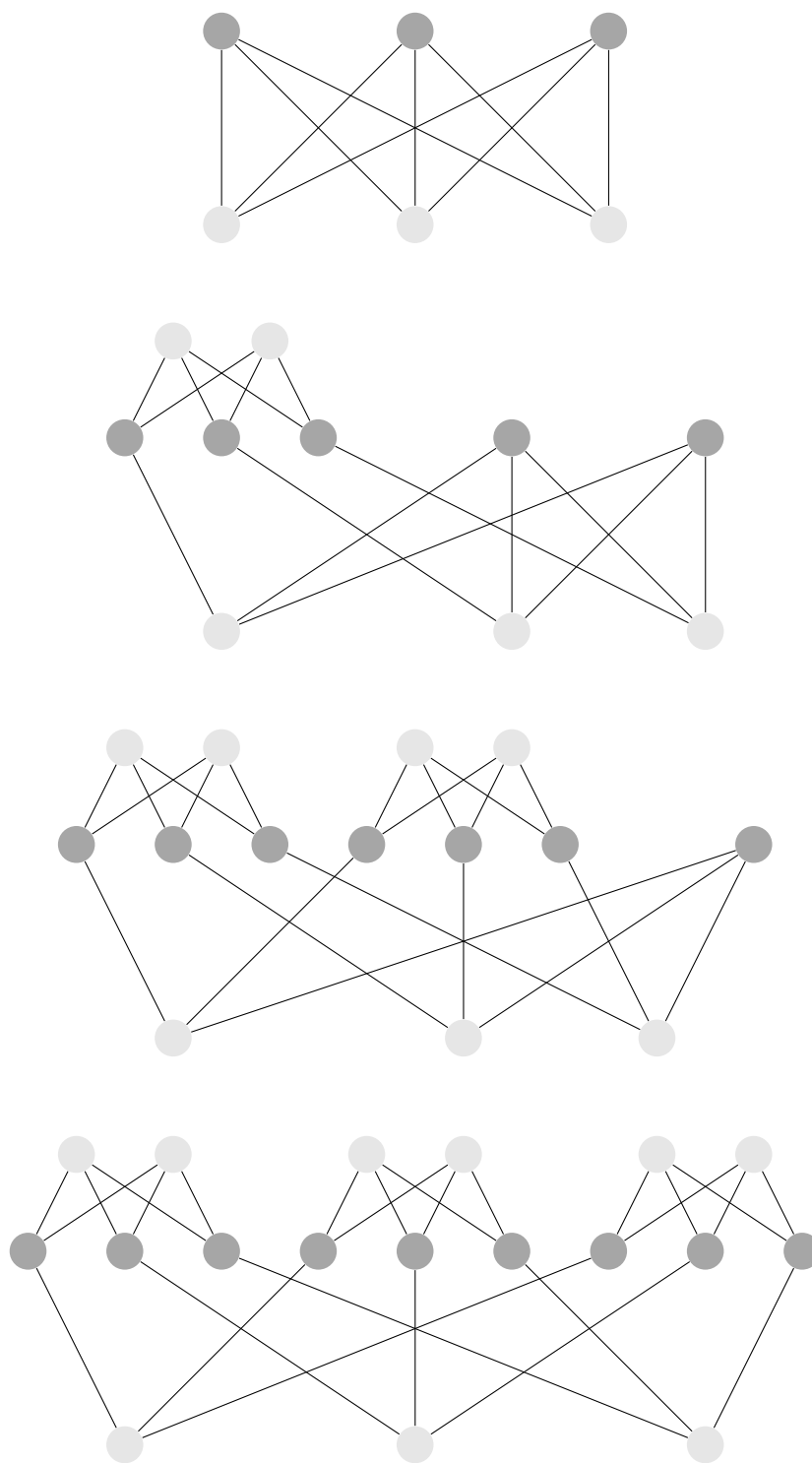
- Do farebného rozdielu prispievajú oba prípady počtom 1 pre farbu trojkovej partície podgrafu $K_{2,3}$
- Všetky vrcholy partície P rovnako ako všetky vrcholy partície P' , budú susedné s aspoň jedným vrcholom zafarbeným farbou trojkovej partície podgrafu $K_{2,3}$.

