

Banova-Linialova hypotéza

Tatiana Husárová
školiťel: doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.

*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského*



**FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY**
Univerzita Komenského
v Bratislave

22. jún 2023

2-bisekcia na kubických grafoch

- *Bisekcia* - rozklad vrcholovej množiny grafu na dve rovnaké časti
- Môže byť indukovaná vrcholovým farbením dvoma farbami
- *2-bisekcia* ak každý komponent najviac dvojvrcholový



2-bisekcia na kubických grafoch

- *Bisekcia* - rozklad vrcholovej množiny grafu na dve rovnaké časti
- Môže byť indukovaná vrcholovým farbením dvoma farbami
- *2-bisekcia* ak každý komponent najviac dvojvrcholový

2-bisekcia na kubických grafoch

- *Bisekcia* - rozklad vrcholovej množiny grafu na dve rovnaké časti
- Môže byť indukovaná vrcholovým farbením dvoma farbami
- *2-bisekcia* ak každý komponent najviac dvojvrcholový

Banova-Linialova hypotéza

- Ban a Linial vyslovili hypotézu o existencii vonkajšej 2-bisekcie pre všetky 2-súvislé kubické grafy okrem Petersonovho

Prečo nás to zaujíma?

- Hypotéza súvisí s cirkulárnym tokovým číslom
- Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf G obsahuje 2-bisekciu
- Hypotéza bola dokázaná pre cycle permutation, claw-free a treelike snarky



Banova-Linialova hypotéza

- Ban a Linial vyslovili hypotézu o existencii vonkajšej 2-bisekcie pre všetky 2-súvislé kubické grafy okrem Petersonovho

Prečo nás to zaujíma?

- Hypotéza súvisí s cirkulárnym tokovým číslom
- Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf G obsahuje 2-bisekciu
- Hypotéza bola dokázaná pre cycle permutation, claw-free a treelike snarky

Banova-Linialova hypotéza

- Ban a Linial vyslovili hypotézu o existencii vonkajšej 2-bisekcie pre všetky 2-súvislé kubické grafy okrem Petersonovho

Prečo nás to zaujíma?

- Hypotéza súvisí s cirkulárnym tokovým číslom
- Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf G obsahuje 2-bisekciu
- Hypotéza bola dokázaná pre cycle permutation, claw-free a treelike snarky

Banova-Linialova hypotéza

- Ban a Linial vyslovili hypotézu o existencii vonkajšej 2-bisekcie pre všetky 2-súvislé kubické grafy okrem Petersonovho

Prečo nás to zaujíma?

- Hypotéza súvisí s cirkulárnym tokovým číslom
- Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf G obsahuje 2-bisekciu
- Hypotéza bola dokázaná pre cycle permutation, claw-free a treelike snarky

Banova-Linialova hypotéza

- Ban a Linial vyslovili hypotézu o existencii vonkajšej 2-bisekcie pre všetky 2-súvislé kubické grafy okrem Petersonovho

Prečo nás to zaujíma?

- Hypotéza súvisí s cirkulárnym tokovým číslom
- Ak pre kubický graf G platí $\phi_c(G) < 5$, graf G obsahuje 2-bisekciu
- Hypotéza bola dokázaná pre cycle permutation, claw-free a treelike snarky



Obsah bakalárskej práce

- Implementácia algoritmu hľadajúceho 2-bisekcie
- Skúmanie extrémnych grafov pre Banovu-Linialovu hypotézu
- Pri zanedbaní podmienky rovnosti v 2-bisekcii maximalizácia rozdielu D



Obsah bakalárskej práce

- Implementácia algoritmu hľadajúceho 2-bisekcie
- Skúmanie extrémálnych grafov pre Banovu-Linialovu hypotézu
- Pri zanedbaní podmienky rovnosti v 2-bisekcii maximalizácia rozdielu D

Obsah bakalárskej práce

- Implementácia algoritmu hľadajúceho 2-bisekcie
- Skúmanie extrémálnych grafov pre Banovu-Linialovu hypotézu
- Pri zanedbaní podmienky rovnosti v 2-bisekcii maximalizácia rozdielu D



