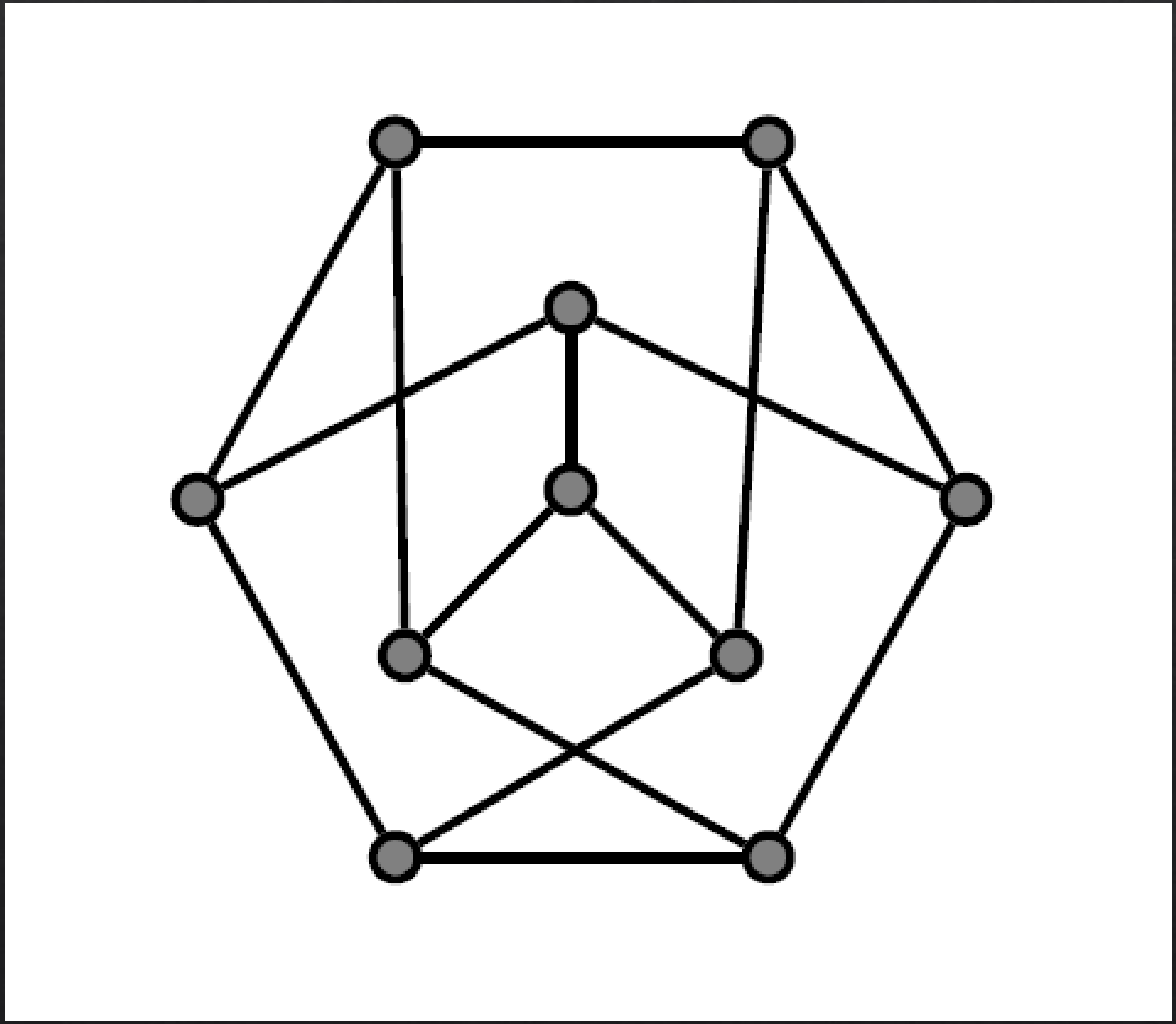
Covering cubic graphs with perfect matchings

