

Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami a příbuzné hypotézy

Martin Bednár

Školitelka: doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.

Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami

V roku 1973 Szekeres sformuloval hypotézu o dvojitom pokrytí cyklami:

Každý bezmostový graf obsahuje kolekciu cyklov, ktorá pokrýva každú hranu presne dvakrát.

Hypotéza je stále **otvorená**.

Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami

Hypotéza je **ekvivalentná** redukcii na **kubické grafy**.

Pre kubické grafy platí, že na regulárne zafarbenie hrán **stačia buď 3 alebo 4 farby**.

Hypotéza je **dokázaná** pre kubické grafy, pre ktoré **stačia 3 farby**.

Zostáva **otvorená** pre tie, pre ktoré sú **potrebné až 4 farby - snarky**

Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami

V **kubických grafoch** v dvojitých pokrytiach cyklami prechádzajú každým vrcholom práve **3 cykly**.

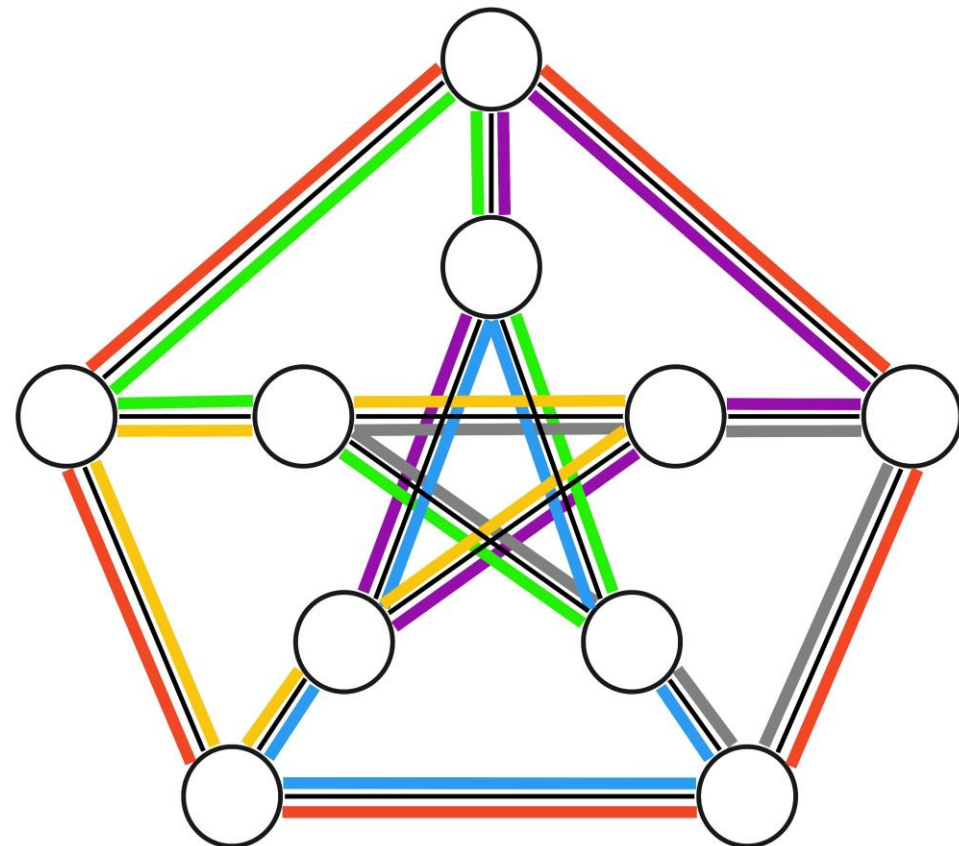


Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami

Zistili sme, že **Petersenov graf** má dvojité pokrytie cyklami, v ktorom **každá hrana je silná**.

Petersenov graf patrí medzi netriviálne **snarky**:

- **bez hranových 2-rezov**
- **bez netriviálnych hranových 3-rezov**
- **dĺžka najkratšej kružnice aspoň 5**

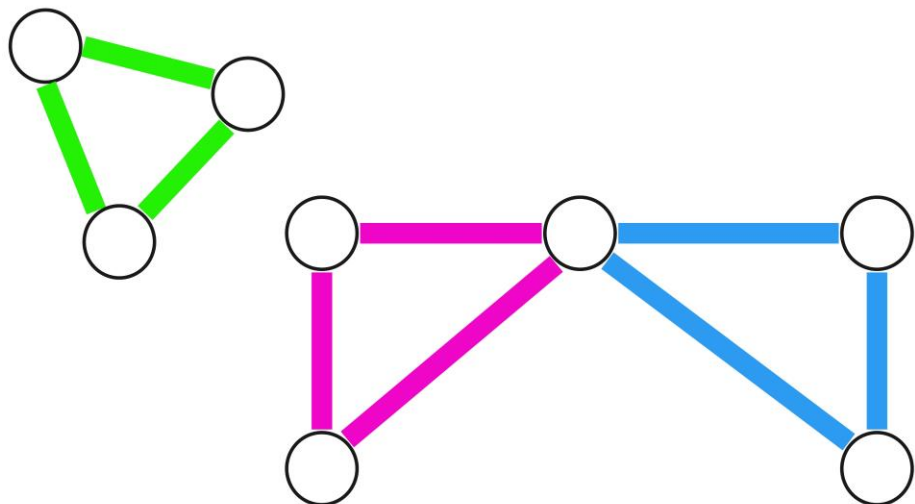


Naša hypotéza

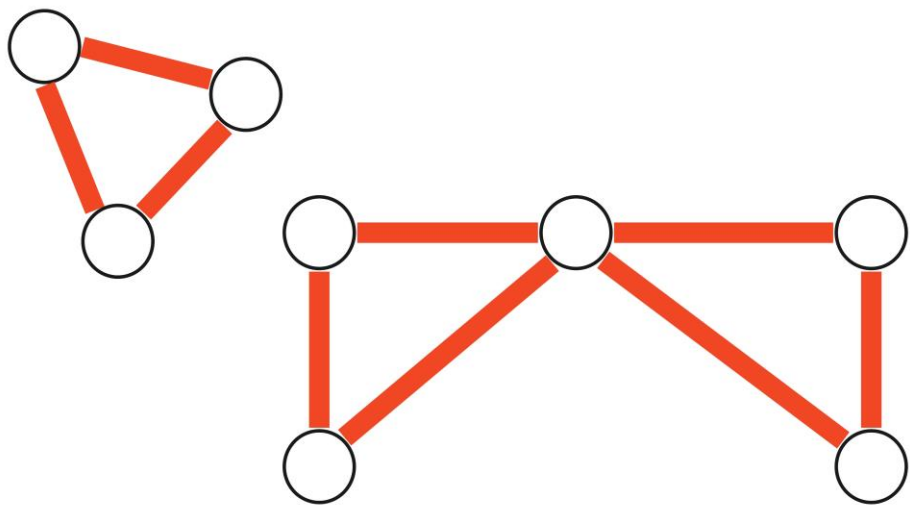
Pre všetky bezmostové kubické grafy s **dĺžkou najkratšej kružnice aspoň 5, bez 2-rezov a netriviálnych 3-rezov**, existuje dvojité pokrytie cyklami tvorené:

