Potláčania hrán v kubických grafoch

Matúš Zubčák,

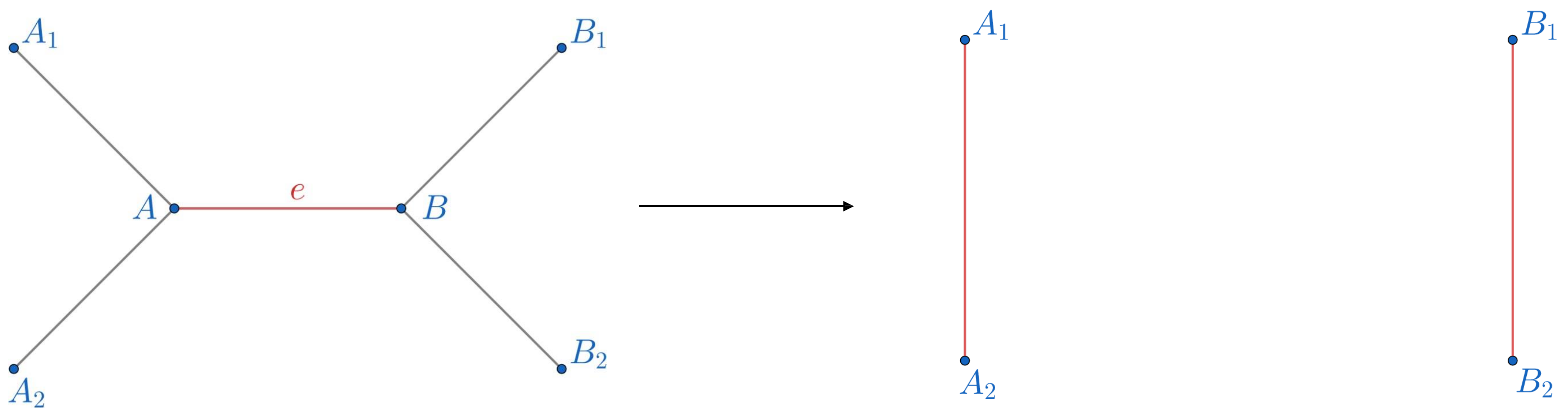
doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.

Úvod do problematiky

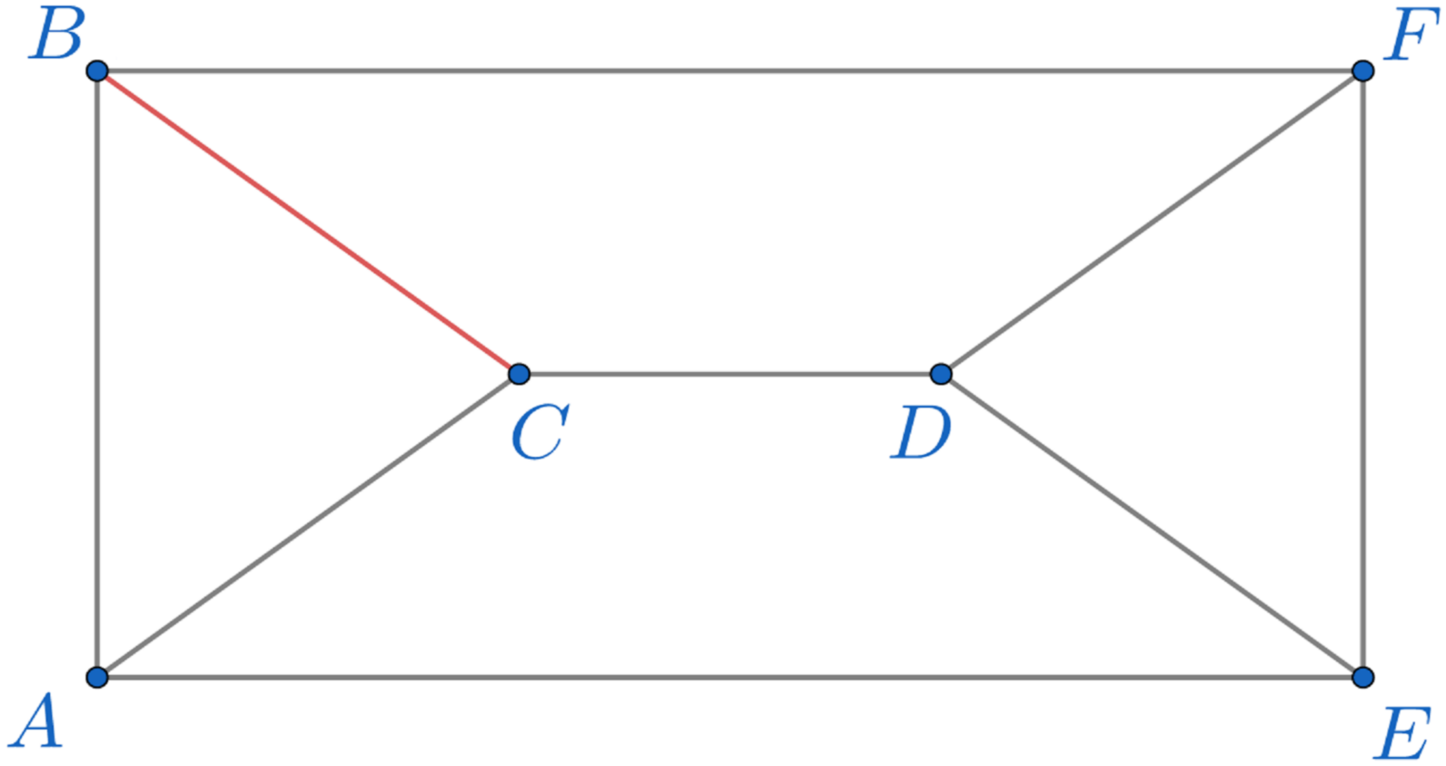
- Mnohé otvorené hypotézy z teórie grafov je možné zredukovať na kubické grafy
- Hypotézy sú otvorené pre hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy
- Hľadajú sa vhodné miery „nezafarbiteľnosti“ kubického grafu, na základe ktorých by sme vedeli rozdeliť kubické grafy do tried
- V našej práci skúmame takzvanú Kászonyiho funkciu, paralelnú a sériovú rezistenciu