Ivan Agarský

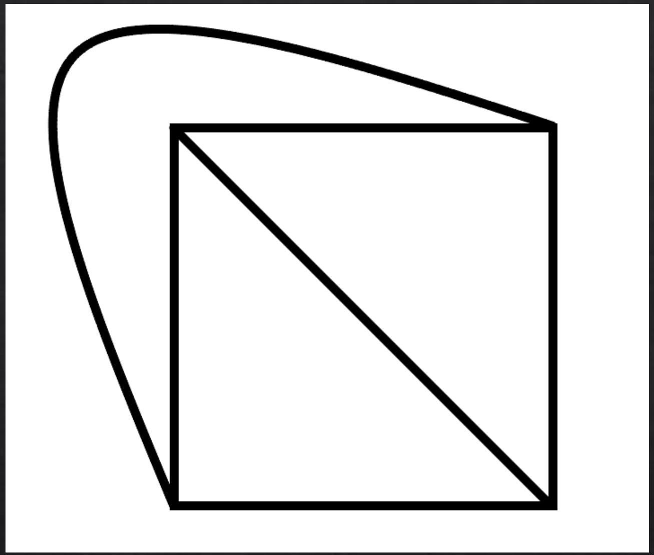
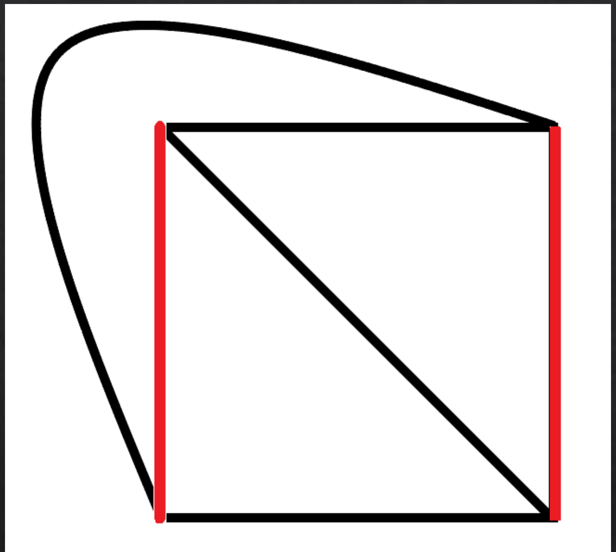
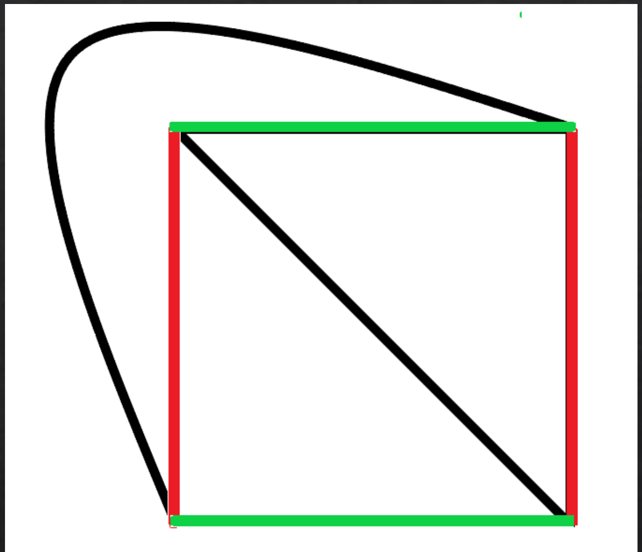
Základné pojmy