- a) *najviac siedmymi indukovanými cyklami (**indukované 7-CDC**)*
- b) *najviac šiestimi cyklami, ktoré sa skladajú z indukovaných kružníc (**semi-indukované 6-CDC**)*

Kružnica – 2-regulárny súvislý graf

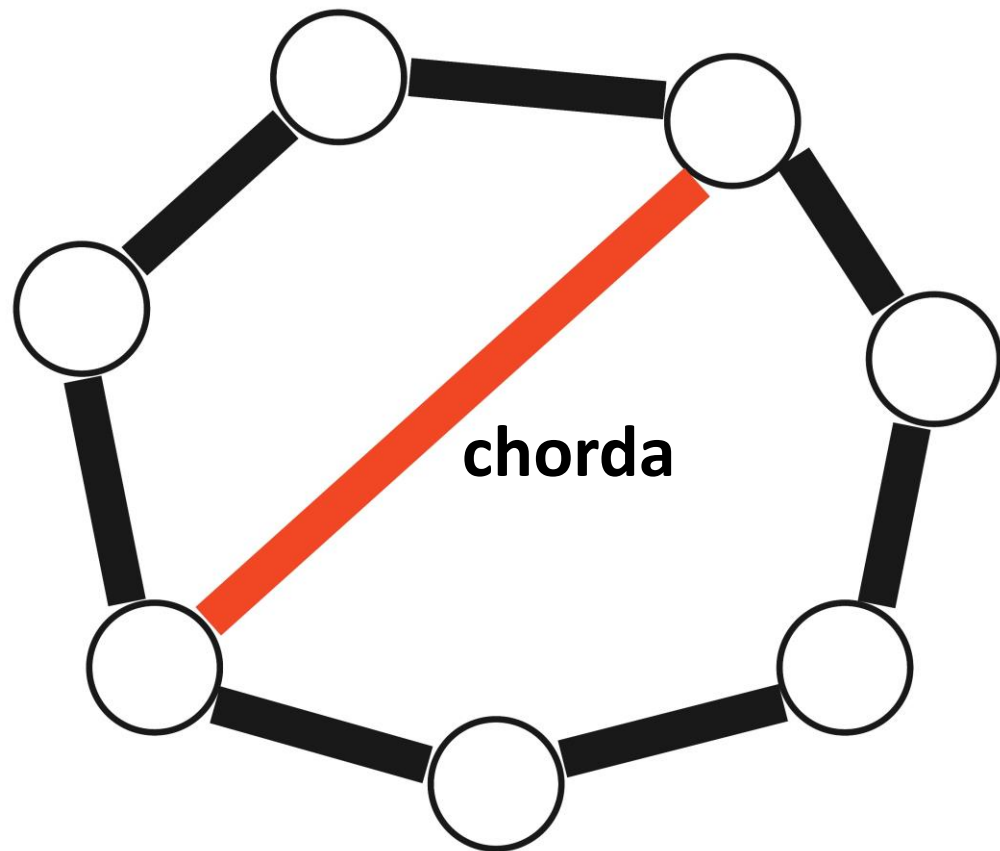


Cyklus – množina hranovo disjunktných kružníc



Pre všetky bezmostové kubické grafy s dĺžkou najkratšej **kružnice** aspoň 5, bez 2-rezov a netriviálnych 3-rezov existuje dvojité pokrytie **cyklami** tvorené:

- najviac siedmymi indukovanými **cyklami** (indukované 7-CDC)*
- najviac šiestimi **cyklami**, ktoré sa skladajú z indukovaných **kružníc** (semi-indukované 6-CDC)*

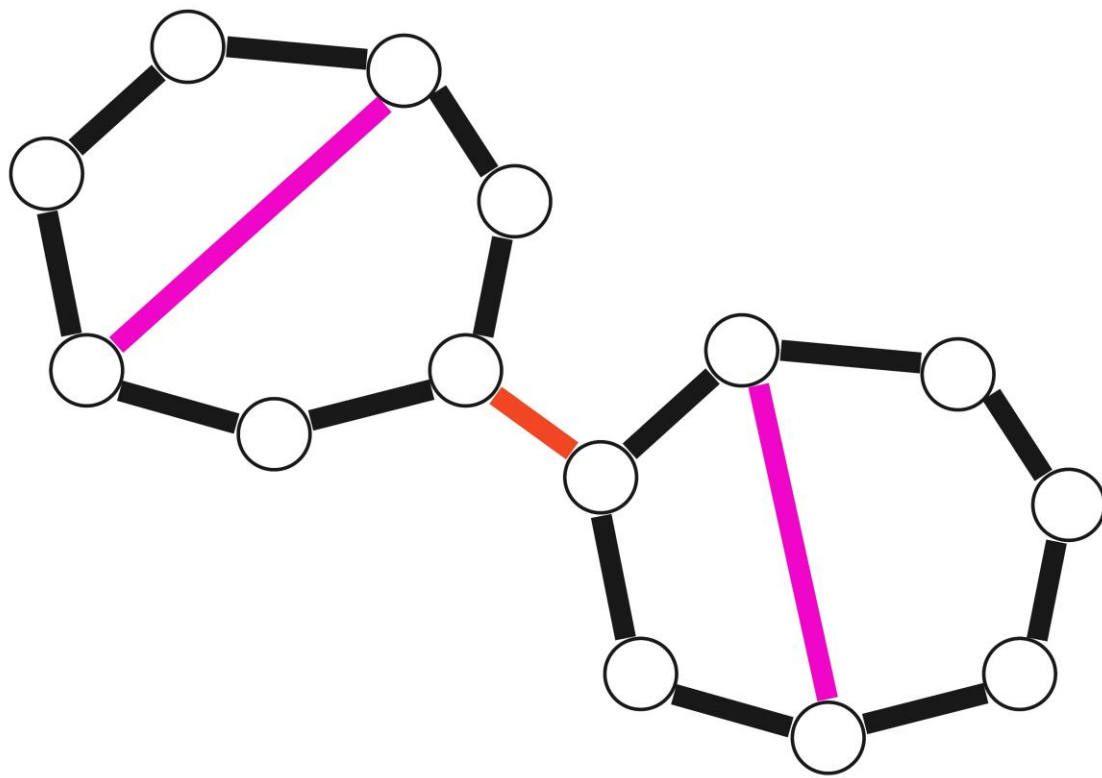


Indukovaná kružnica = kružnica **bez chordy**



Pre všetky bezmostové kubické grafy s dĺžkou najkratšej kružnice aspoň 5, bez 2-rezov a netriviálnych 3-rezov existuje dvojité pokrytie cyklami tvorené:

- najviac siedmymi **indukovanými** cyklami (**indukované 7-CDC**)*
- najviac šiestimi cyklami, ktoré sa skladajú z **indukovaných** kružníc (**semi-indukované 6-CDC**)*



Indukovaný cyklus = kružnice bez chordy a žiadne hrany medzi kružnicami



Pre všetky bezmostové kubické grafy s dĺžkou najkratšej kružnice aspoň 5, bez 2-rezov a netriviálnych 3-rezov existuje dvojité pokrytie cyklami tvorené:

- a) najviac siedmymi **indukovanými** cyklami (**indukované 7-CDC**)
- b) najviac šiestimi cyklami, ktoré sa skladajú z **indukovaných** kružníc (**semi-indukované 6-CDC**)

semi-indukované CDC – cykly zložené z **indukovaných kružníc**, ale **pripúšťajú sa hrany medzi nimi** v rámci jedného cyklu.

Rozklad na kružnice neobsahuje slabé hrany

indukované CDC – iba **indukované cykly**

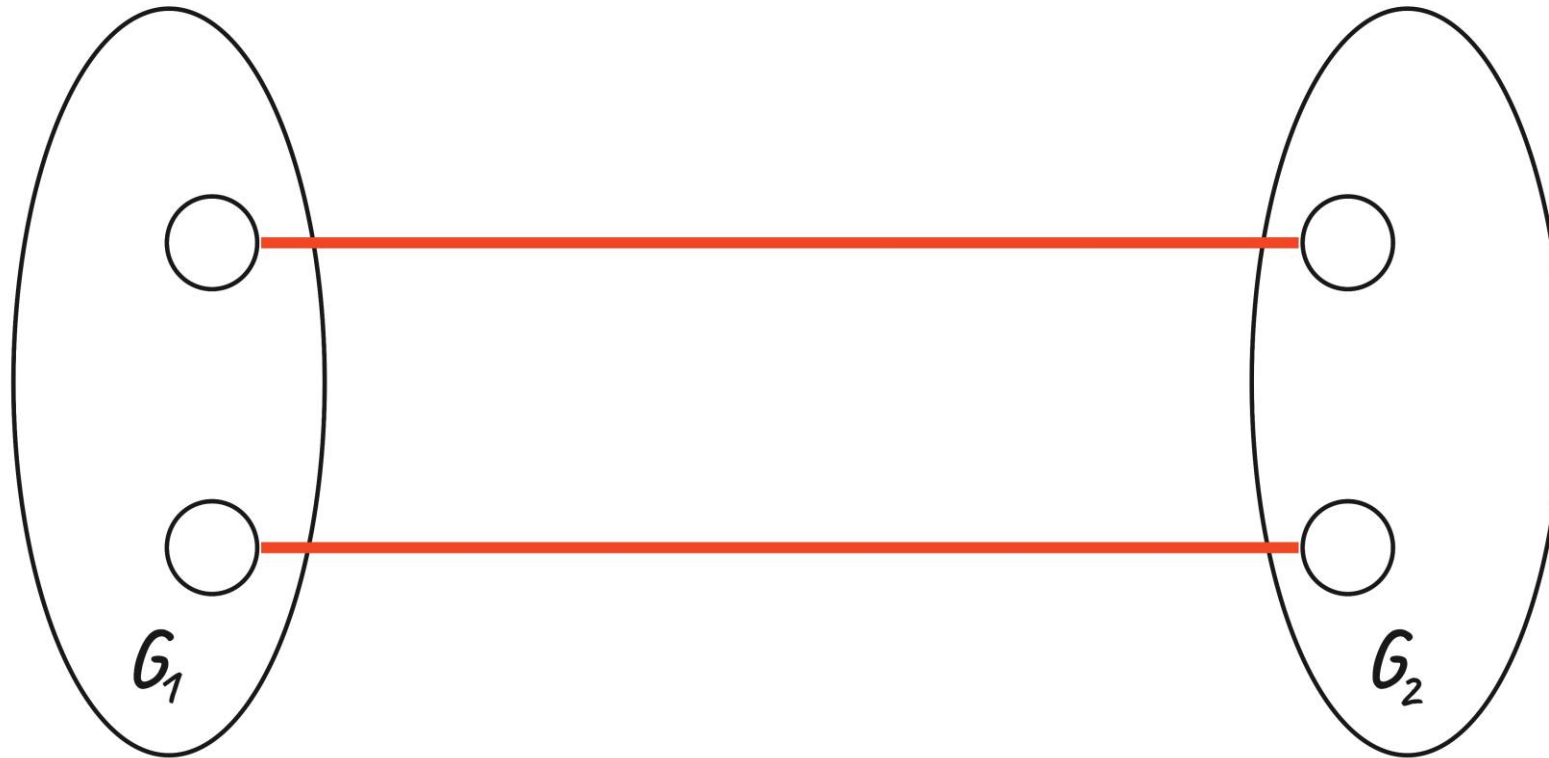
Neobsahuje **žiadne slabé hrany** samé osebe

Pre všetky bezmostové kubické grafy s **dĺžkou najkratšej kružnice aspoň 5**, bez **2-rezov** a **netriviálnych 3-rezov** existuje dvojité pokrytie cyklami tvorené:

- a) *najviac siedmymi **indukovanými** cyklami (**indukované 7-CDC**)*
- b) *najviac šiestimi cyklami, ktoré sa skladajú z **indukovaných** kružníc (**semi-indukované 6-CDC**)*

