Užitočnosť informácie pre neunárne jazyky.

Andrej Ravinger
školiteľ: prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.

Bakalárska práca

Užitočnosť prídavnej informácie

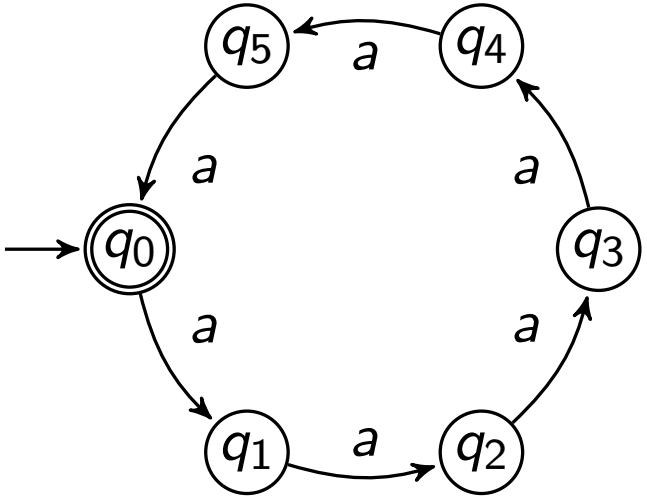
- Máme nejaký problém, ktorý máme vyriešiť.
- Dostaneme nejakú informáciu navyše.
- Informácia je užitočná, ak nám zjednoduší vyriešenie problému.
  - Aj pridaná informácia musí byť jednoduchšia ako vyriešenie pôvodného problému.

Užitočnosť prídavnej informácie vo formálnych jazykoch

- Formalizácia problému: regulárny jazyk L.
- Vyriešiť problém = skonštruovať automat A, ktorý akceptuje daný jazyk L.
- Zložitosť problému - počet stavov minimálneho automatu.
- Prídavná informácia - vstup patrí do iného jazyka L_{adv}.
  - L_{adv} máme zadaný automatom A_{adv}, ktorý má mať menej stavov ako A.
- Zjednodušenie - vieme vytvoriť nový automat A_{new}, ktorý má menej stavov ako A, pričom $L = L_{adv} \cap L_{new}$?
  - Toto nazývame rozklad jazyka (anglicky decomposition).

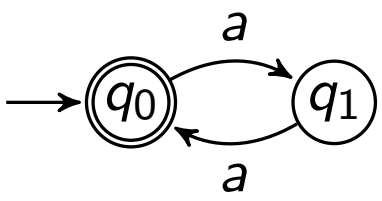
Príklad

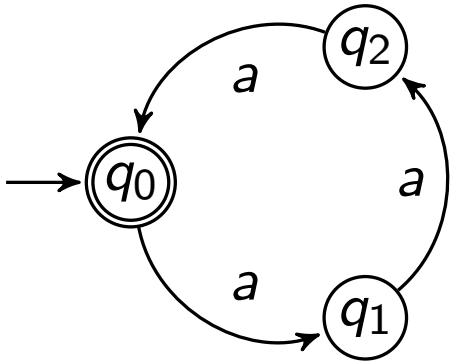
Nech $L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Minimimálny automat pre L je:



Príklad

- Ak dostaneme informáciu, že dĺžka slova na vstupe je párnej dĺžky, stačí overiť či je deliteľná tromi.
- Automat na radu - zistenie parity aj nový automat - zistenie deliteľnosti tromi sú jednoduchšie ako pôvodný 6-stavový.



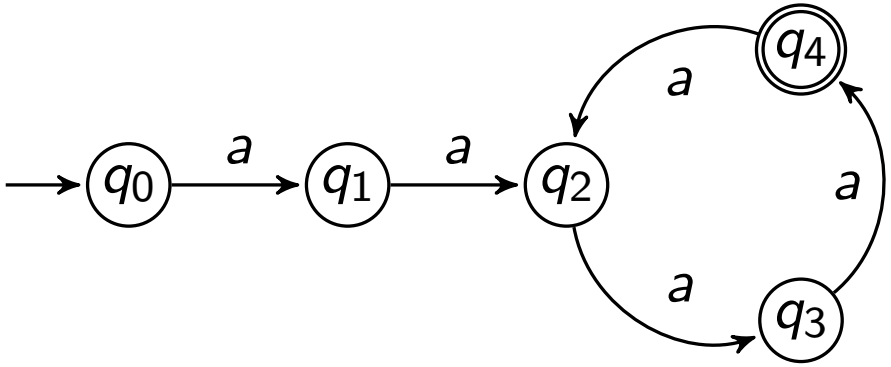


Doterajší výskum

- Nadväzujeme na rozklad deterministických konečných automatov
- Skúmalo hlavne pre unárne jazyky, t. j. jazyky nad jednopísmekovou abecedou.

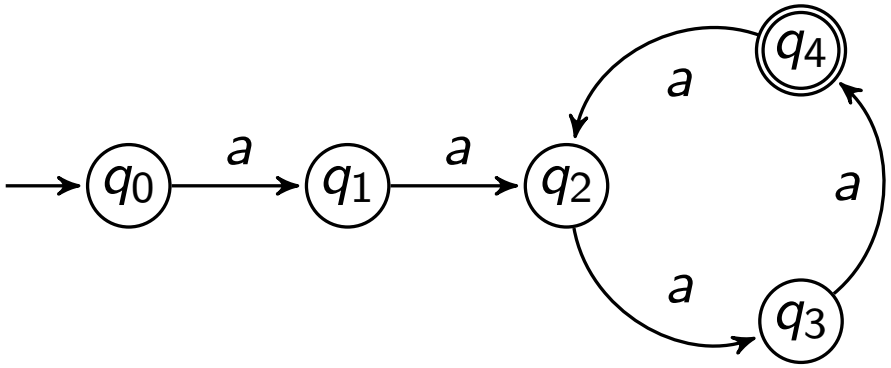
Rozložiteľnosť DKA pre unárne jazyky

- Každý minimálny DKA pre unárny jazyk je „cyklus“ alebo „cyklus s chvostom“
- Príklad jazyka kde minimálny DKA je cyklus s chvostom: $L = \{a^{3k+4} \mid k \in \mathbb{N}\}$