Potlačenie hrany *e* v kubickom grafe

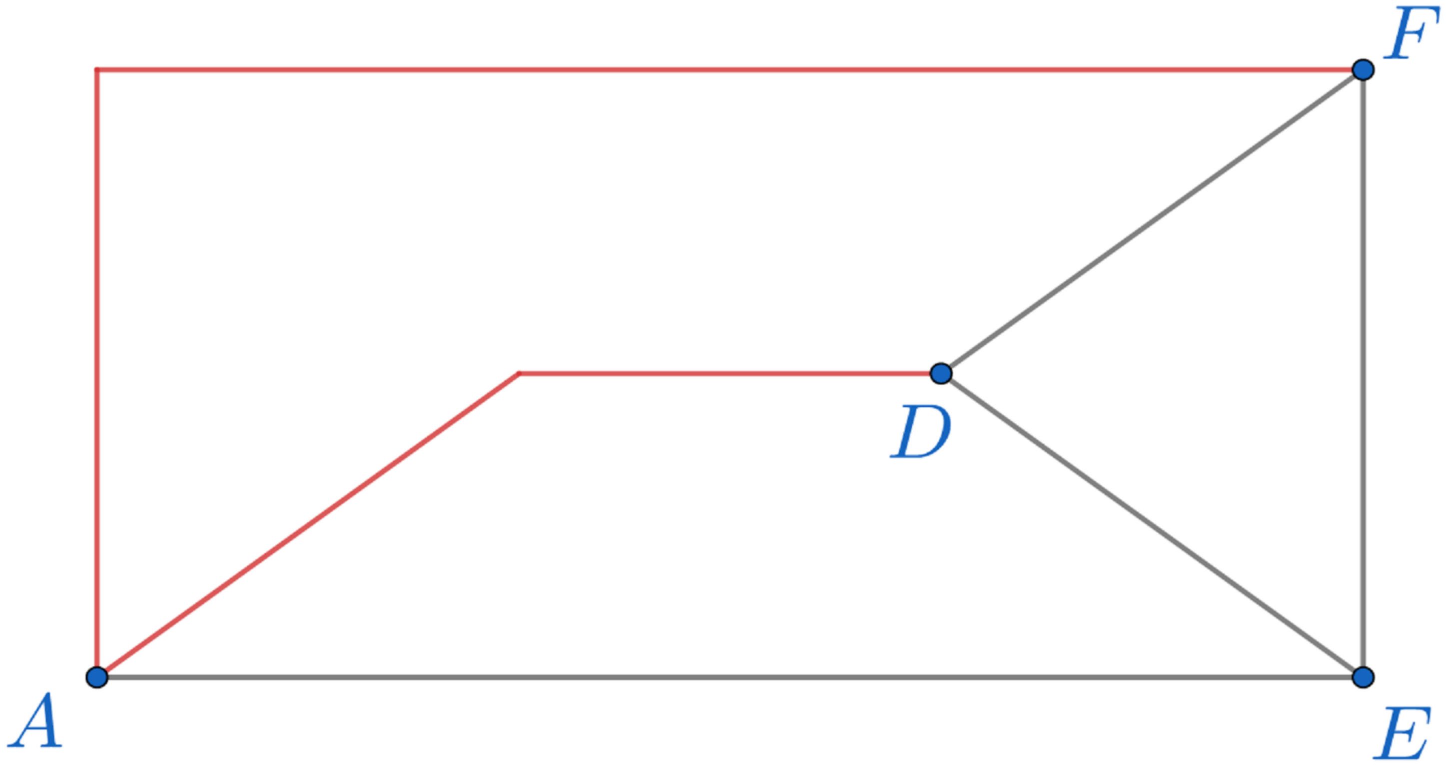
- Potlačenie hrany *e* v kubickom grafe je odobratie hrany *e* a následné vyhladenie vrcholov stupňa 2