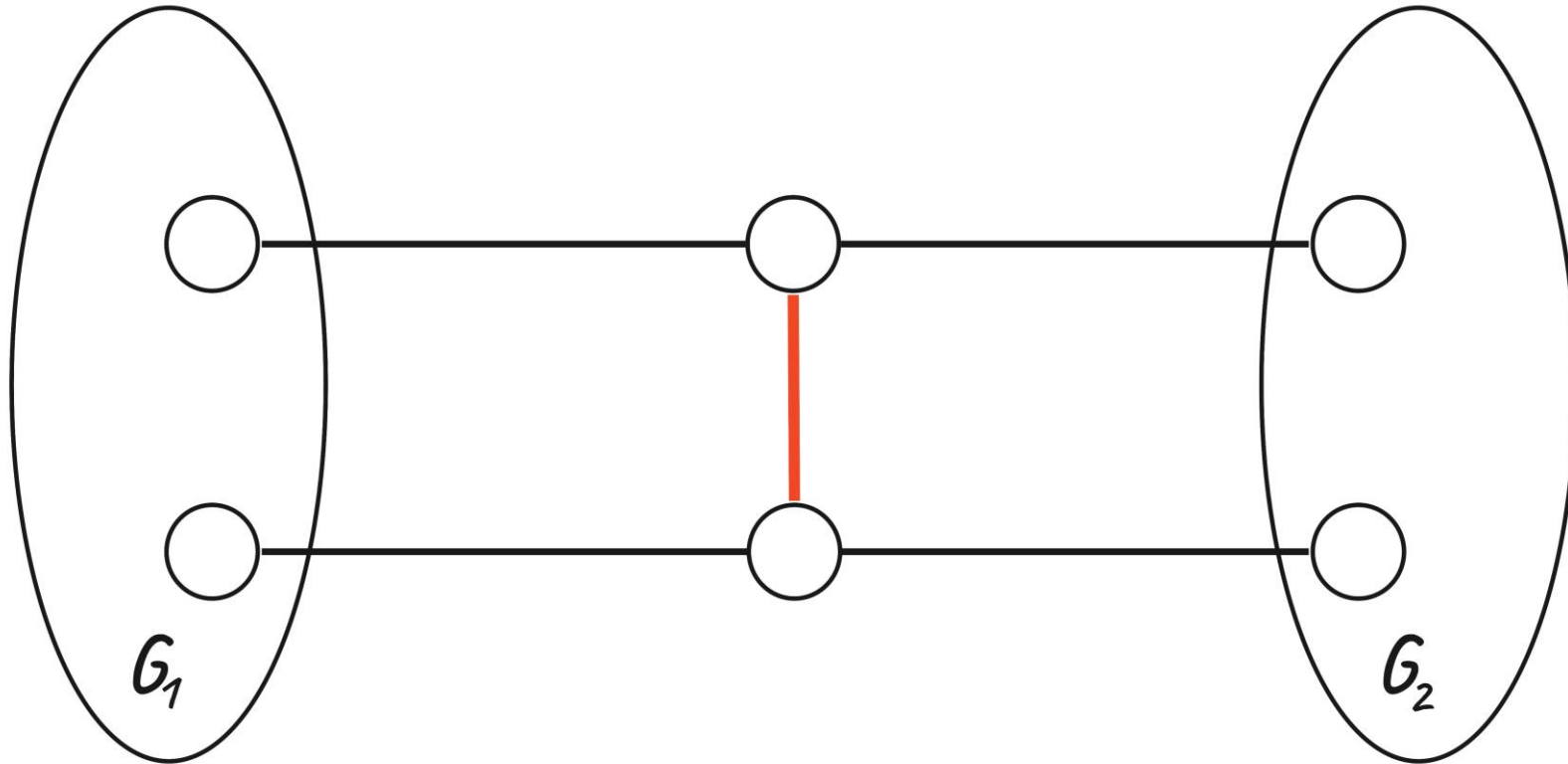
Výsledky

Dokázali sme, že hrany 2-rezu sú **silné** v každom dvojitom pokrytí kružnicami.



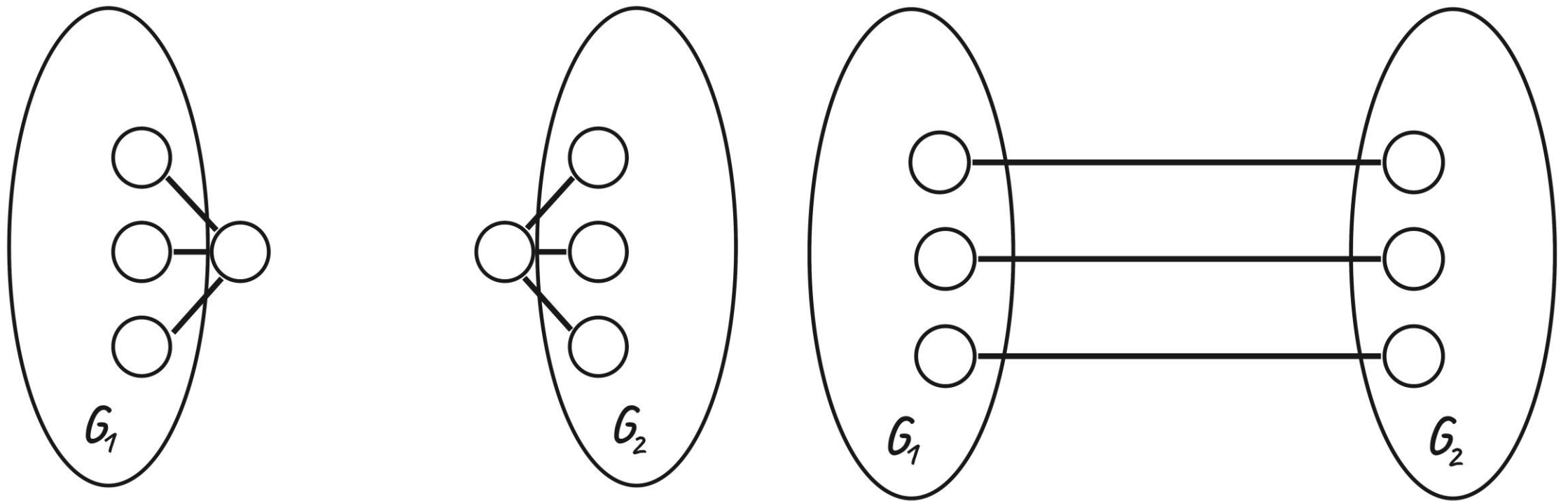
Výsledky

Dokázali sme, že táto hrana, ktorá vznikne **subdivíziou 2-rezu**, je vždy **slabá**.