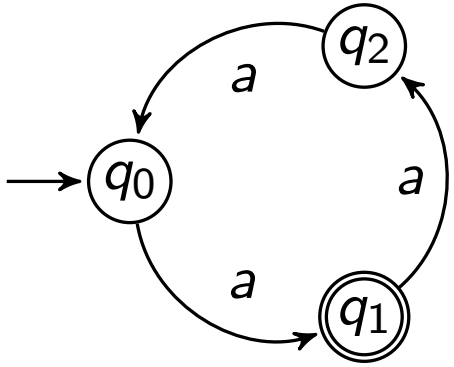
Rozložiteľnosť DKA pre unárne jazyky

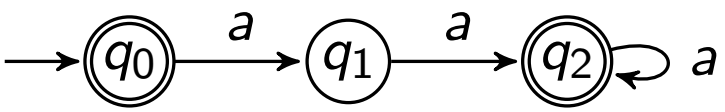
- Unárne regulárne jazyky boli rozdelené do dvoch podtried podľa typu ich minimálneho DKA.
- Pre obe triedy bola dokázaná charakterizácia na rozložiteľnosť.
- Príklad rozkladu automatu s chvostom: $L = \{a^{3k+4} \mid k \in \mathbb{N}\}$



Rozložiteľnosť DKA pre unárne jazyky

- Unárne regulárne jazyky boli rozdelené do dvoch podtried podľa typu ich minimálneho DKA.
- Pre obe triedy bola dokázaná charakterizácia na rozložiteľnosť.
- Príklad rozkladu automatu s chvostom: $L = \{a^{3k+4} \mid k \in \mathbb{N}\}$





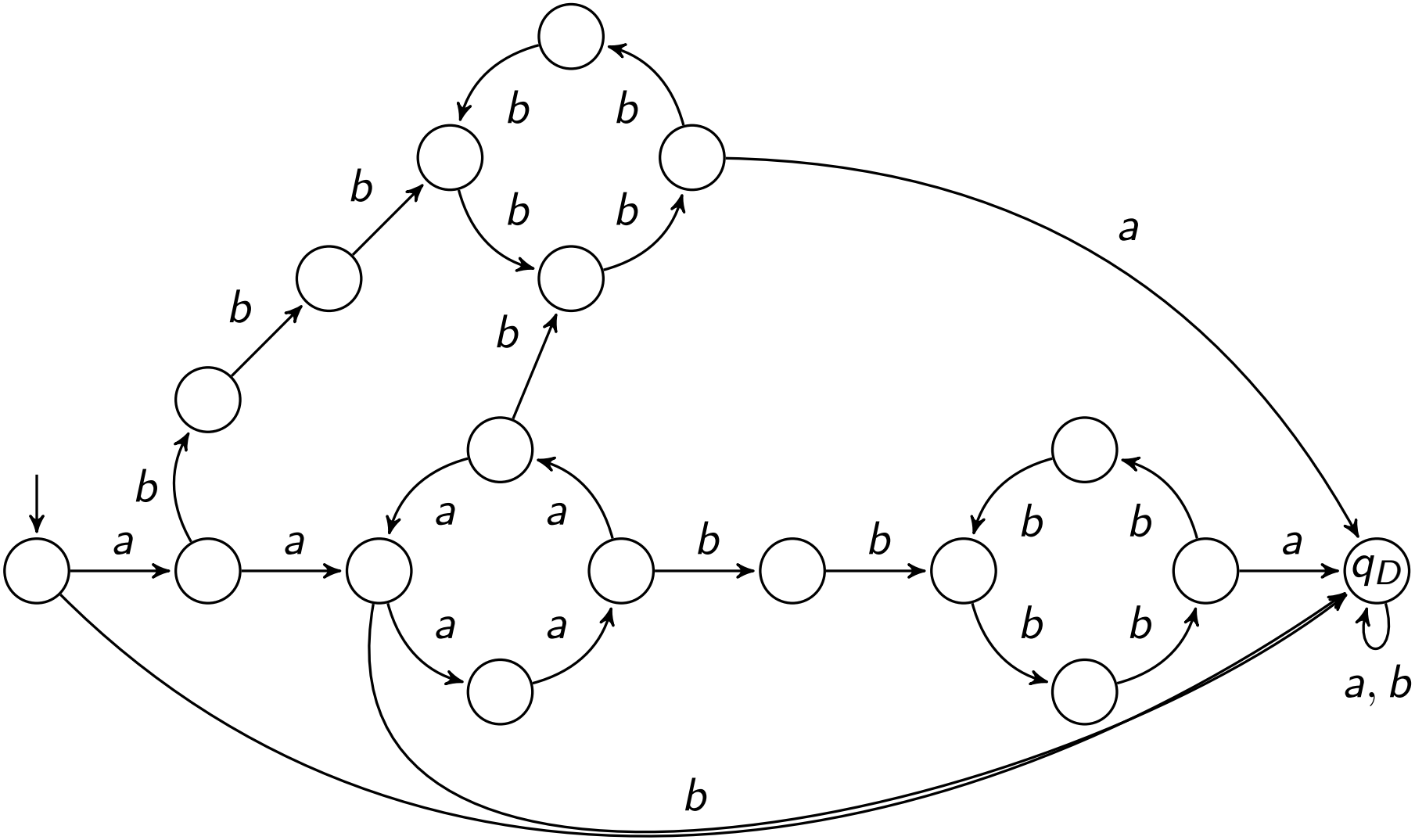
$L_1 = \{a^{3k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} = L \cup \{a\}$ $\qquad$ $L_2 = \{a^k \mid k \neq 1\}$