Rozdiel medzi správaním vrchola x_1 a podgrafu $K_{2,3}$ je jedine v prípade farbenia vrchola x_1 farbou vrcholov partície P a farbenia trojkovej partície $K_{2,3}$ farbou vrcholov partície P' . Bez ujmy na všeobecnosti nech je farba vrcholov partície P a farba vrcholov partície P' biela. Potom vrchol x_1 nemôže mať bielu farbu, porušili by sme tým totižto korektnosť farbenia. Naopak trojková partícia $K_{2,3}$ bude po zafarbení bielou obsahovať 3 biele dvojkové vrcholy a farbenie bude korektné. Tu však porušíme doplňujúcu podmienku rovnosti počtu vrcholov oboch farieb a teda ani toto farbenie nebude správne.

Jediné farbenie, ktoré je pre daný graf korektné aj vzhľadom na doplňujúcu podmienku je odvodené z farbenia grafu $K_{3,3}$. Vrcholy partície P' zafarbíme farbou vrcholov partície P . Bez ujmy na všeobecnosti nech je farba vrcholov partície P biela, potom je farba vrcholov partície R čierna. Čiernou farbou zafarbíme tie vrcholy grafu B_1 , ktoré zdieľa s množinou R . Rovnako zafarbíme čiernou aj všetky vrcholy trojkových partícií podgrafov $K_{2,3}$. Tieto nám jednoznačne (vyplývajú z poznámky 4.1.2) určia bielu farbu vrcholov dvojčkovej partície.

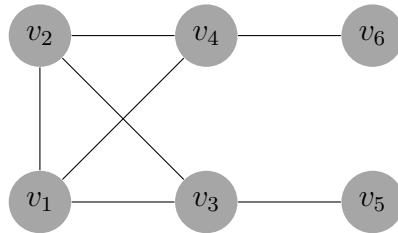
Rozobrali sme prípad konštrukcie grafu B_1 . Podobné úvahy vieme spraviť pri konštrukcii grafov B_2 a B_3 .

Hypotéza 4.1.3. *Mostový graf $2K_4$ a bezmostové grafy B_i pre $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ sú jediné grafy, ktoré majú práve jednu 2-bisekciu.*

Obr. 4.5: Grafy B_0, B_1, B_2, B_3 s práve jedným farbením

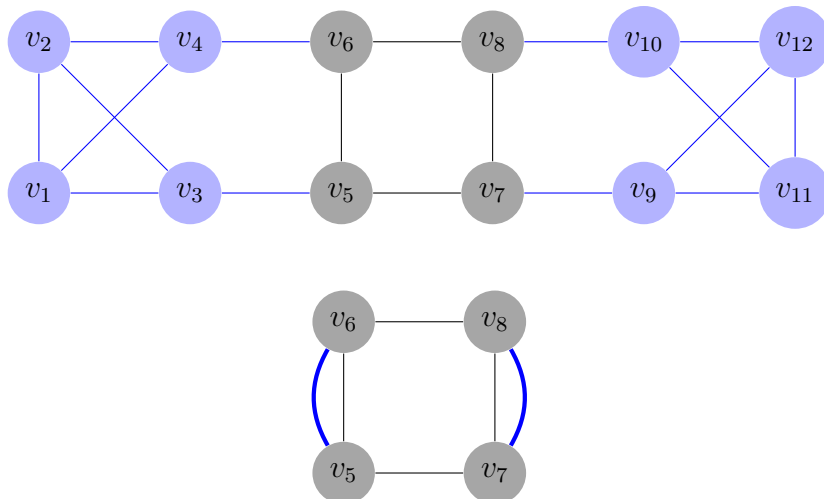
4.2 Maximalizácia počtu farbení

V tejto sekcii sa budeme venovať kubickým grafom, ktoré majú maximálny počet 2-bisekcií. Nech n je počet vrcholov a platí $6 \leq n \leq 22$. Za podmienky rovnakého počtu vrcholov oboch farieb, výsledky prehľadávania ukázali pre každé z pozorovaných n , že existuje práve jeden graf, ktorý nadobúda maximálny počet farbení vzhľadom na n . Po preskúmaní týchto nájdených grafov sme spozorovali opakujúci sa podgraf F (Obr. 4.6).