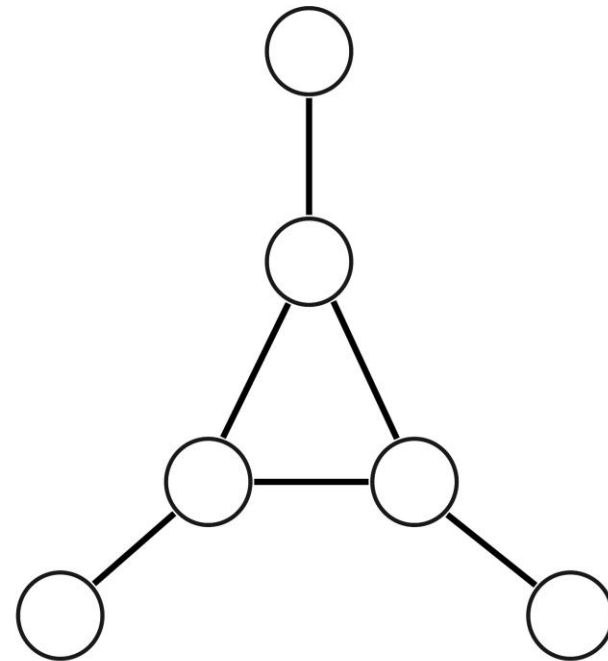
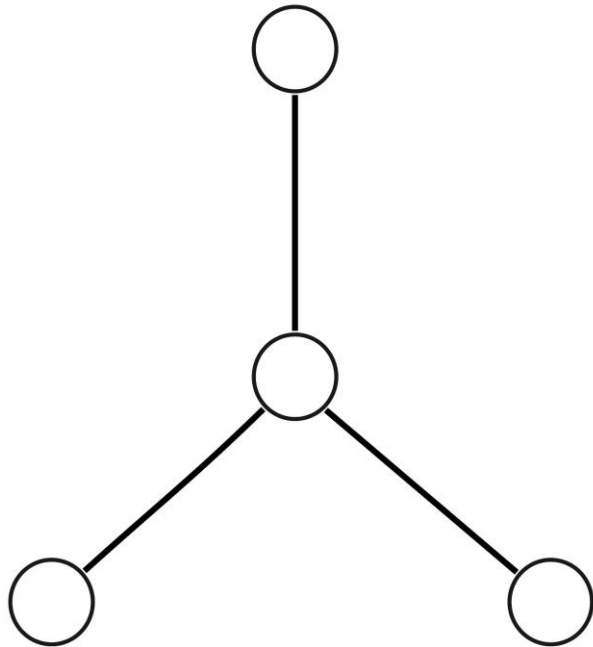
Výsledky

Dokázali sme, že **spojenie grafov cez 3-rez zachováva semi-indukované 6-CDC (indukované 7-CDC).**



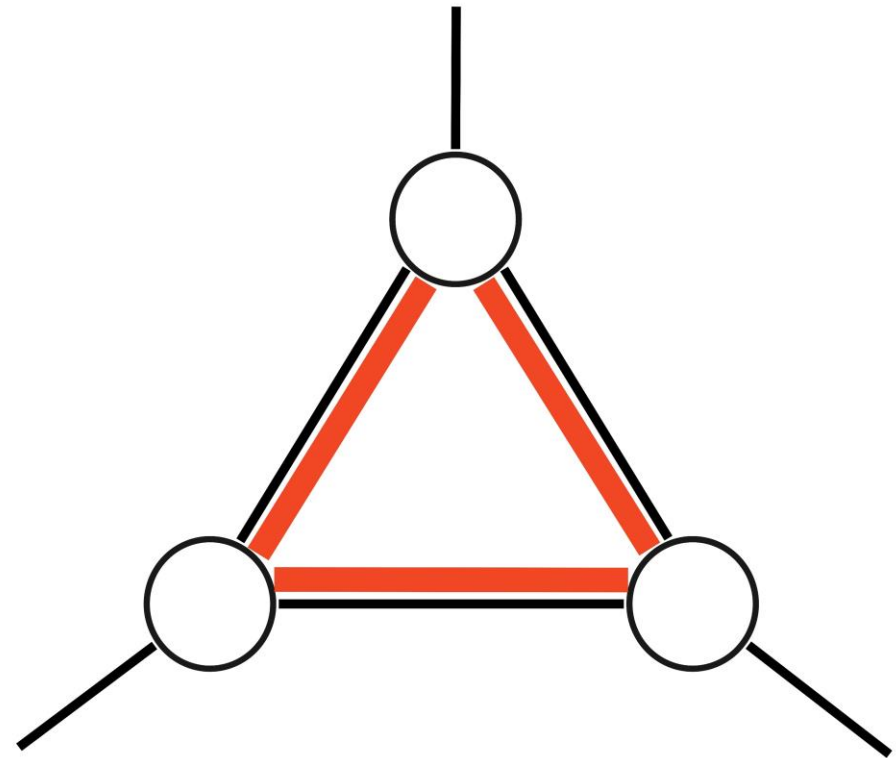
Výsledky

Dokázali sme, že **nafúknutie vrcholu** zachováva **semi-indukované 6-CDC (indukované 7-CDC)**.



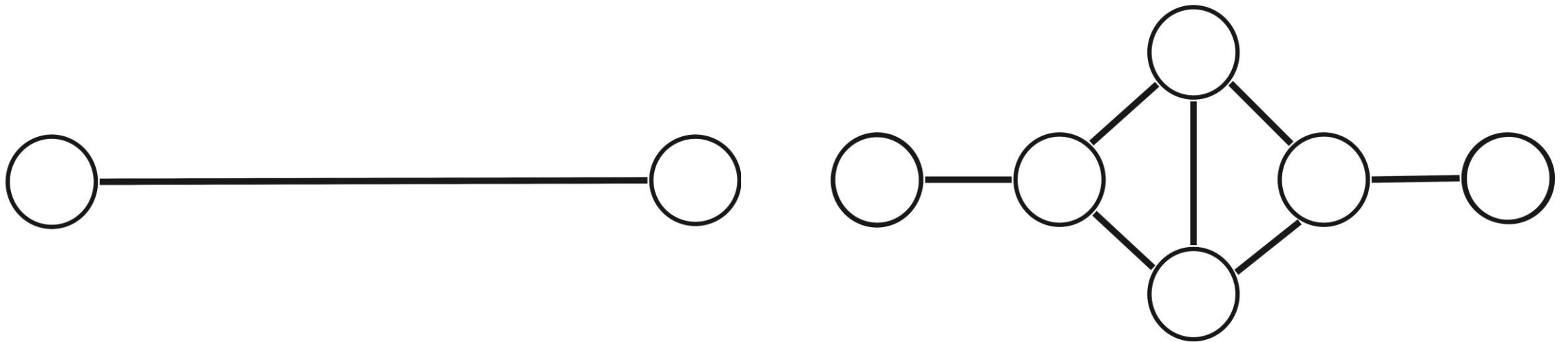
Výsledky

Dokázali sme, že ak má graf **trojuholník**, tak potom každé semi-indukované (indukované) dvojité pokrytie cyklami **obsahuje cyklus obsahujúci trojuholník ako kružnicu.**



