Analýza farebných vlastností vlastných (2,3)-pólov

Erik Řehulka
školiteľ: Mgr. Jozef Rajník

Bakalárska práca

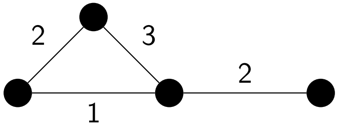
Hranové farbenie

Definícia

Hranové farbenie grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $\phi : E \to C$, kde C je neprázdna množina farieb a platí $\phi(e) \neq \phi(f)$ pre každú dvojicu susedných hrán e, f.

Definícia

Graf $G = (V, E)$ je hranovo k-zafarbiteľný, ak existuje hranové farbenie $\phi : E \to C$ také, že $|C| = k$.



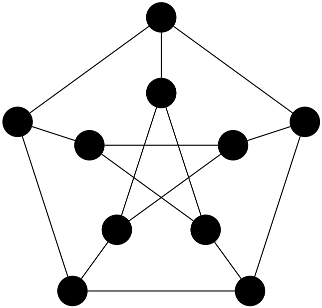
Snarky

Definícia

Snark je súvislý neorientovaný kubický graf, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný.

Odteraz len *zafarbiteľný*.

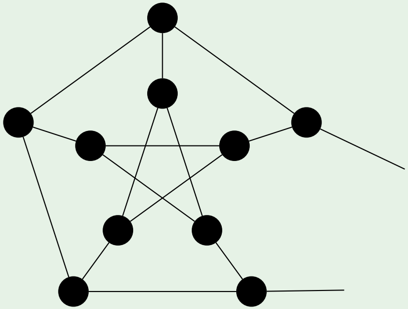
Príklad: Petersenov graf



Multipóly

Neformálne: multipól je graf, ktorého konce hrán nemusia byť incidentné so žiadnym vrcholom - visiace, alebo izolované.

Príklad



Multipóly

Definícia

Koniec hrany $e \in E$ v multipóle $M = (V, E)$, ktorý nie je incidentný so žiadnym vrcholom nazývame *polhrana*. Množinu všetkých polhrán M označujeme $S(M)$.

Odstránením vrcholu sa konce hrán incidentné s týmto vrcholom stanú polhranami.

Prerezaním hrany, ktorej oba konce sú incidentné s nejakým vrcholom nám vzniknú dve nové visiace hrany z týchto vrcholov.

Multipóly vieme spájať spájaním polhrán.

Farbenie multipólov

Farba polhrany = farba hrany na ktorej sa nachádza.

Definícia

Nech M je multipól a $S(M)$ má fixné usporiadanie, $S(M) = (e_1, \cdots, e_n)$. Množinu farbení M definujeme ako množinu usporiadaných n-tíc:

$$\mathrm{Col}(M) = \{(\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)) \mid \phi \text{ je farbenie } M\}.$$

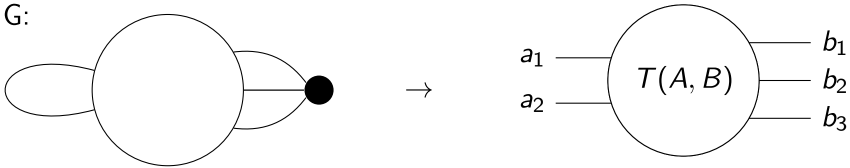
Paritná Lema

Lema (Parity Lemma [Descartes, 1948])

Nech M je multipól zafarbený farbami c_1, c_2 a c_3, pričom k_1, k_2 a k_3 je počet polhrán zafarbených danou farbou. Potom $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \mod 2$.

Inak povedané, parita výskytu jednotlivých farieb na polhranách je v každom farbení rovnaká.

Vlastný (2,3)-pól



Definícia

Nech G je ľubovoľný snark. Odstránením vrcholu a prerezaním hrany z G, pričom daná hrana nie je incidentná s daným vrcholom vznikne vlastný (2,3)-pól **T(A,B)**. Konektor A obsahuje polhrany vzniknuté po odstránení hrany a B polhrany po odstránení vrcholu.

Usporiadanie polhrán: $(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)$.

Farbenia vlastných (2,3)-pólov

Lema

Množina farbení každého vlastného (2,3)-pólu $T(A, B)$ je podmnožina

$$C = \{(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) \mid a_1 \neq a_2\}$$

a zároveň tri farby sú jednej farby a zvyšné dve majú farbu rôznu od ostatných.

Počet farieb vyplýva z Paritnej Lemy.

"vlastný" $\Rightarrow a_1 \neq a_2$ (ekv. s $|\{b_1, b_2, b_3\}| \leq 2$)

Definícia

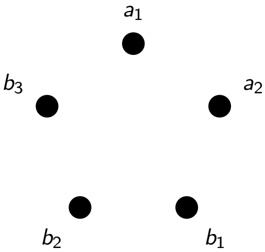
Vlastný (2,3)-pól $T(A, B)$ je **perfektný** práve vtedy, keď jeho množina farbení je rovnaká ako C. Inak je **imperfektný**.