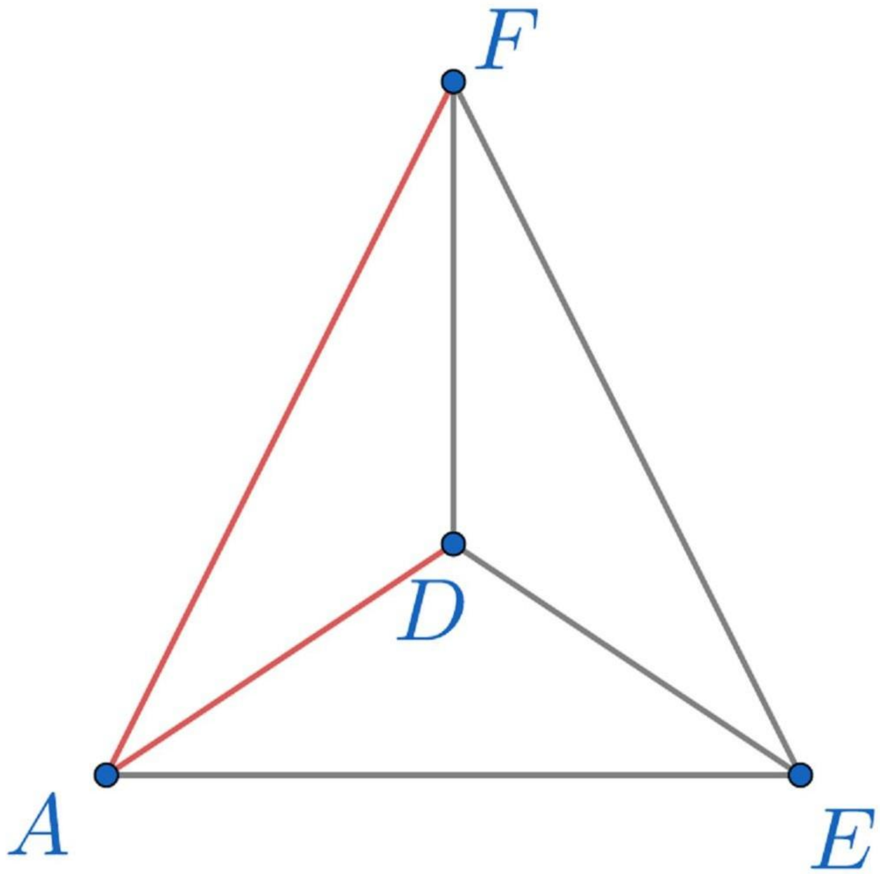
Príklad hranového potlačenia – graf prizma



Príklad hranového potlačenia – po potlačení



Príklad hranového potlačenia – výsledný graf



Kászonyiho funkcia

- Kászonyiho funkcia $\psi(e)$ vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení grafu G po potlačení hrany e

- (Kászonyi 1973) *„Nech H je súvislý podgraf snarku G, ktorý vznikol ako zjednotenie niekoľkých 5-cyklov. Potom hodnota Kászonyiho funkcie $\psi(e)$ je pre všetky hrany $e \in E(H)$ rovnaká.“*

Kászonyiho funkcia

- Nech P je množina nasledovných prvočísel: $P = P_1 \cup P_2$ pričom
  $P_1 = \{p \in N_{149} |\ p$ je prvočíslo$\}$,
  $P_2 = \{173, 179, 181, 197, 229, 257, 271, 359\}$

- (Capoon, Walther) *„Pre každé prirodzené číslo n tvaru*

$$n = \prod_{p \in P} p^k,\ k \in N$$

  existuje snark G a hrana $e \in E(G)$ taká, že Kászonyiho funkcia $\psi(e)$ pre danú dvojicu (G, e) nadobúda hodnotu $\psi(e) = n$"

Kászonyiho funkcia – výsledky

- V našej práci sme určili hodnotu Kászonyiho funkcie $\psi(e)$ pre dve nekonečné triedy kubických grafov:
  - Isaacsove snarky
  - zovšeobecnené Blanušove snarky

Isaacsove snarky a Kászonyiho funkcia

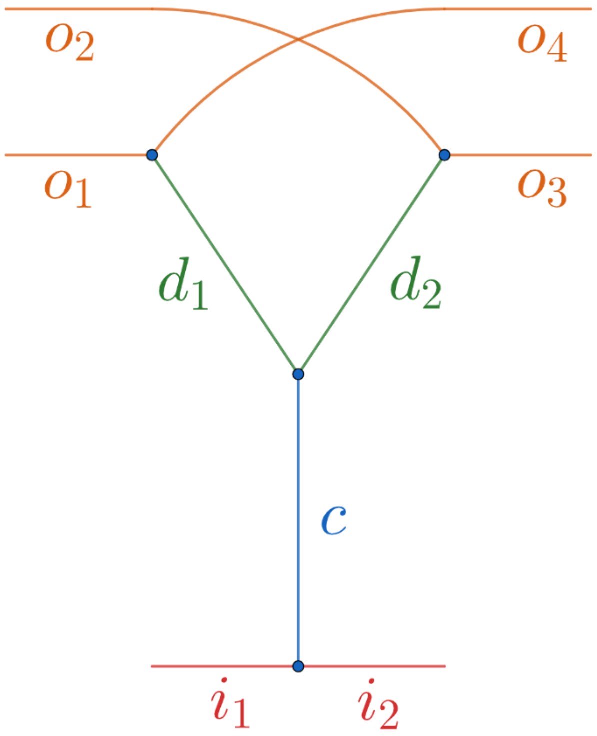
- Isaacsov snark J_n je kubický graf zložený z n Isaacsových (3,3)-pólov Y_k
- Pre Kászonyiho funkciu $\psi(e)$ pre hrany v Isaacsovom snarku J_n platí:

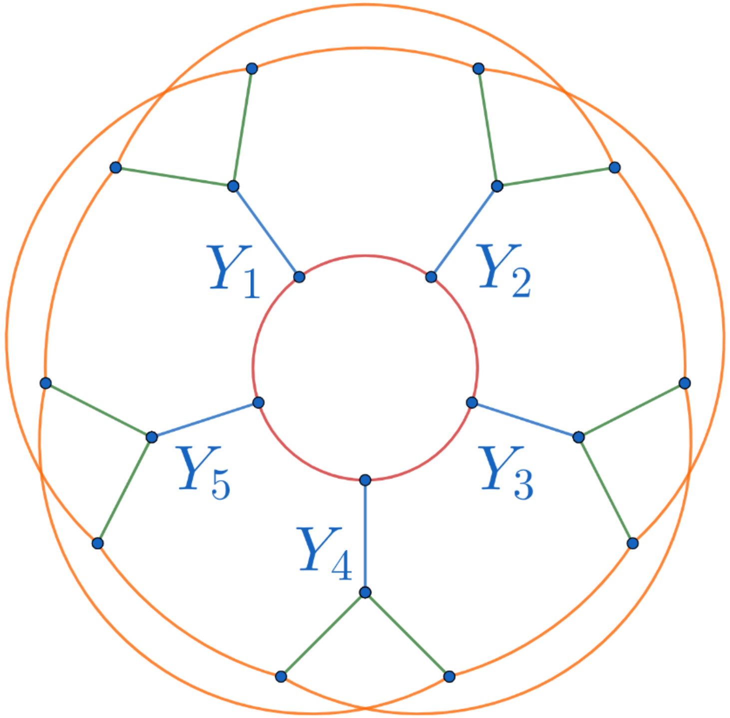
$$\psi(c_n) = 2^{n-1} + 2$$

$$\psi(d_n) = \psi(c_n) - 3$$

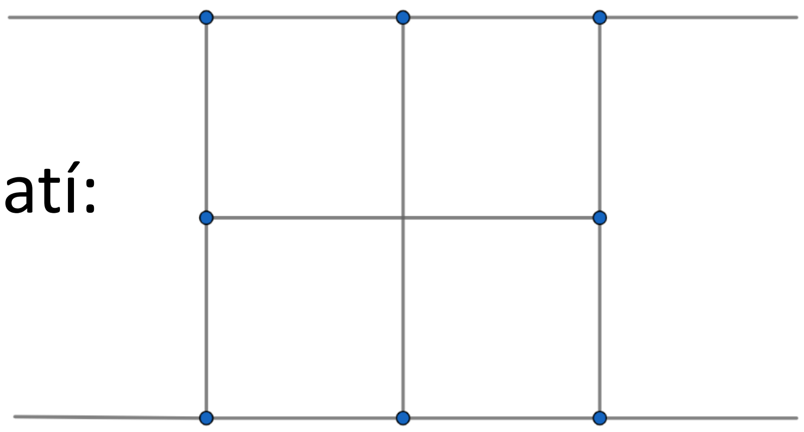
$$\psi(o_n) = \frac{1}{2}\,\psi(c_n)$$

$$\psi(i_n) = \psi(o_n) - 3$$





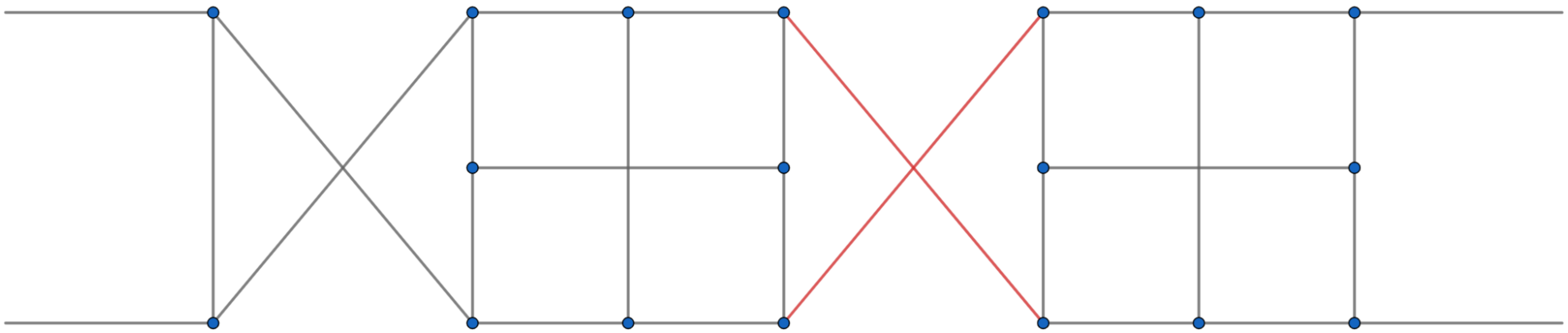
Zovšeobecnené Blanušove snarky



- Pre Kászonyiho funkciu $\psi(e)$ hrany e v zovšeobecnenom Blanušovom snarku platí:

$\psi(e) = 9 \cdot 2^{n-2}$, ak e je spájajúca hrana

$\psi(e) = 3 \cdot 2^{n-1}$, inak



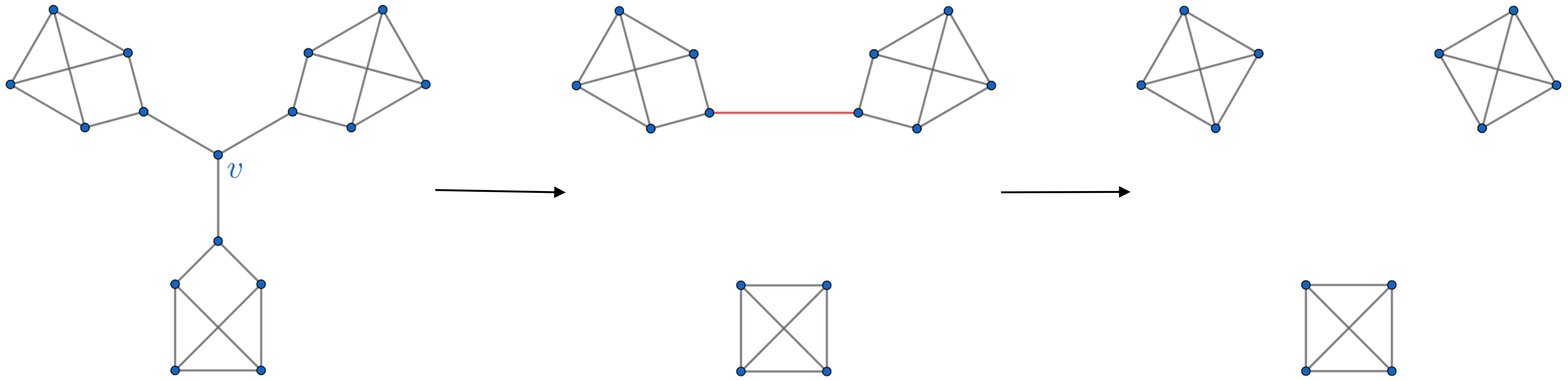
Paralelná a sériová rezistencia

- Párenie – množina po dvoch nezávislých hrán

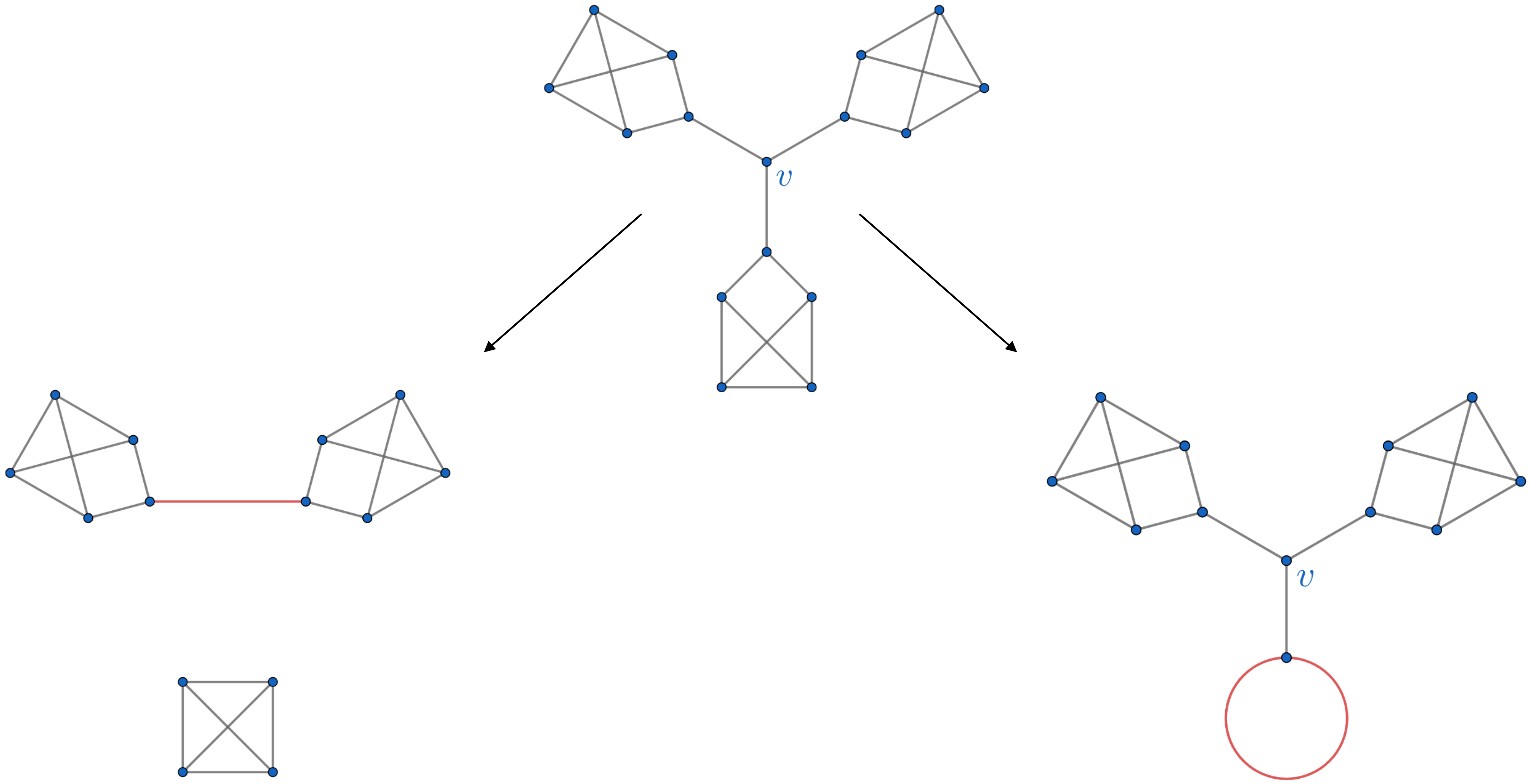
- Paralelná rezistencia $\pi(G)$ je veľkosť takého minimálneho párenia P na grafe G, že potlačením hrán $e \in P$ vznikne 3-zafarbiteľný graf
  - je dokázané, že na poradí potlačených hrán z párenia nezáleží