Výsledky

Dokázali sme, že **nafúknutie hrany** zachováva **semi-indukované 6-CDC** (**indukované 7-CDC**).



Výsledky

Podarilo sa nám dokázať našu hypotézu pre:

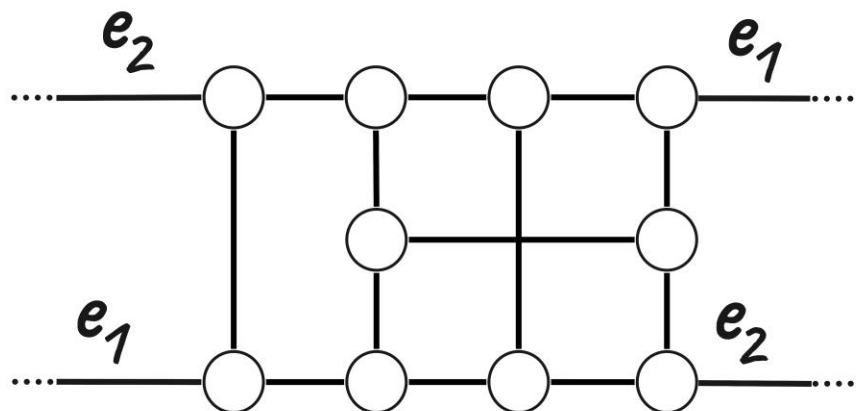
Issacsové snarky

Zovšeobecnené Blanušové snarky

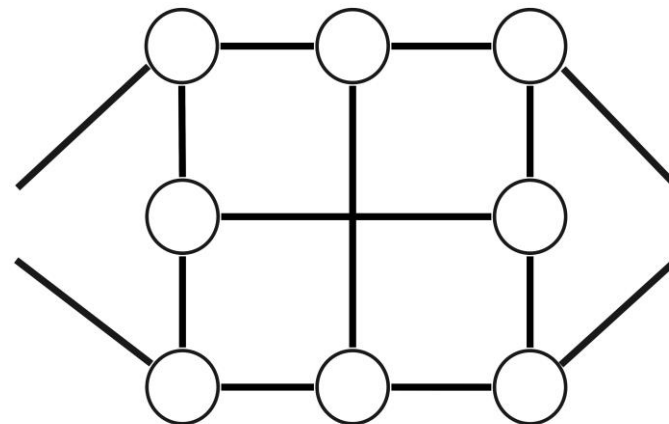
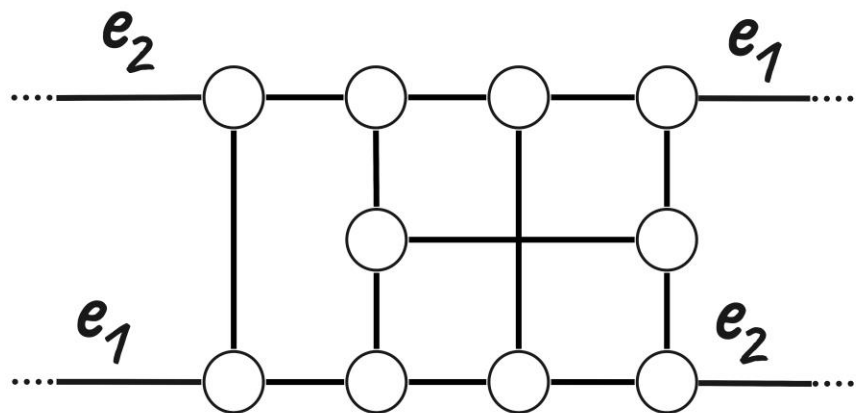
čiastočne pre **Loupekinové snarky**

Pomocou softvéru sme **pretestovali našu hypotézu pre všetky kubické grafy** s dĺžkou najkratšej kružnice aspoň 5, bez 2-rezov a netrivialných 3-rezov **do 24 vrcholov**.