Farbenia vlastných (2,3)-pólov

3 rovnaké = sociálne, ostatné = osamotené.

Zaujíma nás pri farbeniach ktoré polhrany sú sociálne a ktoré osamotené.

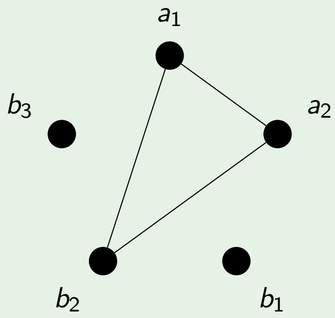
Farbiaci graf vlastného (2,3)-pólu T:



Hrana e_1e_2 je práve vtedy, keď existuje také farbenie T, že e_1 a e_2 sú osamotené.

Farbenia vlastných (2,3)-pólov

Príklad



Ciele

- Zistiť, ako môže vyzerať množina farbení (2,3)-pólov, ktoré vznikajú z malých snarkov.
- Preskúmať tieto malé (2,3)-póly a zistiť farebné vlastnosti, napríklad kedy sú perfektné.
- Na základe výsledkov v malých prípadoch sformulovať a dokázať tvrdenia (nutné podmienky a postačujúce podmienky) o farebných vlastnostiach.

Motivácia

Chceme skúmať zafarbiteľnosť multipólov vznikajúcich zo snarkov od najjednoduchších.

- 1-póly – triviálne nezafarbiteľné.
- 2-póly – jediná možnosť je, že obe polhrany majú rovnakú farbu.
- 3-póly – všetky polhrany majú navzájom rôznu farbu.
- 4-póly – už preskúmané.

Zafarbiteľné 5-póly vznikajúce zo snarkov sa dajú rozdeliť do troch typov: negátory, superpentagony a vlastné (2,3)-póly.

Prvé dva typy sú už preskúmané.

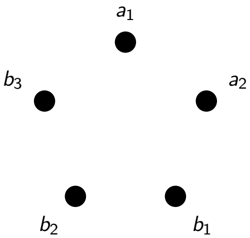
Analýza

- Program v `C++`.
- Pre každý snark na vstupe vytvorí všetky možné vlastné (2,3)-póly a zistí skúmané vlastnosti.
- Skúmané snarky s obvodom aspoň 5 a najviac 28 vrcholov.
- 3 247 snarkov $\rightarrow$ 3 476 400 vlastných (2,3)-pólov.

Farebné triedy

Farbiaci graf vlastných (2,3)-pólov:

- nemá vrchol stupňa 1 [Preissmann, 1983],
- nemá hranu medzi b_i, b_j.



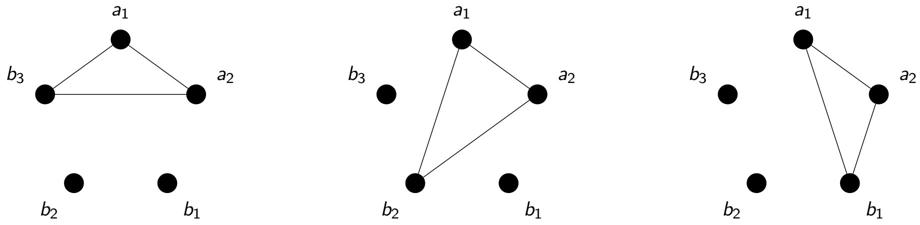
Každý z b vrcholov je teda spojený buď s oboma a_1, a_2, alebo ani jedným.

Dokopy 12 možných grafov.

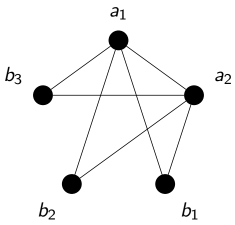
Notácia: Počet vrcholov z b_1, b_2, b_3, ktoré sú spojené hranou s a_1, a_2, nasledované A ak graf obsahuje hranu medzi a_1, a_2, inak B.

Dostávame 6 tried: nezafarbiteľné (0B), 1A, 2A, 2B, 3B, perfektné (3A).

Farebné triedy - príklad

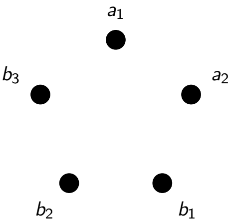


Obr.: Trieda 1A

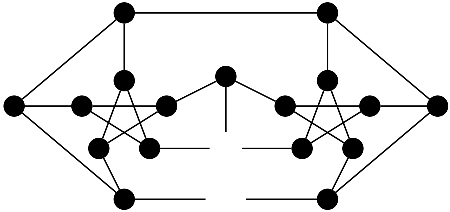


Obr.: Perfektné (3A)

Farebné triedy - príklad

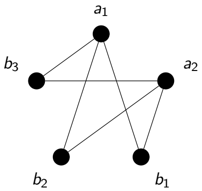


Obr.: Nezafarbiteľné (0B)