- Kubický graf



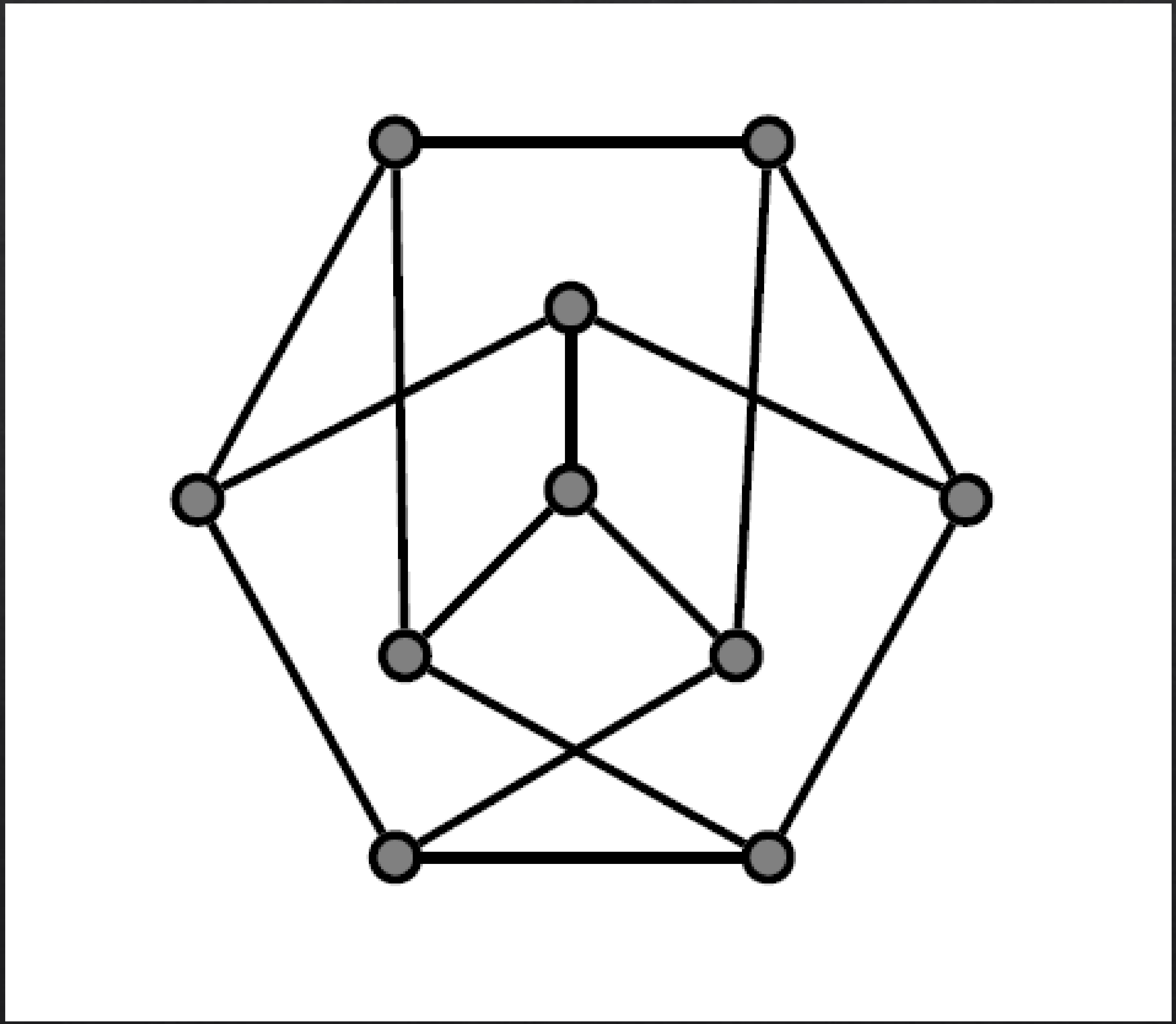
Základné pojmy

- Perfektné párenia

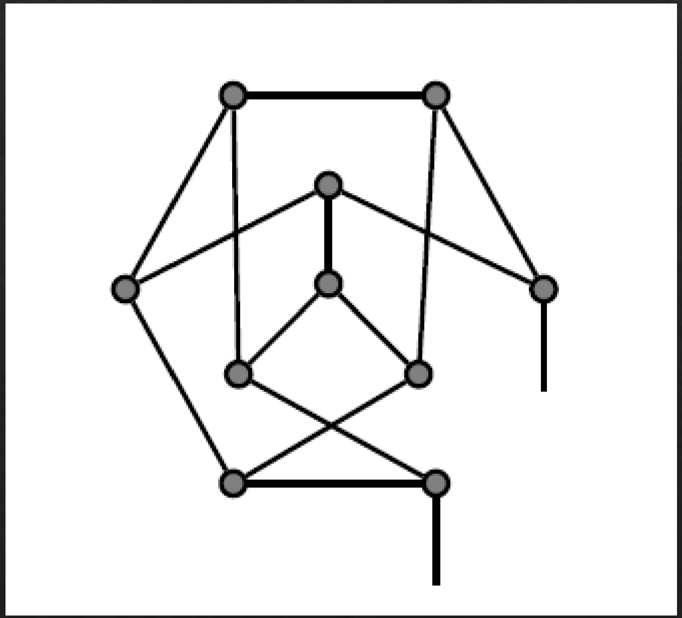
Základné pojmy

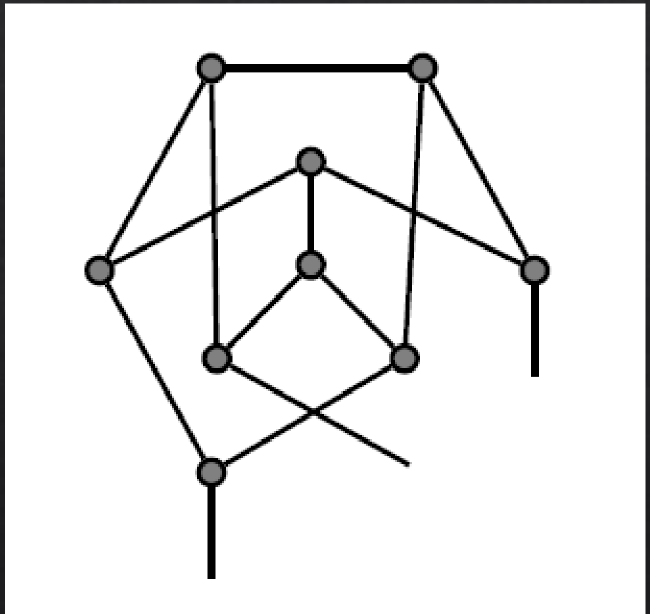
- Snarky



Základné pojmy

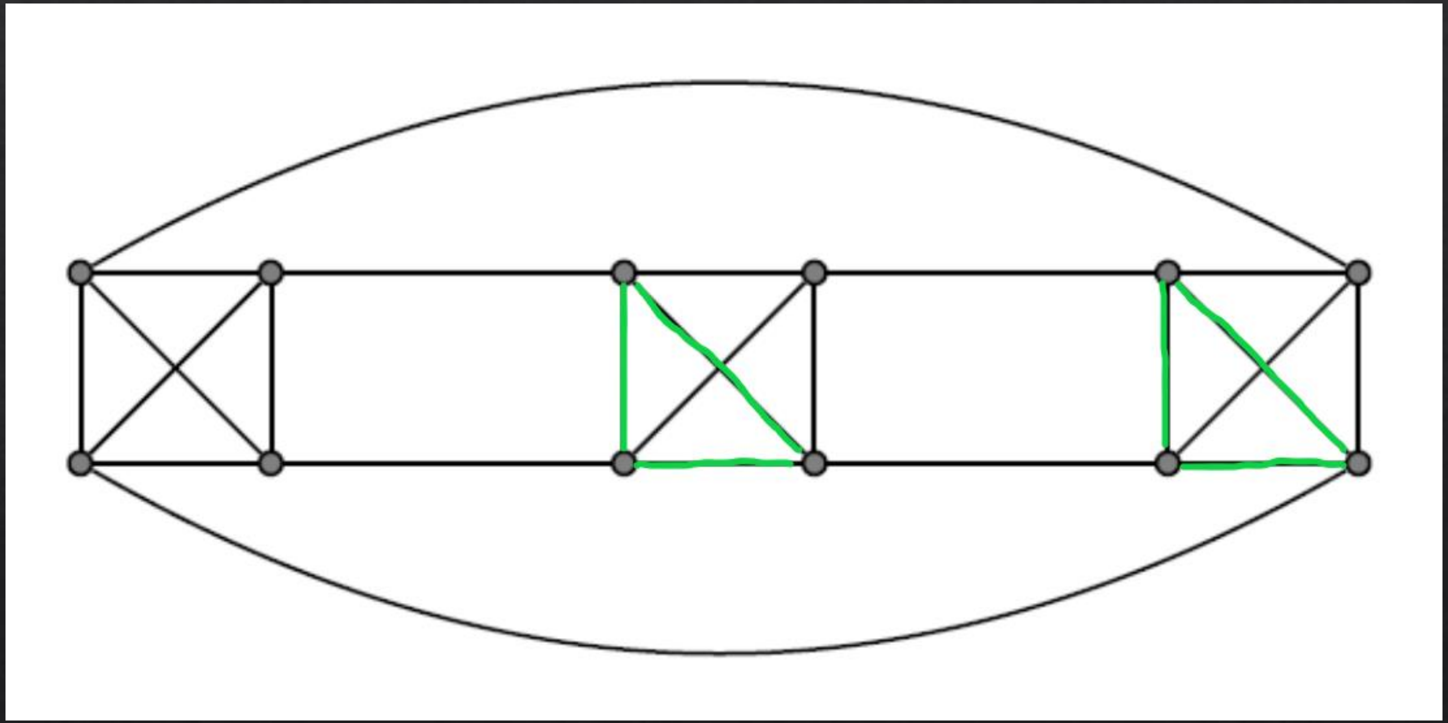
- Multipoly





Základné pojmy

- Cyklická súvislosť



Čísla m_k

- $m_k = \inf \max \frac{|\cup_i M_i|}{|E(G)|}$, maximum cez všetky k-podmnožiny perfektných párení v grafe, infímum cez všetky kubické bezmostové grafy.