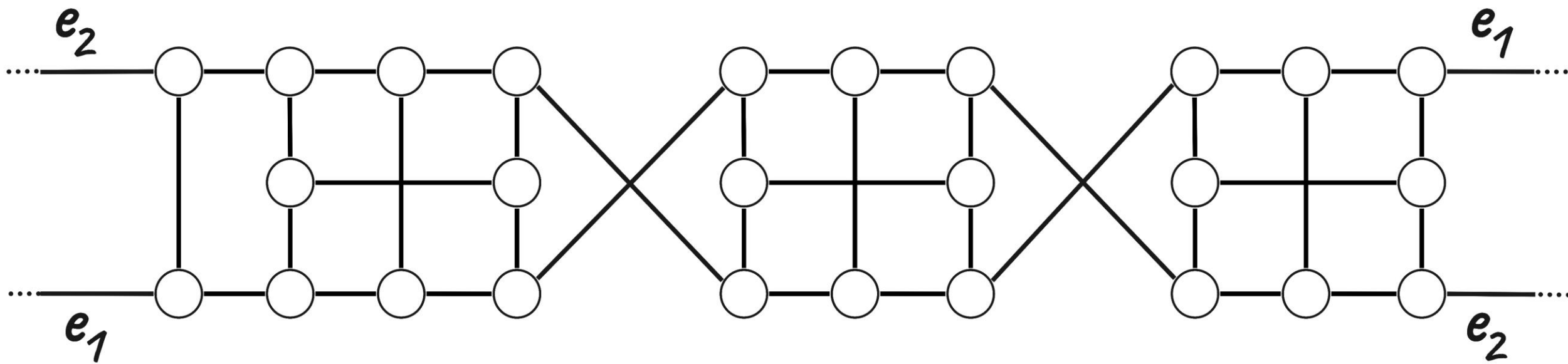
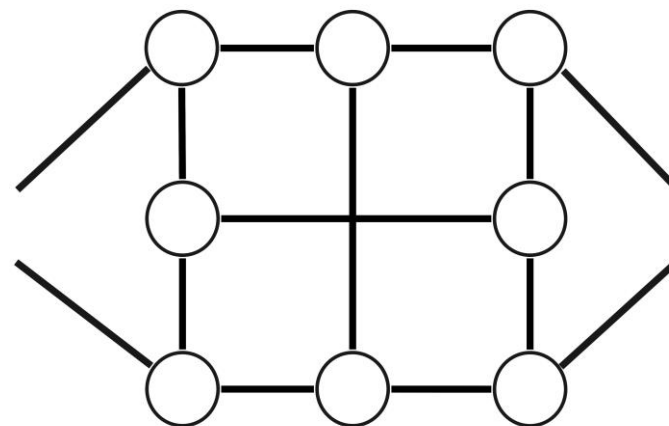
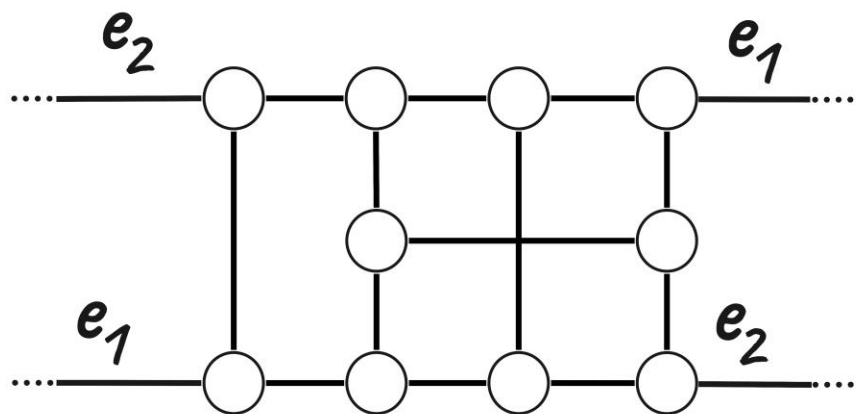
Zovšeobecnené Blanušové snarky