$L = L_1 \cap L_2$

Táto práca - jazyky ohraničené a^*b^*

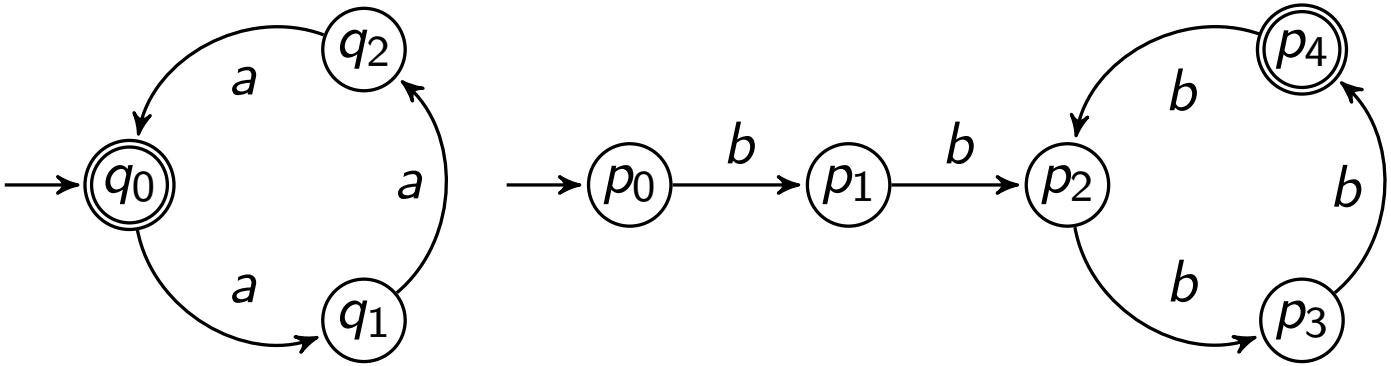
- **Definícia**: Ak existujú slová $w_1, w_2, ..., w_n$, také, že $L \subseteq w_1^* w_2^* ... w_n^*$, tak L sa nazýva *ohraničený* jazyk (anglicky bounded) pod $w_1^* w_2^* ... w_n^*$.
- **Označenie**: *ab* jazyk - regulárny jazyk ohraničený a^*b^*
- Dva typy rozkladov - do *ab* jazykov a do akýchkoľvek regulárnych jazykov

Deterministické automaty *ab* jazykov

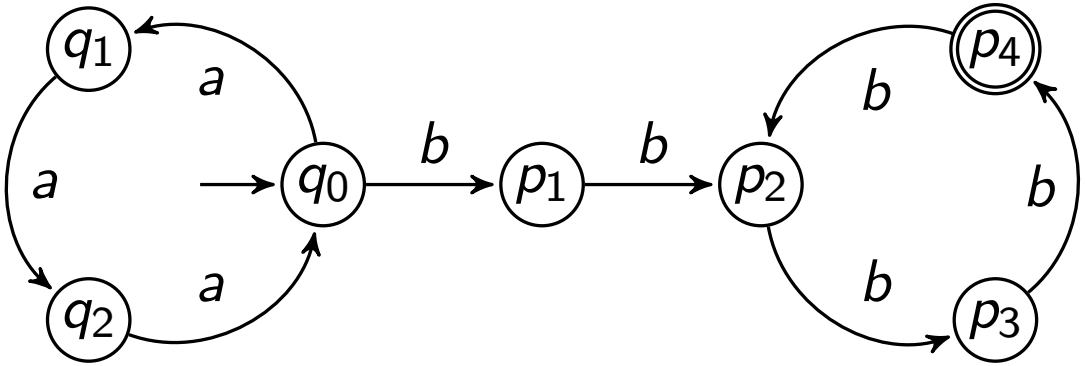


Jednoduché dvojcyklické jazyky

- „Zreťazenie“ automatov, zreťazenie jazykov



$L^a = \{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $L^b = \{b^{3k+4} \mid k \in \mathbb{N}\}$



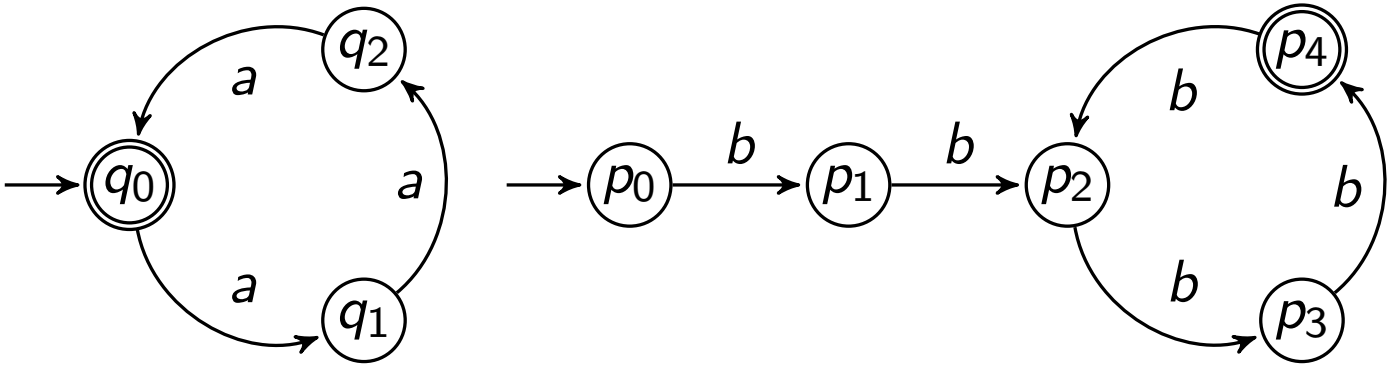
$L = \{a^{3k} b^{3l+4} \mid k, l \in \mathbb{N}\} = L^a L^b$

Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

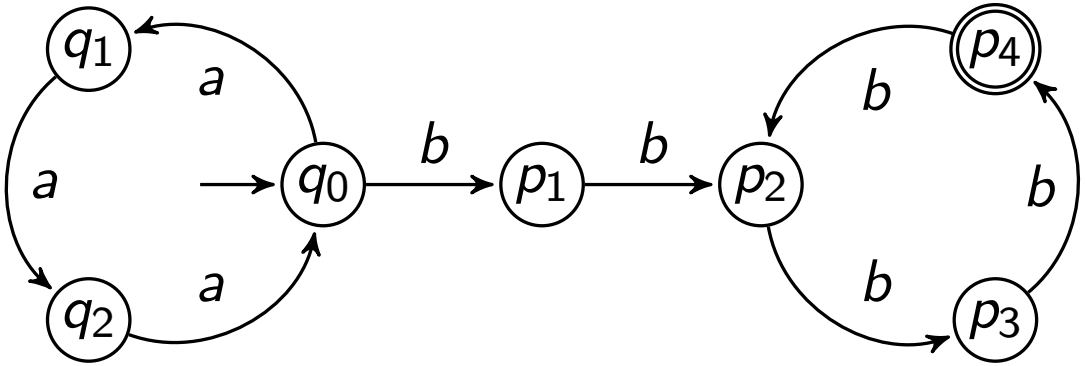
- 3 konštrukcie
- postačujúce aj nutné podmienky - charakterizácia jednoduchých dvojcyklických jazykov vzhľadom na rozložiteľnosť do *ab* jazykov

Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

- L^b je rozložiteľný $\rightarrow$ L je rozložiteľný



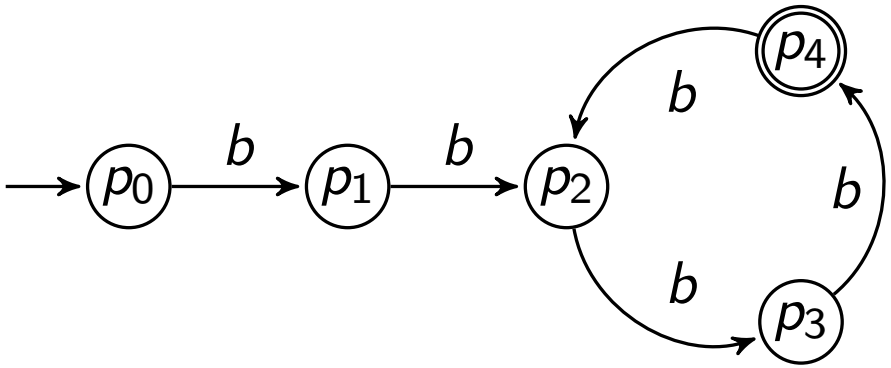
$L^a = \{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $L^b = \{b^{3k+4} \mid k \in \mathbb{N}\}$

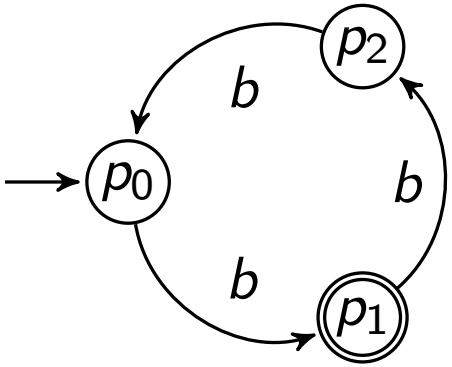


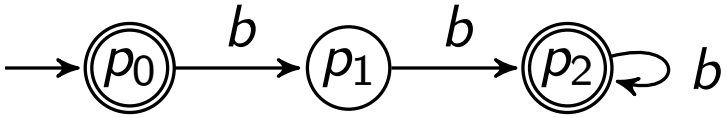
$L = \{a^{3k} b^{3l+4} \mid k, l \in \mathbb{N}\} = L^a L^b$

Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

- L^b je rozložiteľný $\rightarrow$ L je rozložiteľný







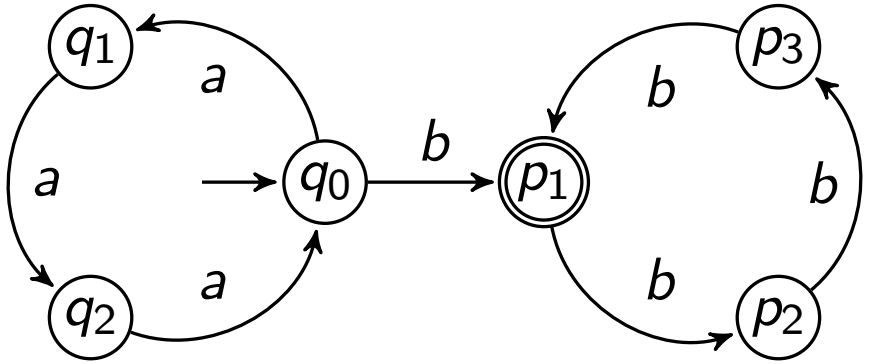
$L_1^b = \{b^{3k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} = L \cup \{b\}$ $\qquad$ $L_2^b = \{b^k \mid k \neq 1\}$