Algoritmus s orezávaním

- Backtrack s orezávaním na základe zafarbenia susedných vrcholov
- Potreba uchovávanía doplňujúcich vlastností vrcholov
- Prehľadávanie všetkých kubických grafov pre $4 \leq n \leq 22$



Algoritmus s orezávaním

- Backtrack s orezávaním na základe zafarbenia susedných vrcholov
- Potreba uchovávaní doplňujúcich vlastností vrcholov
- Prehľadávanie všetkých kubických grafov pre $4 \leq n \leq 22$

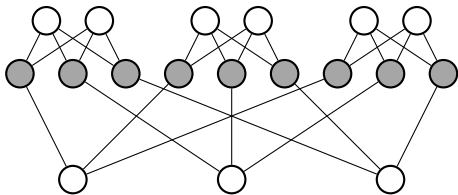
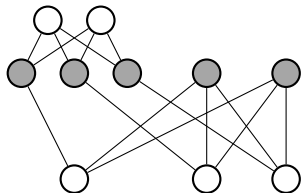
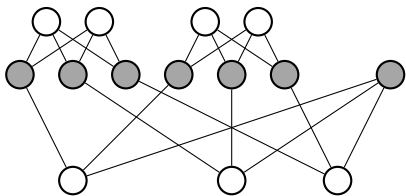
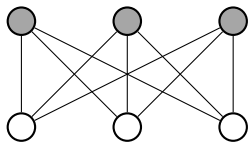


Algoritmus s orezávaním

- Backtrack s orezávaním na základe zafarbenia susedných vrcholov
- Potreba uchovávanía doplňujúcich vlastností vrcholov
- Prehľadávanie všetkých kubických grafov pre $4 \leq n \leq 22$

Extremálne grafy - minimalizácia 2-bisekcií

→ Štyri bezmostové grafy B_i pre $i = \{0, 1, 2, 3\}$

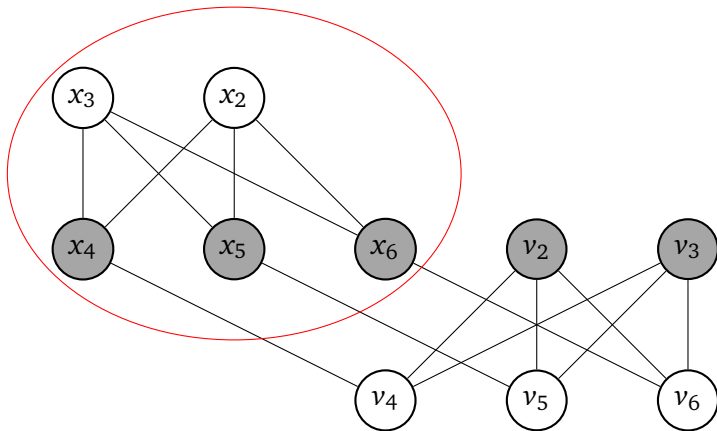


Vyslovená hypotéza pre minimalizáciu

Bezmostové grafy B_i pre $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ sú jediné grafy, ktoré majú práve jednu 2-bisekciu.

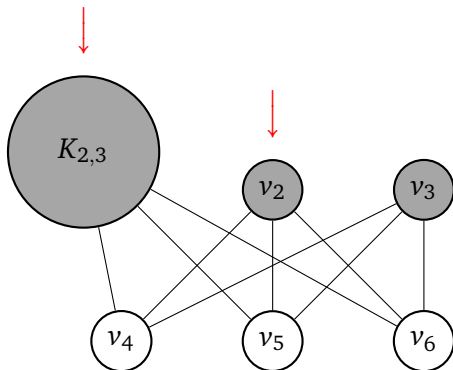


Dôkaz pre B_1



Dôkaz pre B_1

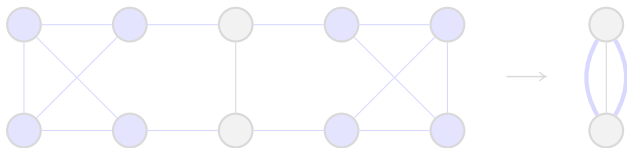
- Farebný rozdiel plus jedna (pre danú farbu)
- Susedné vrcholy s aspoň jedným vrcholom danej farby