Obr. 4.6: Podgraf F

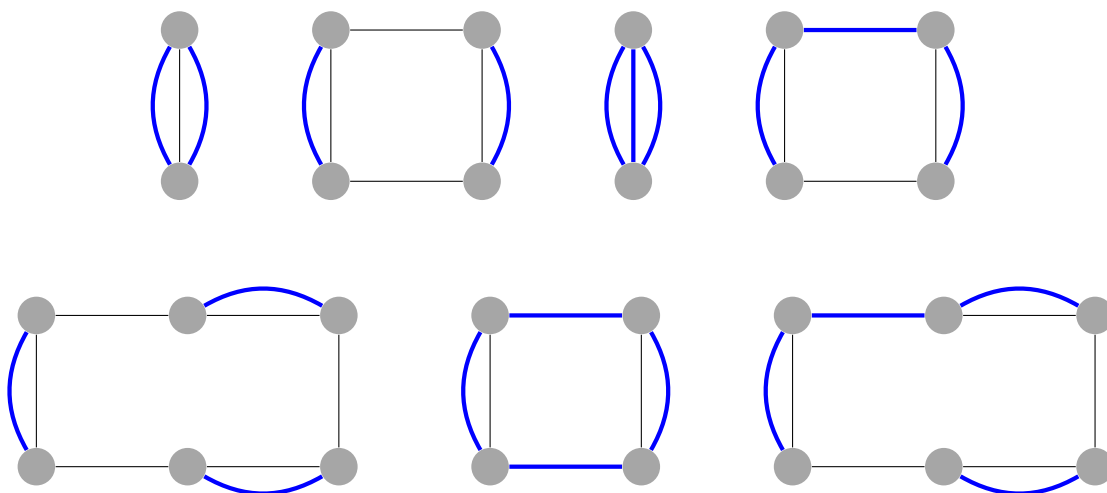
Rozhodli sme sa preto dané grafy zobrazit' tak, aby bol každý výskyt podgrafu F nahradený modrou hranou (príklad transformácie na Obr. 4.7). Slovným spojením *zafarbenie hrany uv grafu G na modro* budeme ďalej označovať vytvorenie nového grafu G' konštrukciou z grafu G tak, že na vrcholy u, v pripojíme podgraf F a odstránime pôvodnú hranu uv . Keďže takáto transformácia zachováva kubickosť grafov, výsledkom zafarbenia ľubovoľnej existujúcej hrany pôvodného grafu na modro bude opäť kubický graf.



Obr. 4.7: Transformácia

Pozorované grafy po transformáciách zobrazených na Obr. 4.7 pre $10 \leq n \leq 22$ sú na Obr. 4.8. Vďaka takémuto tvaru grafov sme mohli nahliadnuť na opakujúci sa vzorec „pribúdania“ modrých hrán. Grafy na Obr. 4.8 sú cykly párnej dĺžky, pričom

každá druhá hrana má paralelnú modrú hranu. Pre $14 \leq n \leq 22$ vieme skonštruovať n -vrcholový graf M_n s maximálnym počtom farbení zafarbením takej hrany v $(n-4)$ -vrcholovom grafe M_{n-4} s touto vlastnosťou, ktorá doposiaľ nebola zafarbená na modro. Pokiaľ v grafe M_{n-4} neexistuje žiadna hrana, ktorá by spĺňala dané vlastnosti, graf M_n vznikne vytvorením väčšieho cyklu a zdvojením každej druhej hrany cyklu modrou hranou.

