Pravdepodobnostné viachlavové konečné automaty

jednosmerné

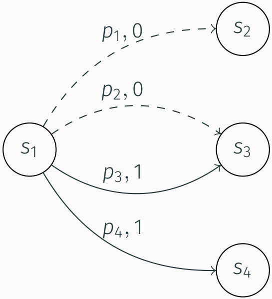
Peter Grochal

školiteľ: prof. RNDr. Rastislav Královič, PhD.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat (jednosmerný)



$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat (jednosmerný)

$$PFA\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc}, Q_{rej})$$

$$\delta : Q \times \Sigma \times Q \times \{0, 1\} \rightarrow T_P$$

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat (jednosmerný)

$$PFA\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc}, Q_{rej})$$

$$\delta : Q \times \Sigma \times Q \times \{0, 1\} \to T_P$$

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat jednosmerný (*PFA*)

- M. O. Rabin 1963
- $L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^* \; \wedge \; p(x) > \lambda\}$
- “Ohraničené” *PFA*: $p(x) \notin (\lambda - \Delta, \; \lambda + \Delta)$
- “Ohraničené” *PFA* akceptujú iba regulárne jazyky ($\mathcal{R}$)

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat jednosmerný (*PFA*)

- M. O. Rabin 1963
- $L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^* \ \wedge \ p(x) > \lambda\}$
- "Ohraničené" *PFA*: $p(x) \notin (\lambda - \Delta, \ \lambda + \Delta)$
- "Ohraničené" *PFA* akceptujú iba regulárne jazyky ($\mathcal{R}$)

Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat jednosmerný (*PFA*)

- M. O. Rabin 1963
- $L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^* \;\wedge\; p(x) > \lambda\}$
- "Ohraničené" *PFA*: $p(x) \notin (\lambda - \Delta,\; \lambda + \Delta)$
- "Ohraničené" *PFA* akceptujú iba regulárne jazyky ($\mathcal{R}$)

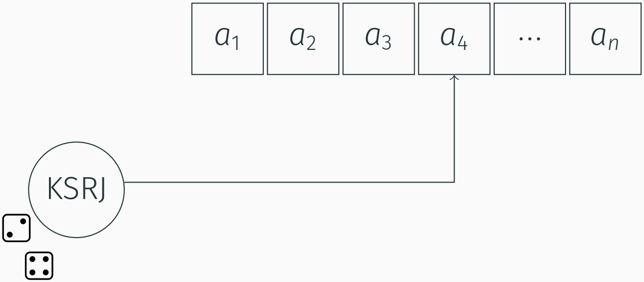
Stručný úvod

Pravdepodobnostný konečný automat jednosmerný (*PFA*)

- M. O. Rabin 1963
- $L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^* \ \wedge \ p(x) > \lambda\}$
- "Ohraničené" *PFA*: $p(x) \notin (\lambda - \Delta, \ \lambda + \Delta)$
- "Ohraničené" *PFA* akceptujú iba regulárne jazyky ($\mathcal{R}$)

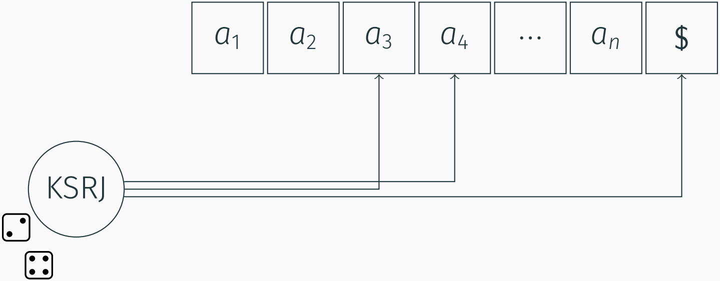
Model

Pravdepodobnostný konečný automat
(jednosmerný)



Model

Pravdepodobnostný viachlavový konečný automat (jednosmerný)



Náš prínos

Formálne definície

Formálne definované LasVegas a Monte-Carlo $PFA(k)$.

- LasVegas: odpovie správne alebo NEVIEM.
- Monte-Carlo: môže odpovedať aj nesprávne.

Formálne definície

Formálne definované LasVegas a Monte-Carlo $PFA(k)$.

- LasVegas: odpovie správne alebo NEVIEM.
- Monte-Carlo: môže odpovedať aj nesprávne.