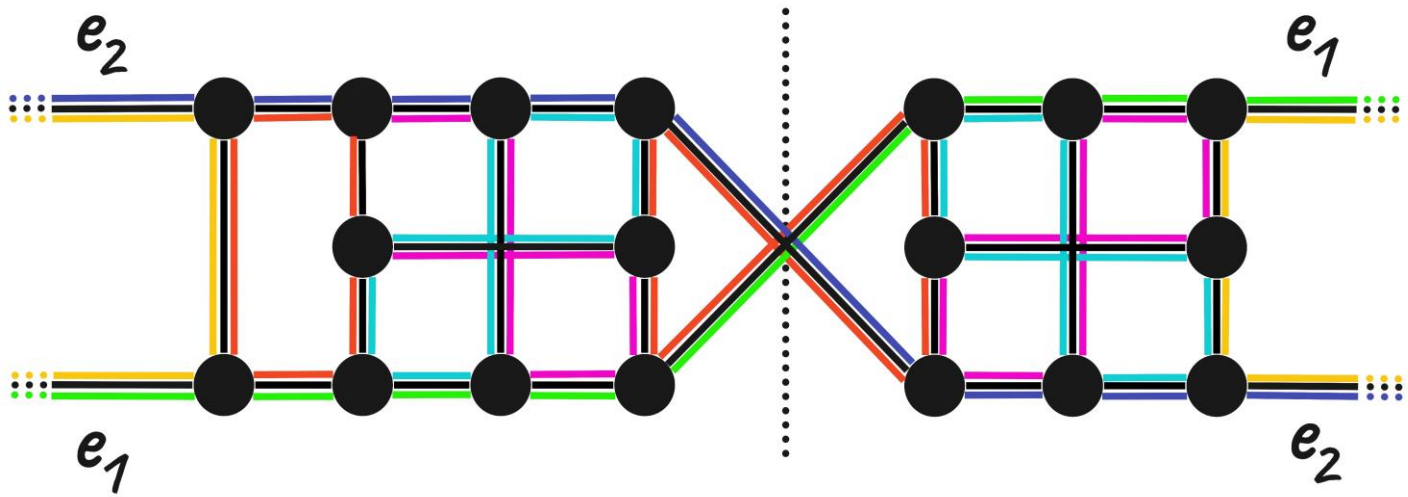


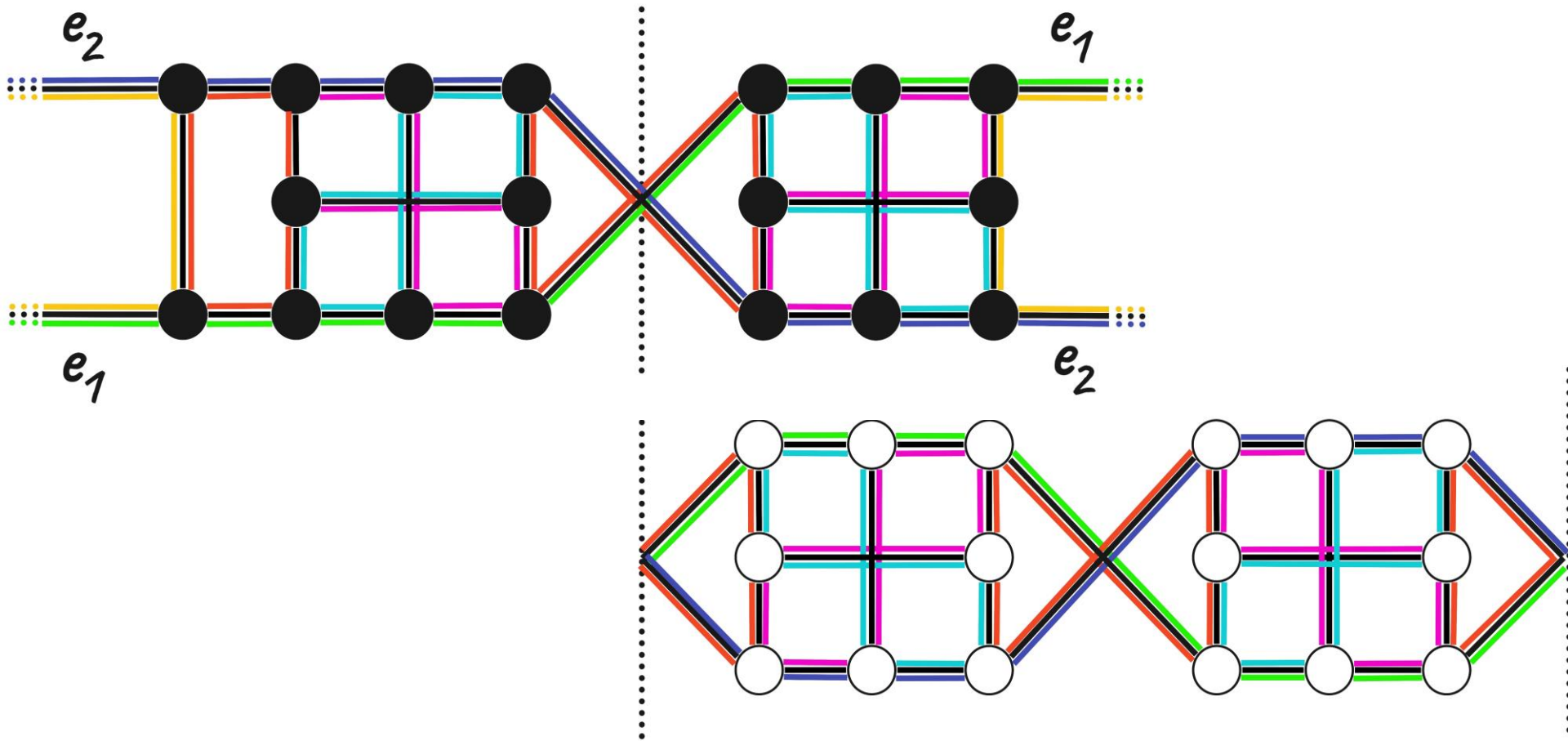
Zovšeobecnené Blanušové snarky

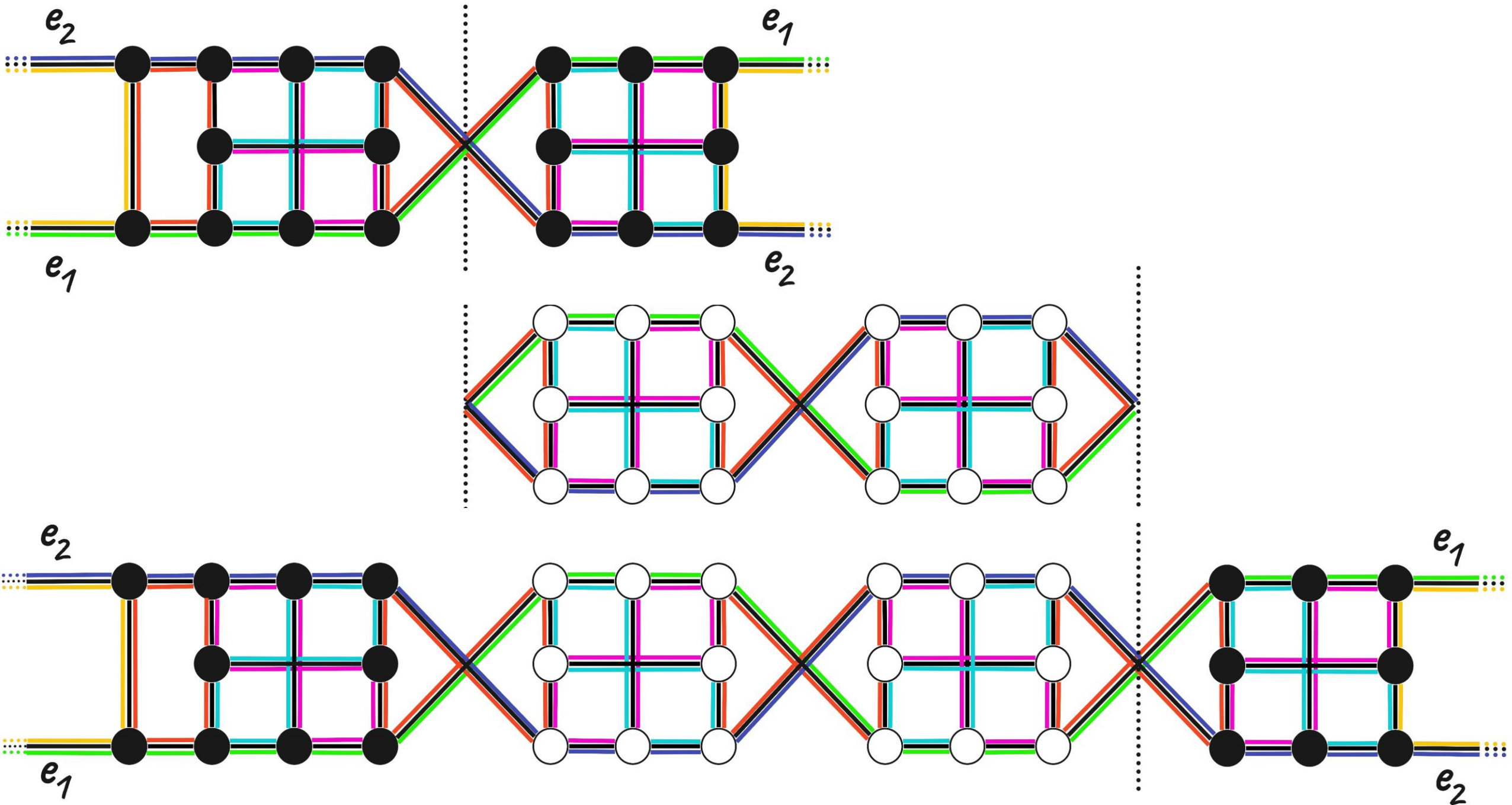


Zovšeobecnené Blanušové snarky









Zhrnutie

- **Dokázali sme našu hypotézu** pre niektoré nekonečné triedy grafov.
- Dokázali sme, že **nafúknutie vrchola, hrany a spojenie grafov cez 3-rez** zachováva semi-indukované 6-CDC (indukované 7-CDC).
- Dokázali sme, že **hrany 2-rezu** sú v dvojitych pokrytiach kružnicami vždy **silné** a **hrana**, ktorá vznikne **subdivizovaním 2-rezu** je vždy **slabá**.

Ďakujem za pozornosť

Sú konštrukcie izomorfné?