$L^b = L_1^b \cap L_2^b$

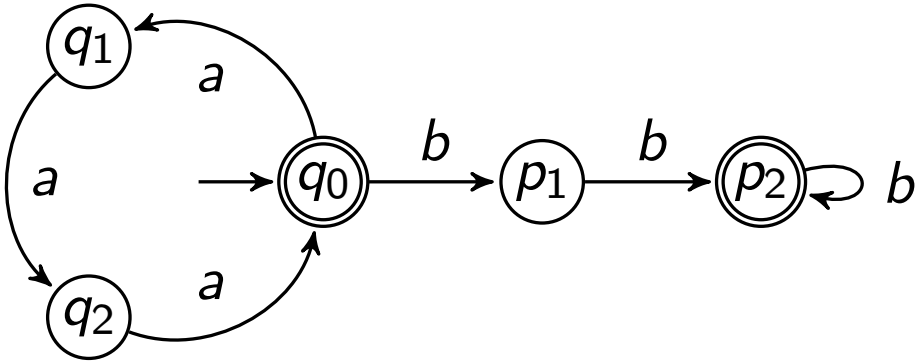
Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

- L^b je rozložiteľný $\rightarrow$ L je rozložiteľný

$L = \{a^{3k} b^{3l+4} \mid k, l \in \mathbb{N}\} = L_1 \cap L_2$



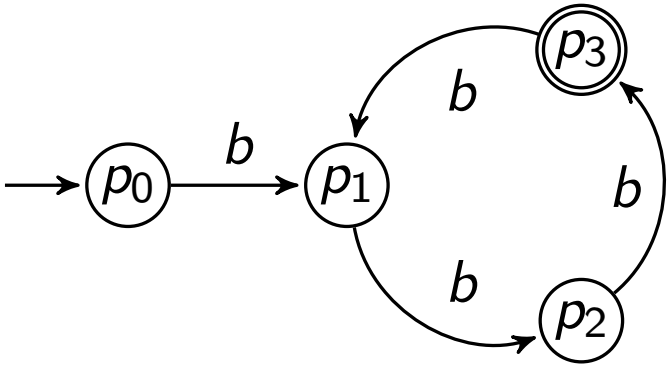
$L_1 = \{a^{3k} b^{3l+1} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$



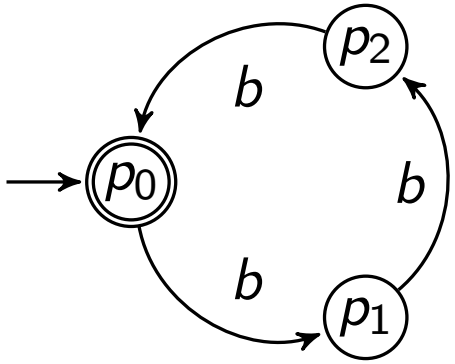
$L_2 = \{a^{3k} b^{l} \mid k, l \in \mathbb{N}, l \neq 1\}$

Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

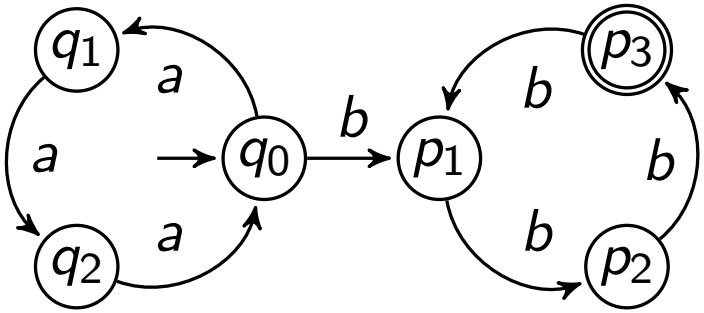
- L^b je rozložiteľný $\not\Rightarrow$ L je rozložiteľný



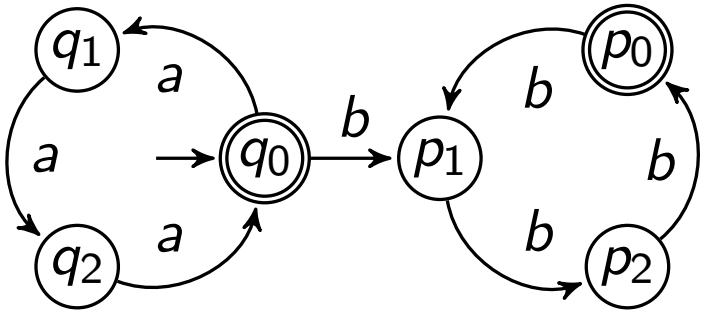
$L^b = \{b^{3k+3} \mid k \in \mathbb{N}\}$