- Sériová rezistencia $\sigma(G)$ je minimálny počet postupných potlačení hrán grafu G takých, že výsledný graf je hranovo 3-zafarbiteľný
  - pri sériovej rezistencii môžeme potláčať aj novovzniknuté hrany

Sériová rezistencia – príklad

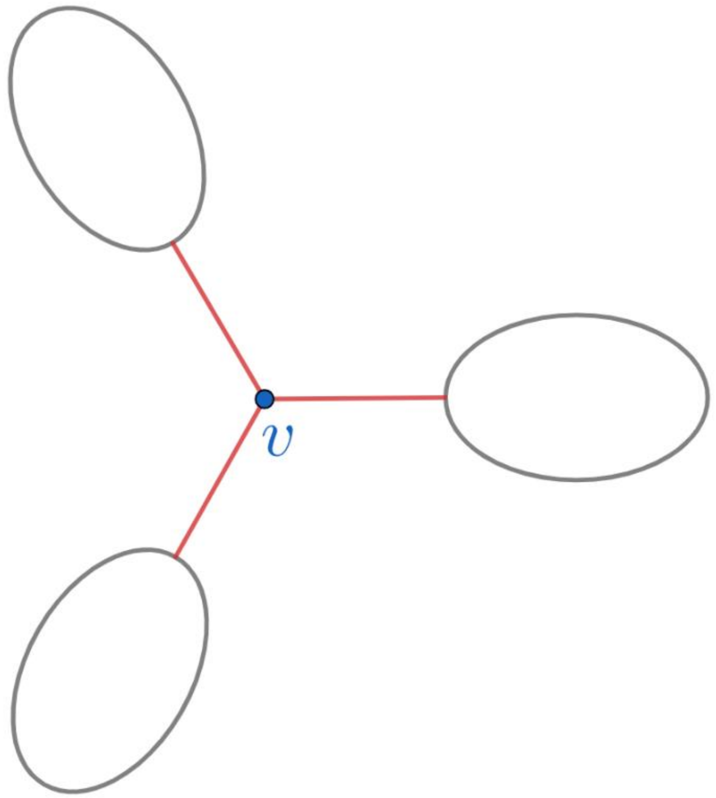


Paralelná rezistencia – príklad



Výsledky – paralelná a sériová rezistencia

- Každý kubický graf má konečnú sériovú rezistenciu $\sigma(G)$
- Existuje však nekonečná trieda kubických grafov, ktoré majú nekonečnú paralelnú rezistenciu $\pi(G) = \infty$



Výsledky – veta o 1-faktore

- Párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy grafu G nazývame 1-faktor

- Veta o 1-faktore
  „Každý kubický graf s 1-faktorom má konečnú paralelnú rezistenciu“

- Dôsledok
  „Každý bezmostový kubický graf má konečnú paralelnú rezistenciu“

Výsledky – grafy s rozdielnou paralelnou a sériovou rezistenciou

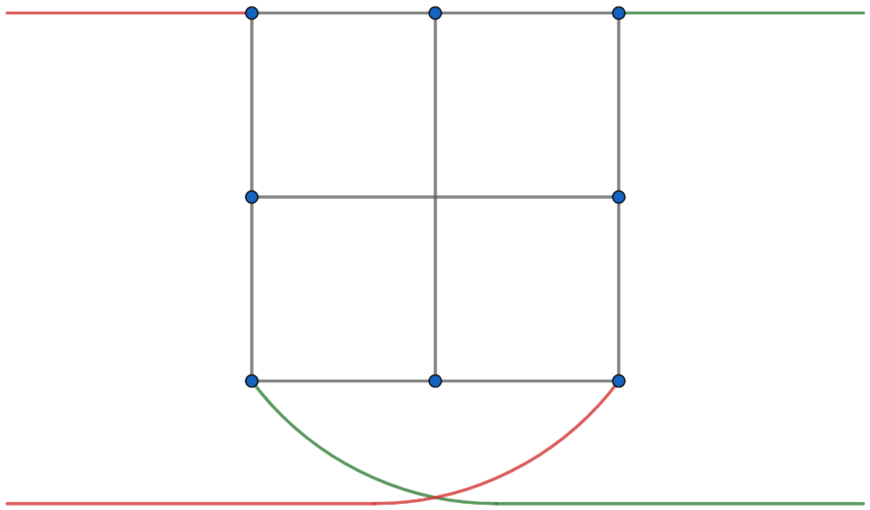
- Zrejme pre každý kubický graf platí: $\pi(G) \geq \sigma(G)$
- Je ľahké nájsť nekonečnú triedu grafov takú, že platí $\pi(G) = \sigma(G)$

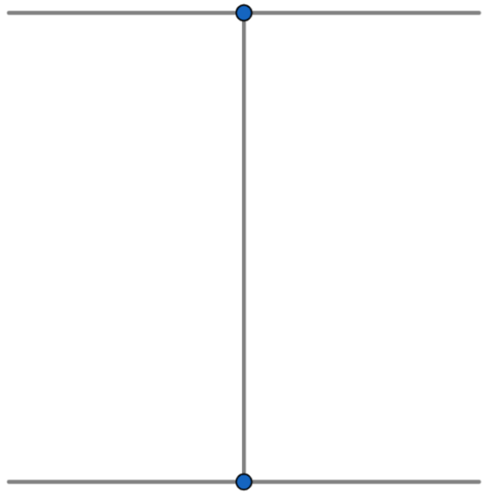
- Existuje nekonečná trieda bezmostových kubických grafov, ktoré majú *rôznu* paralelnú a sériovú rezistenciu