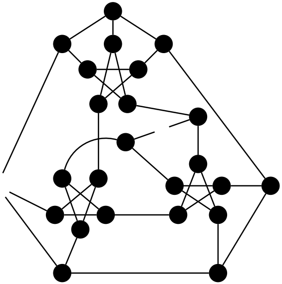


Obr.: Príklad nezafarbiteľného vlastného (2,3)-pólu

Farebné triedy - príklad



Obr.: Trieda 3B

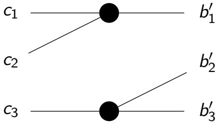


Obr.: Príklad vlastného (2,3)-pólu z triedy 3B

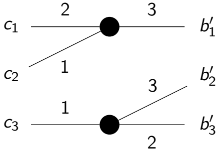
Rozširovanie farebných tried

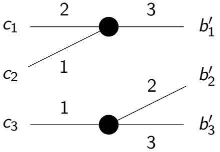
Vytvorili sme 6-póly, ktoré rozširujú farbenia vlastných (2,3)-pólov.

Máme rozšírenie z 1A na 2B, z 2B na 2A, z 2A na perfektné a z 3B na perfektné.



Obr.: 6-pól na rozšírenie 1A na 2B





Spojíme vrchol b_i, ktorý je osamotený, s c_1.

Odstrániteľnosť

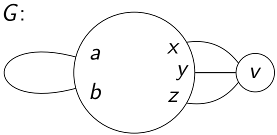
Dvojica rôznych vrcholov $\{u, v\}$ snarku G je *odstrániteľná*, ak po ich odstránení ostane výsledný multipól nezafarbiteľný.

Dvojica rôznych hrán $\{ab, cd\}$ snarku G je *odstrániteľná*, ak po ich prerezaní ostane výsledný multipól nezafarbiteľný.

Inak neodstrániteľné.

Vety o zafarbiteľnosti

Nech T vznikol zo snarku G odstránením vrcholu v a prerezaním hrany ab, pričom susedia v sú x, y, z.



Aspoň jedna z dvojíc $\{v, a\}, \{v, b\}$ odstrániteľná $\Rightarrow$ T je nezafarbiteľný.

Dvojice $\{ab, vx\}, \{ab, vy\}, \{ab, vz\}$:

- 0 odstrániteľných $\Leftrightarrow$ T je z triedy 2A, 2B, 3B, alebo perfektný.
- 1 odstrániteľná $\Leftrightarrow$ T je z triedy 1A.
- 2 odstrániteľné – nedá sa.
- 3 odstrániteľné $\Leftrightarrow$ T je nezafarbiteľný.

Záver

- Cieľ práce splnený, okrem postačujucej podmienky perfektnosti.
- Našli sme 6-póly, ktorými vieme rozšíriť farbenia.
- 66.13% skúmaných vlastných (2,3)-pólov je perfektných.
- Našli sme niekoľko snarkov, ktoré produkujú iba perfektné, resp. zafarbiteľné vlastné (2,3)-póly.
- Z toho vychádza problém pre ďalší výskum – nájsť nekonečné rodiny snarkov produkujúce iba perfektné, resp. zafarbiteľné vlastné (2,3)-póly.

Referencie

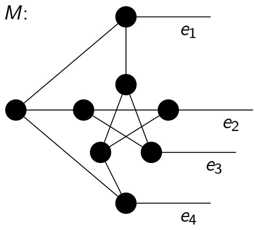
[Descartes, 1948] Descartes, B. (1948).
Network-colourings.
The Mathematical Gazette, 32.

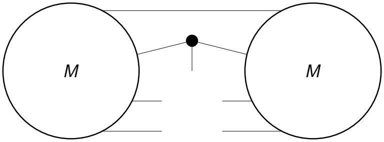
[Preissmann, 1983] Preissmann, M. (1983).
C-minimal snarks.
In Berge, C., Bresson, D., Camion, P., Maurras, J. F., and Sterboul, F., editors, *Combinatorial Mathematics*, volume 75 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland.

Ďakujem za pozornosť

Otázky

Bolo by možné na základe poznania presných farebných vlastností menších pólov (napríklad tých odvodených z Petersenovho grafu) nejako elegantnejšie dokázať, že farebný graf niektorého zo zložitejších príkladov je naozaj ten, ktorý je uvádzaný?

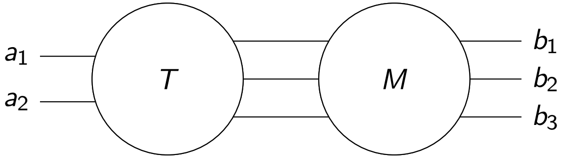




V každom farbení ϕ 4-pólu M: $\phi(e_1) = \phi(e_2)$ a $\phi(e_3) = \phi(e_4)$.

Otázky

Prečo nie je možné pripojením (3,3)-pólu k vlastnému (2,3)-pólu vyrobiť (2,3)-pól, ktorý nie je vlastný?



$a_1 = a_2 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1$ (Paritná Lema)

Také farbenie neexistuje, keďže T je vlastný.