$L_1^b = \{b^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$



$L = \{a^{3k} b^{3l+3} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$



$L_1 = \{a^{3k} b^{3l} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$

Rozložiteľnosť jednoduchých dvojcyklických jazykov

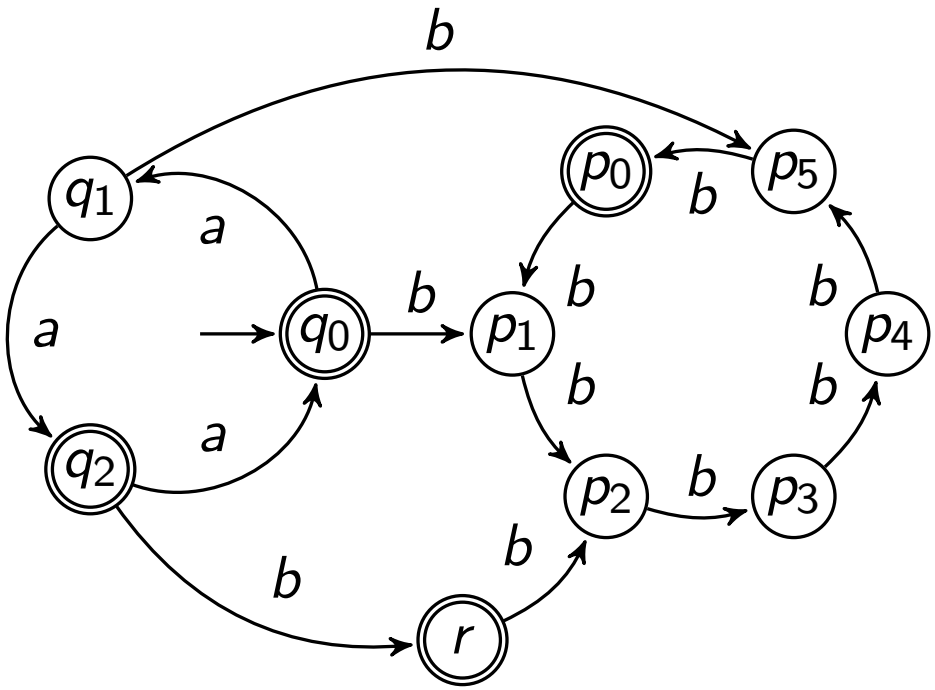
Veta

Nech L je jednoduchý dvojcyklický jazyk a nech (λ_1, μ_1) a (λ_2, μ_2) sú veľkosti minimálnych DKA L^a a L^b. Potom L is rozložiteľný do ab jazykov práve vtedy keď platí aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

1. L^a je nekonečný, $\lambda_1 + \mu_1 > 1$ a $(\lambda_2 + \mu_2 > 2$ alebo $\lambda_2 > 1)$
2. L^a je konečný, $\lambda_2 + \mu_2 > 1$, $\mu_1 > 1$ a $(\mu_1 > 2$ alebo $\mu_2 > 0)$
3. $L^a \in \mathcal{D}_{det}$
4. $L^b \in \mathcal{D}_{det}$ a jeho minimálny DKA má veľkosť (λ_2, μ_2) takú, že $\mu_2 \neq 1$ alebo L^b je rozložiteľný do automatov s cyklami menšími ako λ_2 alebo L^a je konečný.

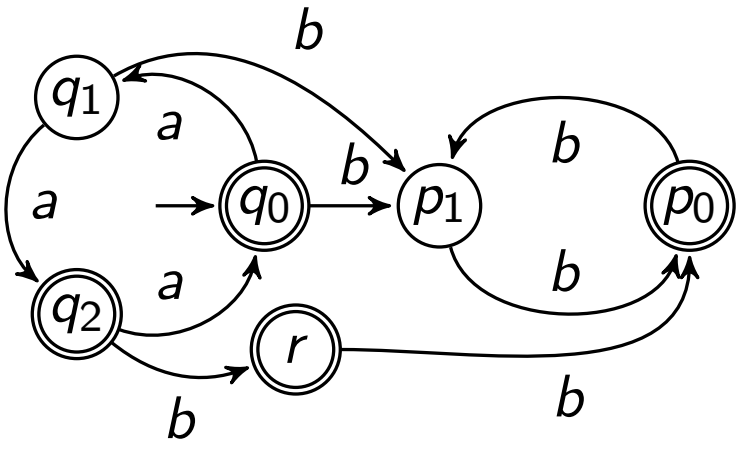
Ďalšie *ab* jazyky

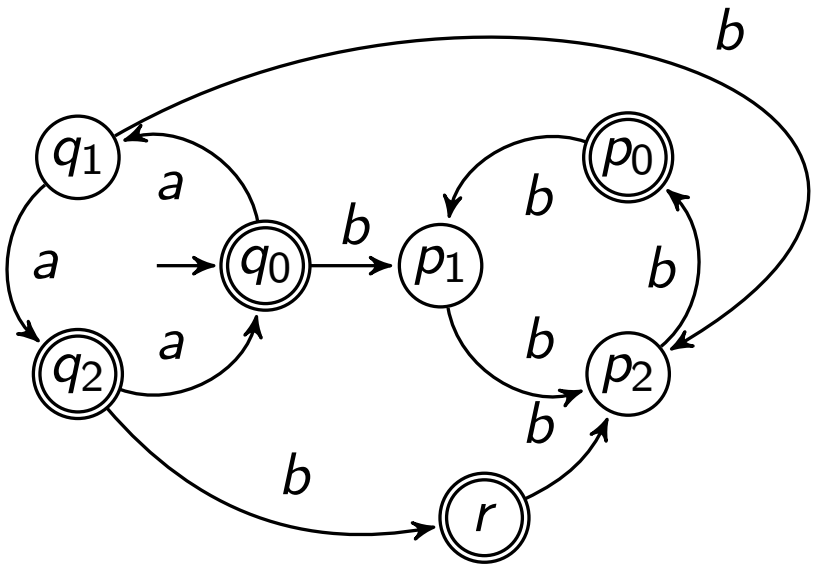
- Akýkoľvek *ab* jazyk je zjednotenie niekoľkých jednoduchých dvojcyklických jazykov
- $L = \{a^{3k}b^{6l} \mid k, l \in \mathbb{N}\} \cup \{a^{3k+1}b^{6l+2} \mid k, l \in \mathbb{N}\} \cup$
  $\{a^{3k+2} \mid k \in \mathbb{N}\}(\{b^{6l} \mid l \in \mathbb{N}\} \cup \{b\})$



- Jednoduchý dvojcyklický jazyk je rozložiteľný $\overset{?}{\Rightarrow}$ *ab* jazyk ním tvorený je rozložiteľný?