Extremálne grafy - maximalizácia 2-bisekcií

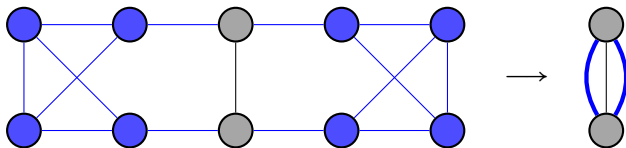
→ Pre každé pozorované n práve jeden graf s najväčším počtom 2-bisekcií

→ Tieto grafy obsahovali opakujúci sa podgraf F

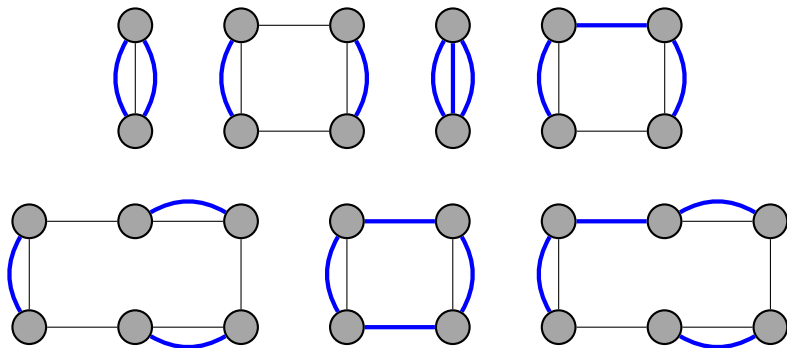


Extremálne grafy - maximalizácia 2-bisekcií

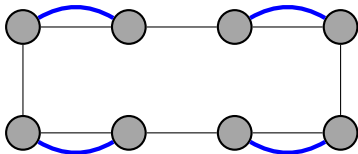
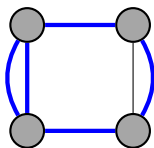
- Pre každé pozorované n práve jeden graf s najväčším počtom 2-bisekcií
- Tieto grafy obsahovali opakujúci sa podgraf F



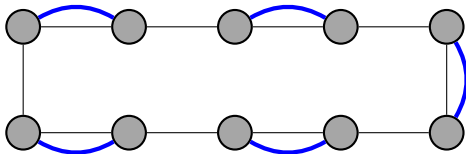
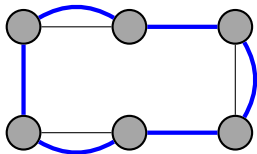
Grafy v prekreslenom tvare



Očakávané tvary



Očakávané tvary grafu pre $n = 24$



Skúmané tvary grafov pre $n = 30$

Vyslovená hypotéza pre maximalizáciu

Graf G na n vrchoch s maximálnym počtom 2-bisekcií vzhľadom na počet vrcholov vznikne konštrukciou z párneho cyklu C dĺžky l . Nech P je najväčšia možná podmnožina hrán cyklu C , pre ktorú platí, že žiadna dvojica z ľubovoľných dvoch hrán množiny P nezdieľa vrchol. Nech N je komplement tejto množiny vzhľadom na množinu hrán cyklu C . Graf G skonštruujeme z cyklu C tak, že na incidentné vrcholy každej hrany z množiny P napojíme graf F a k hrán z množiny N nahradíme grafom F , pričom l zvolíme tak, aby sme maximalizovali k a platí:

$$\frac{n - 4k}{3} = l$$
$$k \leq l/2$$



Maximalizácia rozdielu D

- Rozdiel medzi počtom bielych a čiernych vrcholov pri zanedbaní podmienky rovnosti (bez ujmy na všeobecnosti pre čiernu farbu)
- Konštrukcia grafu s ľubovoľne veľkým rozdielom
- Teoreticky najväčší možný rozdiel vzhľadom na počet vrcholov grafu