- Dokonca pre každé $n \in N$ existuje v tejto triede graf G, pre ktorý platí:

$$\pi(G) - \sigma(G) \geq n$$

Konštrukcia triedy grafov s rozdielnou paralelnou a sériovou rezistenciou

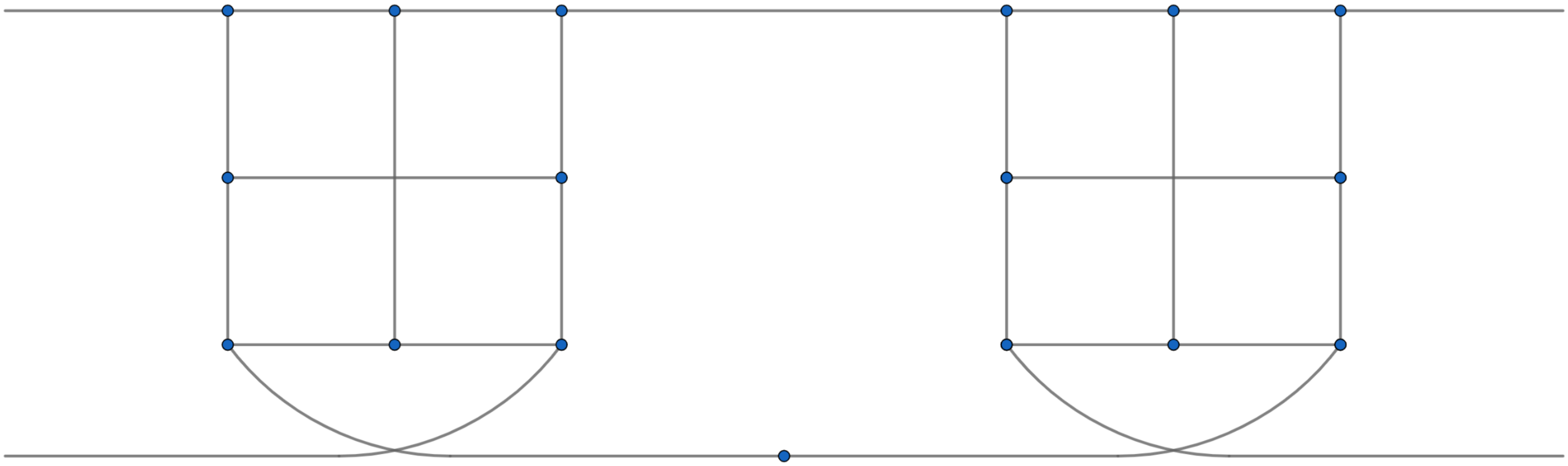




- Využitím Petersenových (2, 2)-pólov a (2, 2)-pólov I skonštruujeme najmenší graf z danej triedy
- Dá sa pre Petersenov (2, 2)-pól dokázať, že obe „vstupné“ hrany musia byť zafarbené rovnakou farbou
- To isté platí aj pre „výstupné hrany“ Petersenovho (2, 2)-pólu

Konštrukcia – (2, 2)-pól oblúk O

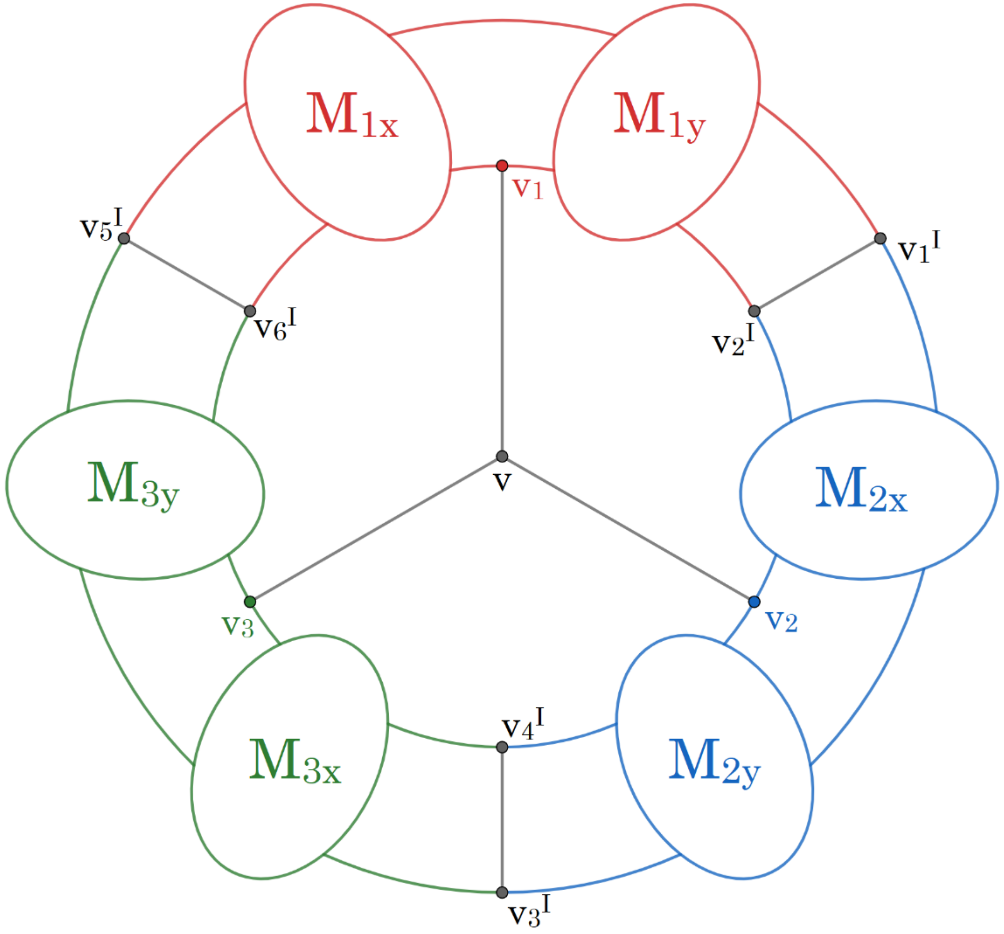
- (2, 2)-pól *oblúk* O vznikne spojením dvoch Petersenových (2, 2)-pólov
- Z poznatkov o 3-zafarbiteľnosti Petersenovho (2, 2)-pólu vyplýva, že (2, 2)-pól oblúk O je hranovo 3-nezafarbiteľný