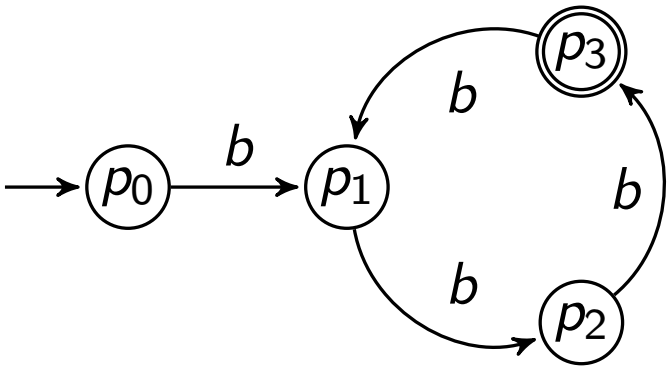
Rozložiteľnosť *ab* jazykov



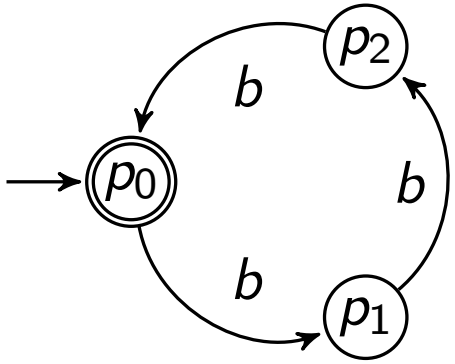


Všeobecná rozložiteľnosť

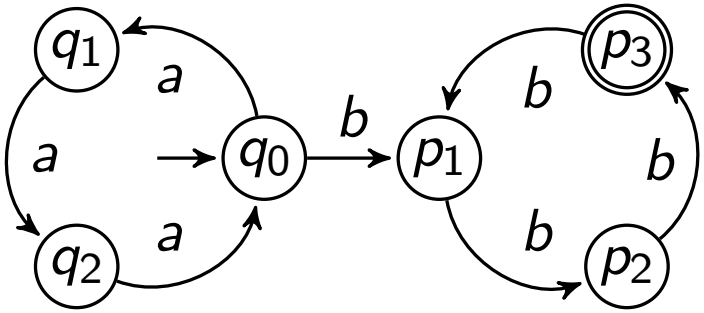
- Môže pomôcť pri niektorých jazykoch, ktoré sa nedajú rozložiť do dvoch *ab* jazykov



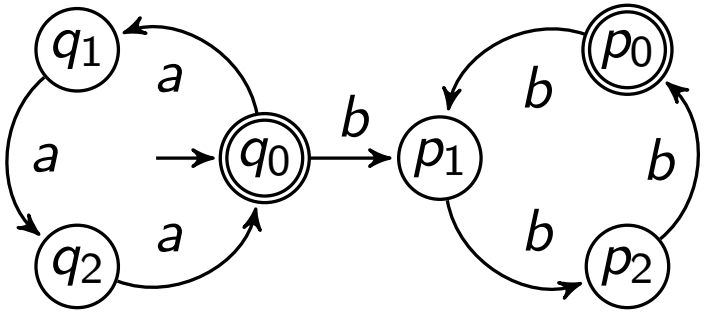
$L^b = \{b^{3k+3} \mid k \in \mathbb{N}\}$



$L_1^b = \{b^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

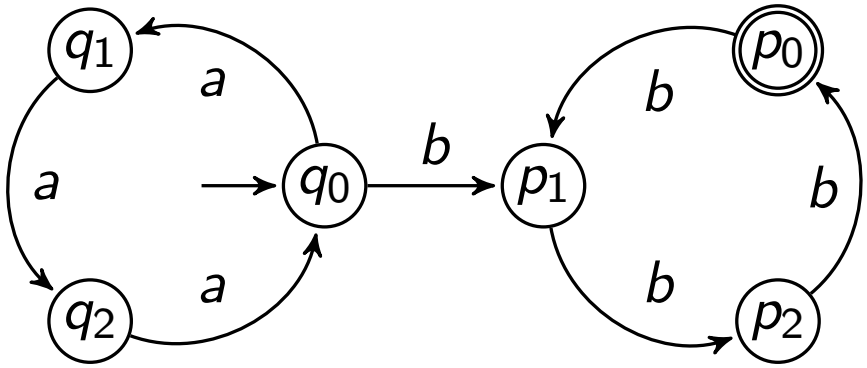


$L = \{a^{3k} b^{3l+3} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$

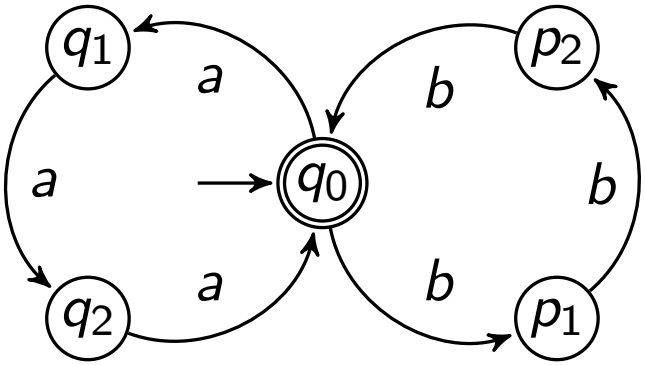


$L_1 = \{a^{3k} b^{3l} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$

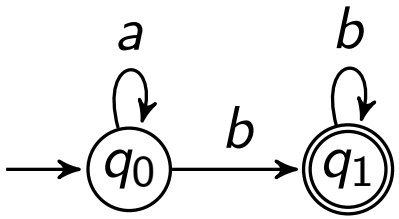
Všeobecná rozložiteľnosť



$L = \{a^{3k} b^{3l+3} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$



$L_1 = \{a^{3k} b^{3l} \mid k, l \in \mathbb{N}\}^*$



$L_2 = a^* b^+$

$L_1 \cap L_2 = L$

Záver - zhrnutie

- Rozložiteľnosť *ab* jazykov do iných *ab* jayzkov:
  - Jednoduché dvojcyklické jazyky - charakterizované
  - Ostatné *ab* jazyky - Niektoré typy rozkladov nájdené, ostáva preskúmať ďalšie typy rozkladov
- Rozložiteľnosť *ab* jazykov do akýchkoľvek regulárnych jazykov:
  - Niektoré typy rozkladov nájdené, ostáva preskúmať ďalšie