Formálne definície

Definovali sme čo znamená akceptovať jazyk s chybou

$$L = L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ \lambda + \Delta \leq p(x)\}$$
$$L^c = L(A, \lambda)^c = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) \leq \lambda - \Delta\}$$

hraničná hodnota λ s obojstrannou chybou Δ.

$$p(x) \notin (\lambda - \Delta,\ \lambda + \Delta)$$

Formálne definície

Definovali sme čo znamená akceptovať jazyk s chybou

$$L = L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ \lambda + \Delta \leq p(x)\}$$
$$L^c = L(A, \lambda)^c = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) \leq \lambda - \Delta\}$$

hraničná hodnota λ s obojstrannou chybou Δ.

$$p(x) \notin (\lambda - \Delta,\ \lambda + \Delta)$$

Formálne definície

Definovali sme čo znamená akceptovať jazyk s chybou

$$L = L(A, \lambda) = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ \lambda + \Delta \leq p(x)\}$$
$$L^c = L(A, \lambda)^c = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) \leq \lambda - \Delta\}$$

hraničná hodnota λ s obojstrannou chybou Δ.

$$p(x) \notin (\lambda - \Delta,\ \lambda + \Delta)$$

Formálne definície

L akc. s *true-biased* chybou Λ

$$L = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ 1-\Lambda \leq p(x)\}$$
$$L^c = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ \quad 0 = p(x)\}$$

L akc. s *false-biased* chybou Λ

$$L = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) = 1\}$$
$$L^c = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) \leq \Lambda\}$$

Formálne definície

L akc. s *true-biased* chybou Λ

$$\begin{aligned} L &= \{x \mid x \in \Sigma^*,\ 1-\Lambda \le p(x)\} \\ L^c &= \{x \mid x \in \Sigma^*,\ \qquad 0 = p(x)\} \end{aligned}$$

L akc. s *false-biased* chybou Λ

$$\begin{aligned} L &= \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) = 1\} \\ L^c &= \{x \mid x \in \Sigma^*,\ p(x) \le \Lambda\} \end{aligned}$$

Formálne definície

Lema
Nech je L akceptovaný pomocou PFA(k) s true-biased chybou Λ, potom ex. PFA(k) akceptujúci L^c s false-biased chybou Λ.

Dôkaz.
Zameníme akceptačné a zamietajúce stavy. □

Formálne definície

Lema
Nech je L akceptovaný pomocou PFA(k) s true-biased chybou Λ, potom ex. PFA(k) akceptujúci L^c s false-biased chybou Λ.

Dôkaz.
Zameníme akceptačné a zamietajúce stavy. □

Bez-epsilonový tvar

Bez-ε normálny tvar

Definícia

$PFA(k)$ $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc}, Q_{rej})$ je v *bez-ε tvare* ak

$$(\forall q, p \in Q)(\forall a_1, \ldots, a_k \in \Sigma_{\$}) : \ \delta(q, a_1, \ldots, a_k, p, \ 0, \ldots, 0 \ ) = 0$$

Bez-ε normálny tvar

Definícia

PFA(k) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc}, Q_{rej})$ je v *bez-ε tvare* ak

$$(\forall q, p \in Q)(\forall a_1, \ldots, a_k \in \Sigma_\$) : \ \delta(q, a_1, \ldots, a_k, p, \boxed{0, \ldots, 0}) = \boxed{0}$$

Veta

Nech A_0 je $PFA(k)$ s povolenými pravdepodobnosťami T_P, potom existuje k nemu ekvivalentný $PFA(k)$ A_1 s povolenými pravdepodobnosťami T_P v bez-ε tvare, ak ex. pole $(F, +, \cdot)$, t.ž. $T_P = F \cap [0, 1]$.