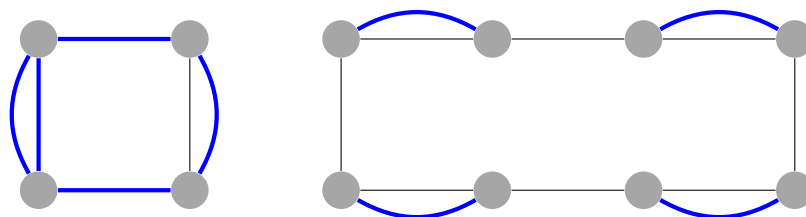


Obr. 4.8: Grafy v prekreslenom tvare

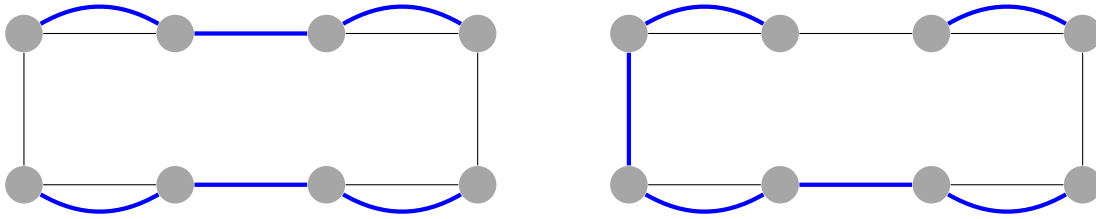
Zaujímalo nás, či n -vrcholový graf G' s maximálnym počtom farbení budeme konštruovať z $(n-4)$ -vrcholového grafu G s maximálnym počtom farbení, dovedy, pokiaľ sa v grafe G budú nachádzať hrany, ktoré môžeme zafarbiť na modro. Rovnako sme sa pýtali, či pri väčších n môžeme zafarbiť na modro ľubovoľnú hranu s rovnakým výsledkom.

Očakávali sme, že 24-vrcholový graf bude v jednom z nasledovných tvarov na Obr. 4.9. Prvý graf vychádzal z predpokladu, že v grafoch s maximálnym počtom farbení budeme maximalizovať počet modrých hrán. Druhý graf vychádzal z predpokladu, že pri hranách, ktoré sú v grafe násobné zafarbujeme na modro práve jednu z týchto hrán.

Samotné prehľadávanie sme ďalej pustili len na dva očakávané výsledky. Druhý graf obsahoval viac farbení.

Obr. 4.9: Očakávané tvary grafu pre $n = 24$

Na nasledujúcich grafoch na Obr. 4.10 sme overovali, či vzájomná pozícia dvoch hrán, ktoré zafarbuje na modro, ovplyvňuje počet farbení daného grafu. Pre prvý graf vyšiel počet farbení väčší.



Obr. 4.10: Skúmané tvary grafov pre $n = 32$

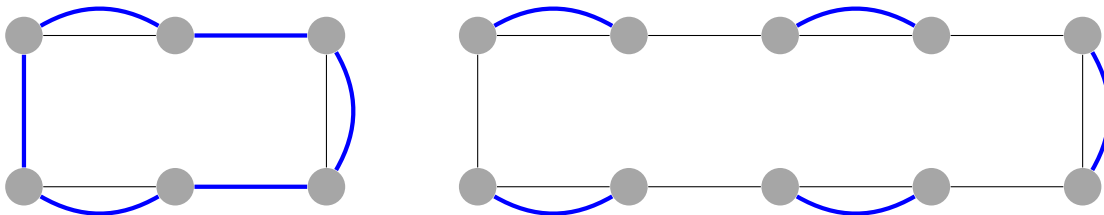
Vychádzajúc z výsledkov na pozorovaných grafoch na Obr. 4.9 a 4.10 sme mali úvahu, ktorá z nasledujúcich dvoch možností nastáva:

Možnosť 1. Graf G' s maximálnym počtom farbení na n vrcholoch skonštruujeme z $(n - 4)$ -vrcholového grafu G s maximálnym počtom farbení, tak, že zafarbíme na modro niektorú hranu grafu G , ktorá nie je násobná a doposiaľ nebola zafarbená. Ak takáto hrana neexistuje, vytvoríme graf G' z cyklu dĺžky $n/3$ a následným zdvojením každej druhej hrany modrou hranou.