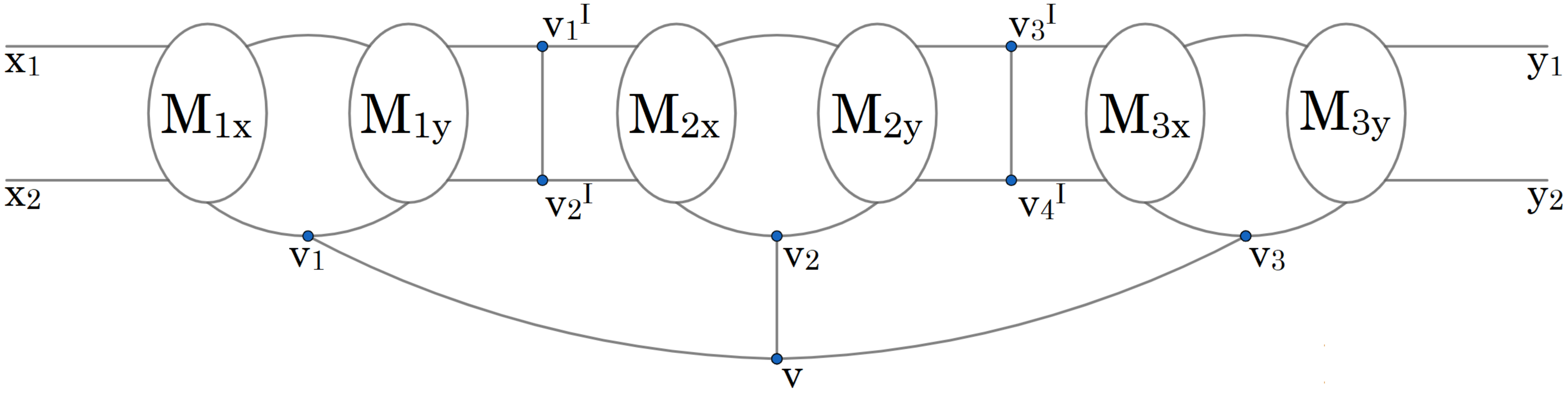
Graf s rozdielnou paralelnou a sériovou rezistenciou

- Graf *kormidlo* G vznikne striedavým spojením troch (2, 2)-pólov oblúk O a (2, 2)-pólov I

- Dá sa ukázať, že pre rezistencie grafu kormidlo platí:
  $\sigma(G) \leq 2$
  $\pi(G) \leq 3$
  $\pi(G) > 2$
- Preto platí $\sigma(G) = 2$ a $\pi(G) = 3$



Zovšeobecnenie grafu kormidlo



- Analogickým spôsobom vieme ukázať, že vzťahy
  $\sigma(G) \leq 2$
  $\pi(G) \leq 3$
  $\pi(G) > 2$
  platia aj pre (2, 2)-pól *polkormidlo*

Graf zovšeobecnené kormidlo

- Graf *zovšeobecnené kormidlo* G_n vznikne postupným striedavým spojením n (2, 2)-pólov polkormidlo a (2, 2)-pólov I

- Na základe vlastností (2, 2)-pólu polkormidlo sa dá ukázať, že pre paralelnú a sériovú rezistenciu grafu zovšeobecnené kormidlo G_n platí:
  $\sigma(G) \leq 2n$
  $\pi(G) \geq 3n$
- Tým sme skonštruovali nekonečnú triedu bezmostových grafov takú, že pre ľubovoľné $n \in N$ existuje v tejto triede graf, pre ktorý platí:

$$\pi(G) - \sigma(G) \geq n$$

Zhrnutie

- Určili sme hodnoty Kászonyiho funkcie $\psi(e)$ pre všetky hrany:
    - Isaacsových snarkov
    - Zovšeobecnených Blanušových snarkov

- Skonštruovali sme nekonečnú triedu kubických grafov s nekonečnou paralelnou rezistenciou $\pi(G)$
- Dokázali sme, že každý kubický graf s 1-faktorom má konečnú paralelnú rezistenciu $\pi(G)$
- Skonštruovali sme nekonečnú triedu bezmostových kubických grafov s rôznou paralelnou a sériovou rezistenciou

Ďakujem za pozornosť