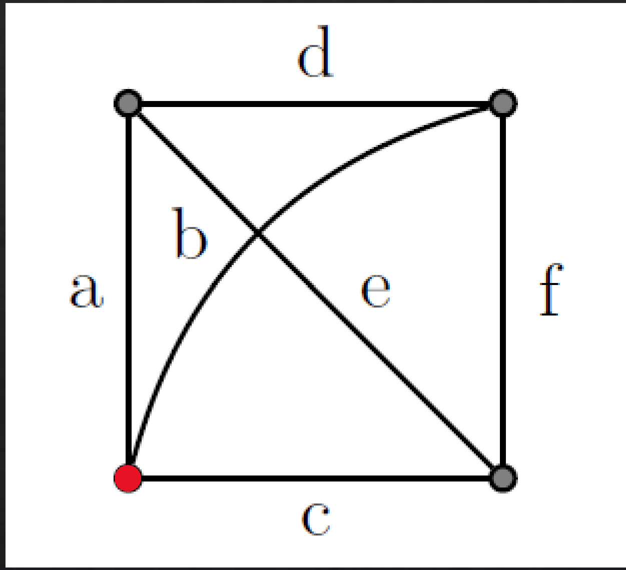
- $m_1 = \frac{1}{3}$
- $m_2 = \frac{3}{5}$
- $\frac{27}{35} \leq m_3 \leq \frac{28}{35}$ (4/5)

Problém

- Problém: Nech r ϵ (0, 1) ∩ Q je zlomok a k ≥ 2 je prirodzené číslo. Je pravda, že existuje cyklický k-súvislý kubický graf G taký, že m3(G) = r?
- Technika dilution ("rozriedenie")
- k = 2: r ϵ $(\frac{4}{5}, 1)$

Knižnica ba-graph

- Hľadanie perfektných párení v grafe pomocu CNF a SAT solvera.
- Ukážka CNF pre nejaký vrchol (dolný ľavý na obrázku)



$(a \lor b \lor c) \land (\neg a \lor \neg b) \land (\neg b \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg c)$

Vytváranie multipolov

- 2 – rozseknutie jednej hrany
- 3 – odobratie jedného vrchola
- 4
  - rozseknutie dvoch nesusedných hrán
  - odobratie dvoch susedných vrcholov
- 5 – rozseknutie jednej hrany a odobratie jedného vrchola