Možnosť 2. Graf G' s maximálnym počtom farbení na n vrcholoch skonštruujeme:

- ak platí $n \bmod 6 = 4$ alebo $n \bmod 6 = 0$, z cyklu dĺžky $n/3$ a následným pridaním $(n \bmod 6)/4$ modrých hrán, ktoré nie sú zdvojené
- ak platí $n \bmod 6 = 2$, z cyklu dĺžky $(n - 8)/3$ a následným pridaním 2 modrých hrán, ktoré nie sú zdvojené pričom tieto hrany musia byť čo najďalej od seba

Pre $n = 30$ sme opäť skúmali dva grafy. Prvý graf na Obr. 4.11 je skonštruovaný podľa možnosti 1. a druhý graf je skonštruovaný podľa možnosti 2. Overili sme, ktorý z týchto grafov má väčší počet farbení. Prvý graf mal o viac ako 1000 farbení viac. Na základe predchádzajúcich výsledkov vyslovujeme nasledujúcu hypotézu 4.2.1.



Obr. 4.11: Skúmané tvary grafov pre $n = 30$

Hypotéza 4.2.1. Graf G na n vrchoch s maximálnym počtom farbení vzhľadom na počet vrcholov vznikne konštrukciou z párneho cyklu C dĺžky l . Nech P je najväčšia možná podmnožina hrán cyklu C , pre ktorú platí, že žiadna dvojica z ľubovoľných dvoch hrán množiny P nezdieľa vrchol. Nech N je komplement tejto množiny vzhľadom na množinu hrán cyklu C . Graf G skonštruujeme z cyklu C tak, že na incidentné vrcholy každej hrany z množiny P napojíme graf F (Obr.4.6) a k hrán z množiny N nahradíme grafom F , pričom l zvolíme tak, aby sme maximalizovali k a platí:

$$\frac{n - 4k}{3} = l$$

$$k \leq \frac{l}{2}$$

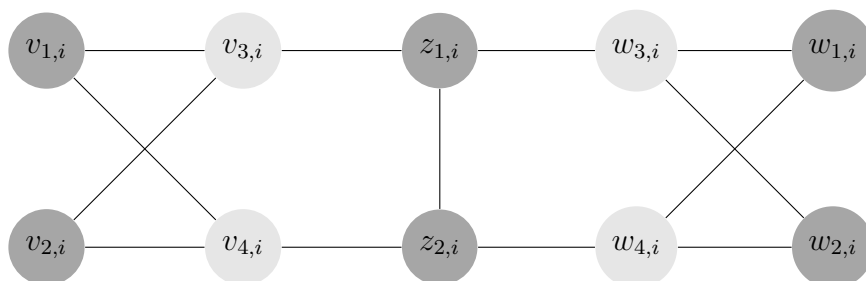
4.3 Maximalizácia rozdielu

Pri sledovaní druhého atribútu sme sa zameriavali na maximalizáciu rozdielu medzi počtom bielych a čiernych vrcholov pri korektnom farbení. Zaujímalo nás, aký je najväčší možný rozdiel vzhľadom na počet vrcholov grafu a či existuje vzťah medzi týmito dvomi premennými.

4.3.1 Konštrukcia grafov s ľubovoľne veľkým rozdielom

Ako prvé popíšeme konštrukciu, ktorou vzniká trieda grafov zafarbiteľná s maximálnym rozdielom na danom počte vrcholov.

Na Obr. 4.3.1 vidíme zovšeobecnený graf, ktorý budeme označovať komponent T . Snažíme sa tvoriť čo najväčší rozdiel s čo najmenším počtom vrcholov. Prvé grafy s rozdielom väčším ako nula našiel algoritmus s orezávaním rovnako ako algoritmus používajúci hrubú silu až na 10 vrchoch. Z toho sme očakávali, že rozdiel nebude rásť rýchlejšie ako po 10 vrchoch.



Obr. 4.12: Komponent T

Štvorica vrcholov $v_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ spolu so štvoricou vrcholov $w_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ vytvárajú okolo dvojice čiernych dvojkových vrcholov z_1, z_2 výplň. Táto výplň je ne-

utrálna vzhľadom na zväčšovanie rozdielu v konkrétnom komponente, no umožňuje konštruovanie grafov s ľubovoľne veľkým rozdielom a to spájaním jednotlivých T_i komponentov. Spájanie jednotlivých komponentov T_i musí zachovávať kubickosť grafu, ktorý konštruujeme a zároveň nemôže porušovať korektnosť farbenia.