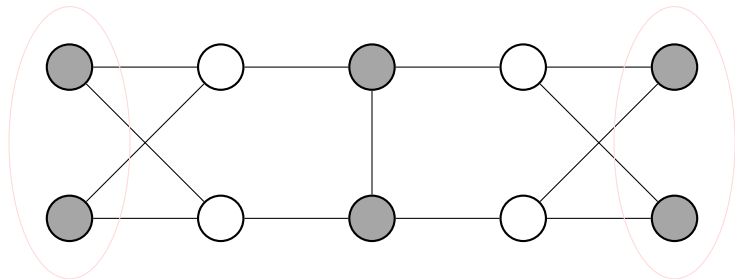
Maximalizácia rozdielu D

- Rozdiel medzi počtom bielych a čiernych vrcholov pri zanedbaní podmienky rovnosti (bez ujmy na všeobecnosti pre čiernu farbu)
- Konštrukcia grafu s ľubovoľne veľkým rozdielom
- Teoreticky najväčší možný rozdiel vzhľadom na počet vrcholov grafu

Maximalizácia rozdielu D

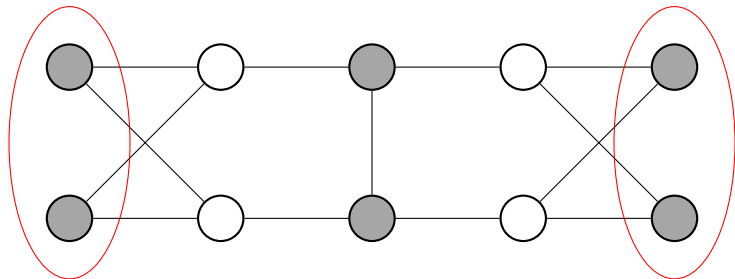
- Rozdiel medzi počtom bielych a čiernych vrcholov pri zanedbaní podmienky rovnosti (bez ujmy na všeobecnosti pre čiernu farbu)
- Konštrukcia grafu s ľubovoľne veľkým rozdielom
- Teoreticky najväčší možný rozdiel vzhľadom na počet vrcholov grafu

Komponent T_i a konštrukcia



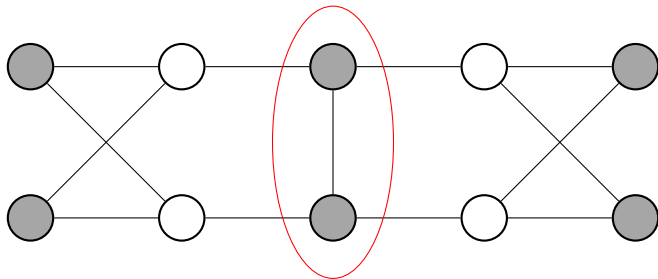
Spájanie jednotlivých T_i komponentov

Komponent T_i a konštrukcia



Spájanie jednotlivých T_i komponentov

Konštrukcia



→ Rozdiel D rastie o dva na každých desiatich vrchoch.

Platí:

$$D = \frac{|V|}{5}$$

Zhrnutie

Implementácia algoritmu s orezávaním

Extremálne grafy

- Dokázanie existencie práve jednej 2-bisekcie
- Pozorovanie správania grafov s najväčším počtom 2-bisekcií
- Formulovanie hypotéz pre obe množiny grafov

Maximalizácia rozdielu D

- Definovanie konštrukcie pre graf s ľubovoľne veľkým rozdielom D
- Teoretické odvodenie maximálneho možného rozdielu D



Zhrnutie

Implementácia algoritmu s orezávaním

Extremálne grafy

- Dokázanie existencie práve jednej 2-bisekcie
- Pozorovanie správania grafov s najväčším počtom 2-bisekcií
- Formulovanie hypotéz pre obe množiny grafov

Maximalizácia rozdielu D

- Definovanie konštrukcie pre graf s ľubovoľne veľkým rozdielom D
- Teoretické odvodenie maximálneho možného rozdielu D



Zhrnutie

Implementácia algoritmu s orezávaním

Extremálne grafy

- Dokázanie existencie práve jednej 2-bisekcie
- Pozorovanie správania grafov s najväčším počtom 2-bisekcií
- Formulovanie hypotéz pre obe množiny grafov

Maximalizácia rozdielu D

- Definovanie konštrukcie pre graf s ľubovoľne veľkým rozdielom D
- Teoretické odvodenie maximálneho možného rozdielu D



Diskusia