Bez-ε normálny tvar

Veta

Nech A_0 je $PFA(k)$ s povolenými pravdepodobnosťami T_P, potom existuje k nemu ekvivalentný $PFA(k)$ A_1 s povolenými pravdepodobnosťami T_P v bez-ε tvare, ak ex. $\boxed{\textit{pole } (F, +, \cdot)}$*, t.ž.* $T_P = F \cap [0, 1]$.

k+1 hláv je viac než k

$k+1$ hláv je lepšie než k

Uvažujme jazyk

$L_b = \{w_1 * w_2 * \cdots * w_{2b} \mid (w_i \in \{0,1\}^*) \wedge (w_i = w_{2b+1-i}) \text{ for } 1 \leq i \leq 2b\}$

$$w_1 * w_2 * \cdots * w_n * w_n * \cdots * w_2 * w_1$$

$k+1$ hláv je lepšie než k

Uvažujme jazyk

$L_b = \{w_1 * w_2 * \cdots * w_{2b} \mid (w_i \in \{0,1\}^*) \wedge (w_i = w_{2b+1-i}) \text{ for } 1 \leq i \leq 2b\}$

$$\boxed{w_1 * w_2 * \cdots * w_n * w_n * \cdots * w_2 * w_1}$$

$k+1$ hláv je lepšie než k

Veta (Yao and Rivest)

Pre každé celé $k \geq 2$:

- *Jazyk L_b je rozpoznateľný $NFA(k)$ práve vtedy keď $b \leq \binom{k}{2}$.*
- *Jazyk L_b je rozpoznateľný $DFA(k)$ práve vtedy keď $b \leq \binom{k}{2}$.*

$k+1$ hláv je lepšie než k

Veta

Pre každé celé $k \geq 2$:

- *L_b je rozpoznateľný $PFA(k)$ s true-biased chybou $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.*
- *$(L_b)^c$ je rozpoznateľný $PFA(k)$ s false-biased chybou $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.*
- *L_b je rozpoznateľný LasVegas $PFA(k) \Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.*

Veta

Pre každé celé $k \geq 2$:

- L_b *je rozpoznateľný* $PFA(k)$ *s true-biased chybou* $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.
- L_b *je rozpoznateľný* $PFA(2)$ *s false-biased chybou* $\Lambda = 1 - \frac{1}{b}$
- $(L_b)^c$ *je rozpoznateľný* $PFA(k)$ *s false-biased chybou* $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.
- $(L_b)^c$ *je rozpoznateľný* $PFA(2)$ *s true-biased chybou* $\Lambda = 1 - \frac{1}{b}$

$k+1$ hláv je lepšie než k

Veta

Pre každé celé $k \geq 2$:

- L_b *je rozpoznateľný* $PFA(k)$ *s true-biased chybou* $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.
- L_b *je rozpoznateľný* $PFA(2)$ *s false-biased chybou* $\Lambda = 1 - \frac{1}{b}$
- $(L_b)^c$ *je rozpoznateľný* $PFA(k)$ *s false-biased chybou* $\Leftrightarrow b \leq \binom{k}{2}$.
- $(L_b)^c$ *je rozpoznateľný* $PFA(2)$ *s true-biased chybou* $\Lambda = 1 - \frac{1}{b}$

Barely-random

Barely-random nie je možné amplifikovať

Veta

Barely-random $PFA(2)$ s jednostrannou false-biased chybou, dokážu akceptovať L_b s chybou Λ, práve vtedy keď $\Lambda \geq 1-\frac{1}{b}$.

Veta

Barely-random $PFA(2)$ s jednostrannou true-biased chybou, dokážu akceptovať $(L_b)^c$ s chybou Λ, práve vtedy keď $\Lambda \geq 1-\frac{1}{b}$.

Barely-random nie je možné amplifikovať

Veta

Barely-random $PFA(2)$ *s jednostrannou false-biased chybou, dokážu akceptovať* L_b *s chybou* Λ*, práve vtedy keď* $\Lambda \geq 1 - \frac{1}{b}$.

Veta

Barely-random $PFA(2)$ *s jednostrannou true-biased chybou, dokážu akceptovať* $(L_b)^c$ *s chybou* Λ*, práve vtedy keď* $\Lambda \geq 1 - \frac{1}{b}$.

Štandardné otázky

Uzáverové vlastnosti

	$\cap R$	^{c}	$\cap$	$\cup$
LasVegas PFA	✓Λ	✓Λ	–	–
PFA s true-biased chybou	✓Λ	–	–	✓
PFA s false-biased chybou	✓Λ	–	✓	–