Vidíme, že vrcholy $v_{1,i}, v_{2,i}, w_{1,i}, w_{2,i}$ sú stupňa 2 a všetky ostatné vrcholy komponentu T_i majú stupeň 3. Dva komponenty T_i, T_{i+1} teda spojíme pridaním hrany medzi vrcholy $v_{1,i}, w_{1,i+1}$ a pridaním hrany medzi vrcholy $v_{2,i}, w_{2,i+1}$. V prípade koncového komponentu pridáme hranu medzi vrcholy $v_{1,i}, v_{2,i}$. Týmto sme zabezpečili kubickosť grafu.

Vďaka susednosti čiernych vrcholov $u_{1,i}, u_{2,i}$ pre $u \in \{v, w\}$ s dvomi bielymi vrcholmi $u_{3,i}, u_{4,i}$ pre $u \in \{v, w\}$, môžeme pridať hranu medzi vrchol $u_{j,i}$ pre $u \in \{v, w\}, j \in \{1, 2\}$ a vrchol ľubovoľnej farby. Korektnosť farbenia je zachovaná aj po pridaní hrany k čiernemu susednému vrcholu.



Obr. 4.13: Spájanie jednotlivých T komponentov

Ukázali sme, že takouto konštrukciou vieme zostrojiť graf pre ľubovoľne veľké i a teda aj graf s ľubovoľne veľkým rozdielom. V tomto prípade rozdiel rástol o dva pri každých 10 vrchoch. Rozdiel počtu bielych a čiernych vrcholov budeme označovať D . Platí:

$$D = 2 \frac{|V|}{10}$$

$$D = \frac{|V|}{5}$$

Týmto sme však nedokázali, že rozdiel ktorý vzniká konštrukciou je skutočne najväčší možný. Horné ohraničenie rozdielu ukážeme teoretickým odvodením.

4.3.2 Horné ohraničenie rozdielu

Pre množinu vrcholov a hrán budeme používať značenie, ktoré sme zaviedli v úvode práce v pojmoch. Značenie W bude predstavovať množinu bielych jednotkových vrcholov a W_2 bude predstavovať množinu bielych dvojkových vrcholov. Obdobne pre B, B_2 a vrcholy čiernej farby. Množinu hrán, ktoré oddeľujú čiernu a bielu partíciu budeme označovať P a značenie rozdielu bude opäť D . Napíšeme základné rovnosti, o ktorých vieme, že platia pre kubické grafy s 2-bisekciou:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad |E| &= \frac{3|V|}{2} \\
\text{(b)} \quad |V| &= |B| + |B_2| + |W| + |W_2| \\
\text{(c)} \quad D &= |B| + |B_2| - (|W| + |W_2|) \\
\text{(d)} \quad |P| &= 3|B| + 2|B_2| \\
\text{(e)} \quad |E| &= |P| + \frac{|B_2|}{2} + \frac{|W_2|}{2}
\end{aligned}$$

Poznámka 4.3.1. Rovnosť pre P hovorí o tom, že pre každý vrchol b musia existovať 3 vrcholy w . Vrchol b má teda v množine P tri hrany s ktorými je incidentný. Každý vrchol b_2 má ale práve jedného suseda ležiaceho v rovnakej partícii (ktorý je rovnakej farby) a teda má v množine P iba dve incidentné hrany. Počet všetkých hrán grafu sa rovná súčtu počtu hrán, ktoré tvoria rez medzi partíciami a počtu hrán, ktoré sa nachádzajú celé v jednotlivých partiáciách. To sú zjavne tie, ktoré sú incidentné s dvomi dvojkovými vrcholmi rovnakej farby.