Otázky

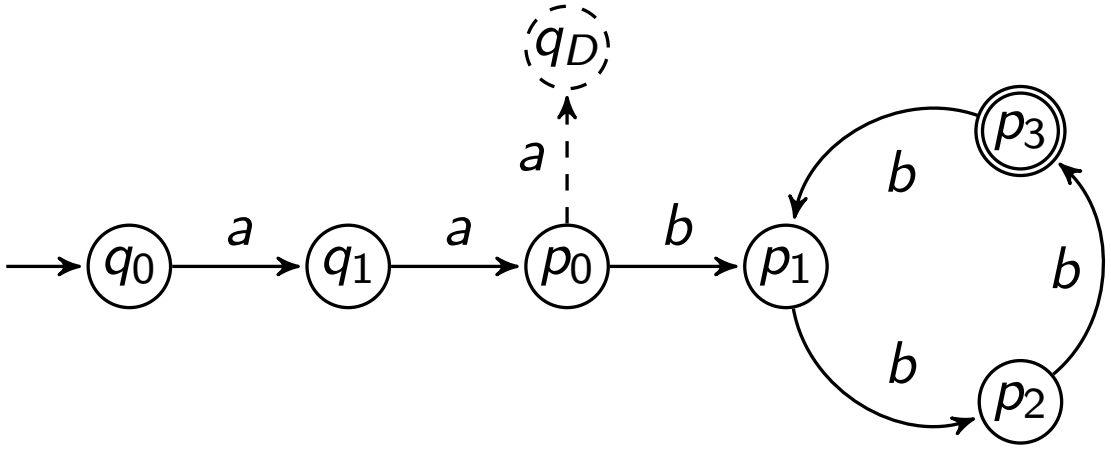
- Pri definícii a-časti DKA akceptujúceho ab jazyk sa nám ako prirodzená javí definícia, v ktorej položíme $K_a = \{q \in K \mid (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon) \Rightarrow w \in a^*\}$. Vy ste zvolili inú definíciu. Sú tieto dve definície ekvivalentné? Ak áno, mali ste špeciálny dôvod pre vašu definíciu?
- Je možné nejakým priamočiarim spôsobom rozšíriť Vetu 3.3 na jazyky ohraničné $a^*b^*c^*$ prípadne jazyky ohraničné $a_1^* \ldots a_n^*$? Ak áno, ako? Ak nie, v čom sú základné problémy, ktoré teraz dokážete dovidieť?

Otázky

- Pri definícii a-časti DKA akceptujúceho ab jazyk sa nám ako prirodzená javí definícia, v ktorej položíme $K_a = \{q \in K \mid (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon) \Rightarrow w \in a^*\}$. Vy ste zvolili inú definíciu. Sú tieto dve definície ekvivalentné? Ak áno, mali ste špeciálny dôvod pre vašu definíciu?
- Moja definícia: $K^a = \{q \in K \mid \delta(q, a) \neq q_D\}$
- Definície nie sú ekvivalentné

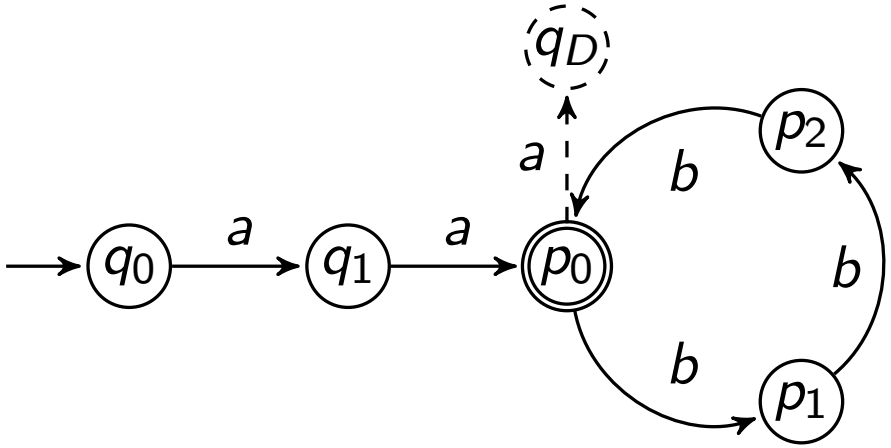
Otázky

$p_0 \in K_a, p_0 \notin K^a$



$$L_1 = \{a^2 b^{3k+3} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$p_0 \notin K_a, p_0 \notin K^a$



$$L_2 = \{a^2 b^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Otázky

- Je možné nejakým priamočiarim spôsobom rozšíriť Vetu 3.3 na jazyky ohraničné $a^*b^*c^*$ prípadne jazyky ohraničné $a_1^*...a_n^*$? Ak áno, ako? Ak nie, v čom sú základné problémy, ktoré teraz dokážete dovidieť?
- Výsledky by sa mali dať rozšíriť na jazyky ohraničné $a_1^*...a_n^*$.