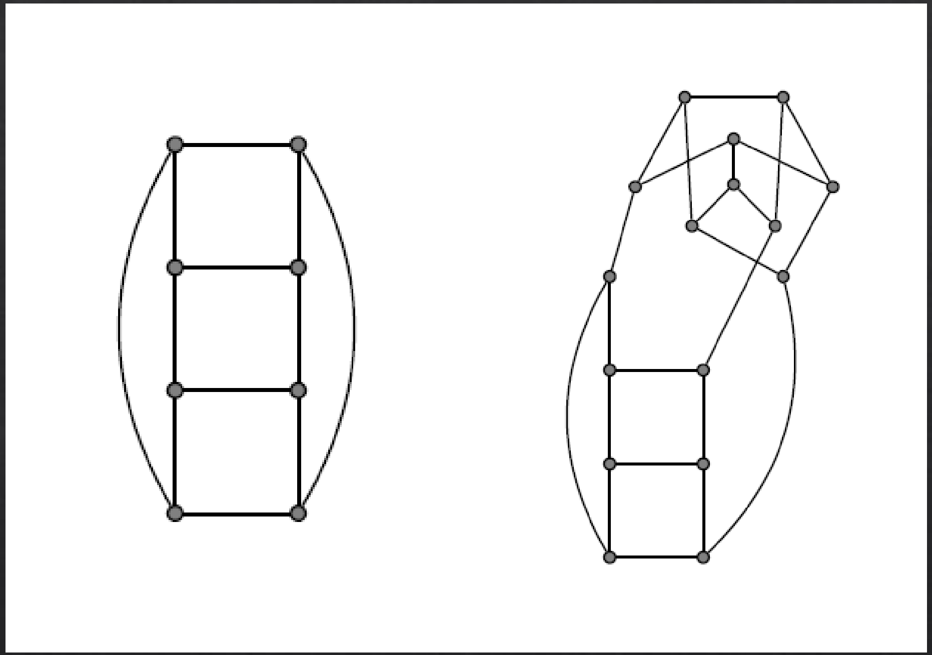
Hľadanie najlepších pokrytí

- Nájdeme všetky perfektné párenia
- Pre každú trojicu vypočítame pokrytie
- Vyberieme max

- Pre multipoly, nas zaujíma aj ako sú pokryté trčiace hrany

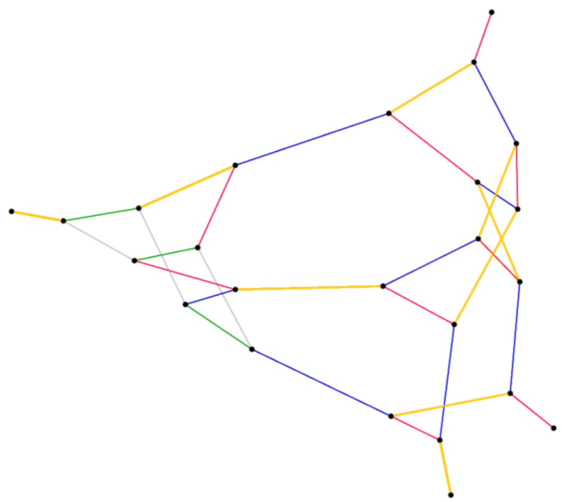
Výsledky – cyklická súvislosť 3 (k = 3)

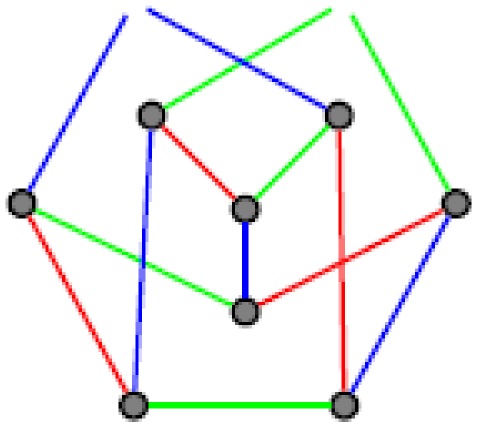
- Interval $(\frac{23}{27}, 1)$
- $\frac{p}{q}$
- Počet vnorení: 3(q - p)
- Počet vrcholov v začiatočnom grafe: 27p - 23q + 3(q - p)



Výsledky – cyklická súvislosť 3 (k = 3)

- Všeobecne pre interval $(\frac{2x - 2y - 3}{2x - 3}, 1)$, x počet hrán, y počet nepokrytých hrán v grafe
- $\frac{p}{q}$
- Počet vnorení: 3(q – p)
- Počet vrcholov v začiatočnom grafe: (2x – 3)p – (2x – 2y – 3)q + 3(q – p)





Výsledky – cyklická súvislosť 4 (k = 4)

- Interval $(\frac{28}{31}, 1)$
- $\frac{p}{q}$
- Počet vnorení: 12(q - p)
- Počet Petersenových 4-polov v začiatočnom grafe:
  31p - 28q + 12(q - p)

Výsledky – cyklická súvislosť 4 (k = 4)

- Všeobecne pre interval $(\frac{x-y-2}{x-2}, 1)$, x počet hrán, y počet nepokrytých hrán v grafe
- $\frac{p}{q}$
- Počet vnorení: 12(q – p)
- Počet vrcholov v začiatočnom grafe:
  (x - 2)p – (x - y - 2)q + 12(q – p)

Bonus

- Cyklická súvislosť 5
- Interval $(\frac{94}{102}, 1)$
- 18 vrcholov, 21/23, 5/5