$$\begin{aligned}
(1) \quad |V| + D &= 2(|B| + |B_2|) & / \text{ (b) + (c)} \\
(2) \quad |V| &= 2(|B| + |B_2|) - D & / -D \\
(3) \quad \frac{3|V|}{2} &= |P| + \frac{|B_2|}{2} + \frac{|W_2|}{2} & / \text{ subst. } E \text{ z (a) do (e)} \\
(4) \quad \frac{3|V|}{2} &= (3|B| + 2|B_2|) + \frac{|B_2|}{2} + \frac{|W_2|}{2} & / \text{ subst. } P \text{ z (d) do (3)} \\
(5) \quad 3|V| &= 6|B| + 4|B_2| + |B_2| + |W_2| & / \times 2 \\
(6) \quad 3(2(|B| + |B_2|) - D) &= 6|B| + 4|B_2| + |B_2| + |W_2| & / \text{ subst. } V \text{ z (2) do (5)} \\
(7) \quad 6|B| + 6|B_2| - 3D &= 6|B| + 5|B_2| + |W_2| \\
(8) \quad -3D &= -|B_2| + |W_2| & / -6|B| - 6|B_2| \\
(9) \quad 3D &= |B_2| - |W_2| & / \times (-1) \\
(10) \quad D &= \frac{|B_2| - |W_2|}{3} & / \div 3
\end{aligned}$$

Postupnými úpravami z prvotných rovníc dostaneme vzťah rozdielu a počtu dvojkových vrcholov. Zaujímá nás horné ohraničenie D . Nakoľko chceme bez ujmy na všeobecnosti daný rozdiel maximalizovať vzhľadom na čiernu, je zjavné, že pre množinu B_2 budeme hľadať horné ohraničenie a pre množinu W_2 budeme hľadať dolné ohraničenie. Obdobne ako v situácii pri množine P , vidíme, že pre každý vrchol z množiny B_2 musia existovať dva ľubovoľné biele vrcholy, s ktorými je susedný. Zapišeme pomocou

rovníc:

$$\begin{aligned}
 |W| + |W_2| &\geq \frac{2|B_2|}{3} \\
 |B_2| &= |V| - |B| - (|W| + |W_2|) \leq |V| - (|W| + |W_2|) \\
 |B_2| &\leq |V| - (|W| + |W_2|) \leq |V| - \frac{2|B_2|}{3}
 \end{aligned}$$

Postupnými úpravami rovníc dostaneme horné ohraničenie množiny B_2 :

$$\begin{aligned}
 |B_2| + \frac{2|B_2|}{3} &\leq |V| \\
 \frac{3|B_2| + 2|B_2|}{3} &\leq |V| \\
 \frac{5|B_2|}{3} &\leq |V| \\
 \frac{3|V|}{5} &\geq |B_2|
 \end{aligned}$$

Nekladieme žiadnu podmienku nato, či dané biele vrcholy majú byť dvojkové alebo nie. Z toho je jasné, že najmenší možný počet bielych dvojkových vrcholov je 0. Pre B_2 zvolíme horné ohraničenie.

$$\begin{aligned}
 |W_2| &= 0 \\
 |B_2| &= \frac{3|V|}{5}
 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice, ktorú sme dostali predtým:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{|B_2| - |W_2|}{3} \\
 D &= \frac{\frac{3|V|}{5} - 0}{3} \\
 D &= \frac{3|V|}{5 * 3} \\
 D &= \frac{|V|}{5} \\
 \frac{|V|}{5} &\geq D \geq 0
 \end{aligned}$$

Vidíme, že teoreticky odvodené horné ohraničenie rozdielu vrcholov medzi dvomi partíciami sa rovná rozdielu, ktorý sme získali popísanou konštrukciou v kapitole *Konštrukcia grafov s ľubovoľne veľkým rozdielom*. Rozdiel získaný konštrukciou bol teda tesný.

Záver

V našej práci sme na pozorovaných výsledkoch ukázali, že popísaný algoritmus s orezávaním je skutočne zrýchlením oproti algoritmu prehľadávajúceho backtrackom, pričom oba tieto algoritmy nachádzajú rovnaké korektné farbenia.

Ďalej sme sa v práci venovali extrémálnym grafom pre Banovu-Linialovu hypotézu. Pre množinu grafov, ktorých konštrukciu sme popísali v kapitole *Minimalizácia počtu farbení*, sme dokázali, že obsahujú práve jednu 2-bisekciu. Vyslovili sme hypotézu o tom, že grafy skonštruované podľa danej konštrukcie sú jediné s touto vlastnosťou.