✓: je uzavretá   Λ: zachováva chybu

–: nie je uzavretá

Vzťahy medzi triedami

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & PFA(k) & & PFA(k) & \\
 & & & \text{bounded} & \subseteq & \text{unbounded} & = NFA(k) \\
 & & \subsetneq & \text{true-biased} & & \text{true-biased} & \\
DFA(k) & \subseteq & \begin{array}{c}\text{LasVegas} \\ PFA(\text{k})\end{array} & \not\subseteq \quad \not\supseteq & \begin{array}{cc}\not\subseteq & \not\supseteq \\ \not\subseteq & \not\supseteq\end{array} & \not\subseteq \quad \not\supseteq & \\
 & & \subsetneq & PFA(k) & & PFA(k) & \\
 & & & \text{bounded} & \subseteq & \text{unbounded} & \\
 & & & \text{false-biased} & & \text{false-biased} &
\end{array}
$$

Vzťahy medzi triedami

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & PFA(k) & & PFA(k) & & \\
 & & & & \text{bounded} & \boxed{\subseteq} & \text{unbounded} & \boxed{=} & NFA(k) \\
 & & & \boxed{\subsetneq} & \text{true-biased} & & \text{true-biased} & & \\
DFA(k) & \boxed{\subseteq} & \text{LasVegas} & & \not\subseteq \;\; \not\supseteq & \not\subseteq \;\; \not\supseteq & \not\subseteq \;\; \not\supseteq & & \\
 & & PFA(\text{k}) & & & \not\subseteq \;\; \not\supseteq & & & \\
 & & & \subsetneq & PFA(k) & & PFA(k) & & \\
 & & & & \text{bounded} & \subseteq & \text{unbounded} & & \\
 & & & & \text{false-biased} & & \text{false-biased} & &
\end{array}
$$

Vzťahy medzi triedami

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \begin{array}{c}PFA(k)\\ \text{bounded}\\ \text{true-biased}\end{array} & \subseteq & \begin{array}{c}PFA(k)\\ \text{unbounded}\\ \text{true-biased}\end{array} & = NFA(k)\\
 & & \subsetneq & & & & \\
DFA(k) & \boxed{\subseteq} & \begin{array}{c}\text{LasVegas}\\ PFA(k)\end{array} & \not\subseteq \quad \not\supseteq & \begin{array}{cc}\not\subseteq & \not\supseteq\\ \not\subseteq & \not\supseteq\end{array} & \not\subseteq \quad \not\supseteq & \\
 & & \boxed{\subsetneq} & & & & \\
 & & & \begin{array}{c}PFA(k)\\ \text{bounded}\\ \text{false-biased}\end{array} & \boxed{\subseteq} & \begin{array}{c}PFA(k)\\ \text{unbounded}\\ \text{false-biased}\end{array} &
\end{array}
$$

Vzťahy medzi triedami

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \begin{array}{c} PFA(k) \\ \text{bounded} \\ \text{true-biased} \end{array} & \subseteq & \begin{array}{c} PFA(k) \\ \text{unbounded} \\ \text{true-biased} \end{array} = NFA(k) \\
 & & & \boxed{\subsetneq} & & & \\
DFA(k) & \subseteq & \begin{array}{c} \text{LasVegas} \\ PFA(\text{k}) \end{array} & & \not\subseteq \quad \not\supseteq & \not\subseteq \; \not\supseteq \; \not\subseteq \; \not\supseteq & \not\subseteq \quad \not\supseteq \\
 & & & \boxed{\subsetneq} & & & \\
 & & & & \begin{array}{c} PFA(k) \\ \text{bounded} \\ \text{false-biased} \end{array} & \subseteq & \begin{array}{c} PFA(k) \\ \text{unbounded} \\ \text{false-biased} \end{array}
\end{array}
$$

$$
DFA(2) \;\boxed{\subsetneq}\; \begin{array}{c} \text{LasVegas} \\ PFA(2) \end{array}
$$

Možné pokračovania

Možné pokračovania

- $DFA(k) \overset{?}{\subsetneq}$ LasVegas $PFA(k)$ pre $k \geq 3$?
- Je barely-random normálny tvar
  alebo je možné $PFA(k)$ amplifikovať ?
- Uzavretosť na ďaľšie operácie (AFL)
- ...

Záver

Náš prínos

- *Formálna* definícia akceptácie jazyka s chybami.
- Bez-ε normálny tvar.
- $k + 1$ hláv je lepšie než k.
- Barely-random $PFA(k)$ nie je možné amplifikovať.
- Štandardné otázky ako uzáverové vlastnosti tried, ich vzájomné vzťahy, či vzťahy k (ne)deterministickým modelom.