V kapitole *Maximalizácia počtu farbení* sme pozorovali vzorec správania grafov naberajúcich maximálny počet 2-bisekcií. Pre grafy z tejto množiny sme vyslovili hypotézu o ich tvare s rastúcim počtom vrcholov.

V poslednej časti sme upustili od podmienky rovnakého počtu vrcholov v oboch partíciách 2-bisekcie a pozorovali sme maximálny rozdiel počtu vrcholov v týchto partíciách. Zdefinovali sme konštrukciu, ktorou sme dokázali zostrojiť graf s ľubovoľne veľkým rozdielom počtu vrcholov medzi dvoma partíciami 2-bisekcie a teoreticky sme odvodili, že tento rozdiel je najväčším možným vzhľadom na počet vrcholov grafu.

Literatúra

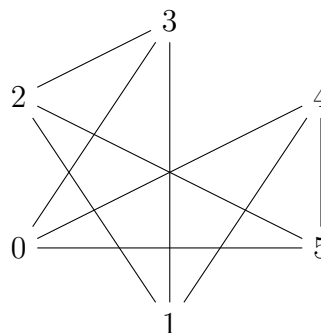
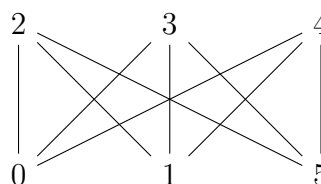
- [1] K. Ando. Graphs with monochromatic triangles in every edge coloring. *Journal of Combinatorial Theory*, 1996.
- [2] A. Ban and N. Linial. Internal partitions of regular graphs. *J. Graph Theory*, 83(1), 2016.
- [3] M. DeVos. http://www.openproblemgarden.org/op/friendly_partitions, 2009.
- [4] Sang il Oum. Perfect matchings in claw-free cubic graphs. *Electronic J. of Combin.*, 18, 2011.
- [5] G. Mazzuoccolo L. Esperet and M. Tarsi. The structure of graphs with circular flow number 5 or more, and the complexity of their recognition problem. *J. Comb*, 7, 2016.
- [6] G. Mazzuoccolo L. Esperet and M. Tarsi. Flows and bisections in cubic graphs. *Wiley Online Library*, 2017.
- [7] D. Labbate M. Abreu, J. Goedgebeur and G. Mazzuoccolo. A note on 2-bisections of claw-free cubic graphs. *Discrete Appl. Math*, 244, 2018.
- [8] D. Labbate M. Abreu, J. Goedgebeur and G. Mazzuoccolo. Colourings of cubic graphs inducing isomorphic monochromatic subgraphs. *J. Graph Theory*, 92, 2019.
- [9] D. Labbate M. Abreu, T. Kaiser and G. Mazzuoccolo. Treelike snarks. *The electronic journal of combinatorics*, 3, 2016.
- [10] N. Wormald. Problem 13. *Ars Combin*, 23, 1987.
- [11] J.P. Zerafa. Ban-linial's conjecture and treelike snarks. *J. Graph Theory*, 2022.

Príloha A: zdrojový kód

Súčasťou práce je aj elektronická príloha obsahujúca zdrojový kód algoritmu s orezávaním popísaný v kapitole Implementácia algoritmov. Program berie dva vstupné parametre - vstupný a výstupný súbor. V prípade, že dané parametre nedostane, číta zo súboru `vstup.txt` a `vystup.txt`. Prvý parameter zo vstupného súboru označuje počet vrcholov grafov, pričom je táto hodnota globálna pre všetky grafy vo vstupnom súbore. Program očakáva vrcholy číslované od nuly a samotný graf vo forme zoznamu susedov, kde je prvý sused implicitne daný poradím riadku vrámci jedného grafu. Príklad pre `vstup.txt`:

```
6
2 3 4
2 3 4
0 1 5
0 1 5
0 1 5
2 3 4

3 4 5
2 3 4
1 3 5
0 1 2
0 1 5
0 2 4
```



výstupné hodnoty:

```
cas: 1042
najvacsi pocet farbeni: 3
najvacsi rozdiel: 0
```