Problém dosiahnuteľnosti nuly v stochastických systémoch s počítadlami

Autor: Michal Adámek
Vedúci: RNDr. Michal Foríšek, PhD.

25. júna 2019

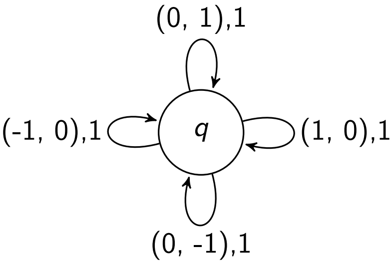
d-rozmerný stochastický systém s počítadlami

obsahuje:

- d počítadiel
- stavy
- pravidlá tvaru $(p, \boldsymbol{\alpha}, q)$, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^d$
- funkciu priradzujúcu každému pravidlu váhu

konfigurácia - (stav, hodnoty počítadiel)
Pravidlo $(p, \boldsymbol{\alpha}, q) \in \gamma$ je povolené v konfigurácií $p\boldsymbol{v}$, ak pre všetky $i \in \{1, \ldots d\}$, kde $\boldsymbol{\alpha}[i] = -1$ máme, že $\boldsymbol{v}[i] \geq 1$.

Príklad stochastického systému s počítadlami

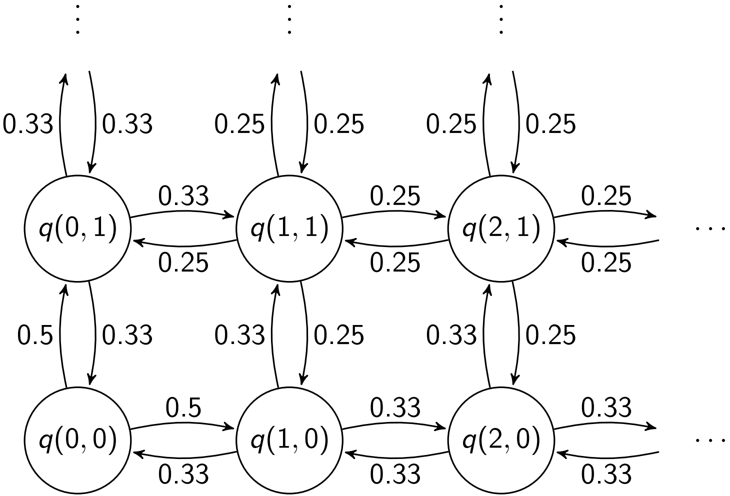


Asociovaný Markovov reťazec

obsahuje:

- stavy - konfigurácie stochastického systému s počítadlami
- prechody - pre konfiguráciu $p\boldsymbol{v}$ a $\forall$ pravidlo (p, α, q):
  $p\boldsymbol{v} \xrightarrow{x} q(\boldsymbol{v} + \alpha)$, $x = W((p, \alpha, q))/T$, kde T je celková váha všetkých pravidiel povolených v konfiguracii $p\boldsymbol{v}$

Príklad Markovovho reťazca



Kvalitatívny problém dosiahnuteľnosti nuly

Vstup: d-rozmerný stochastický systém s počítadlami a stav p.
Otázka: Platí $\mathcal{P}(Run(p\mathbf{1}, \mathcal{Z}_{all})) = 1$?

Spravené veci

- implementácia publikovaného riešenia problému dosiahnuteľnosti nuly
- meriania dĺžok trvania výpočtov programu
- návrh riešenia problému dosiahnuteľnosti nuly

Publikované riešenie, z ktorého vychádzame

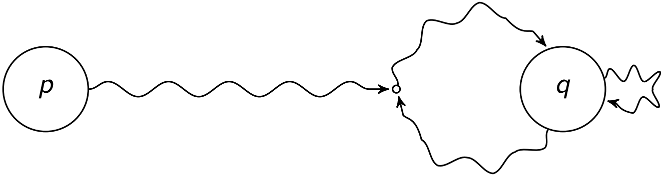
- vydané v článku Brázdil et al.: Zero-reachability in probabilistic multi-counter automata
- čas výpočtu polynomiálny v závislosti na veľkosti systému a dvojnásobne exponenciálny v závislosti na počte počítadiel
- cieľ - identifikovať podmienky s ktorými $\mathcal{P}(Run(p\boldsymbol{v}, \neg\mathcal{Z}_{all})) > 0$

Publikované riešenie, z ktorého vychádzame

1. Markovov reťazec
2. Spodné silne súvislé komponenty
3. $\forall q, i : change_i^q = \sum_{(q,\boldsymbol{\alpha},r)\in\gamma} P(q, \boldsymbol{\alpha}, r) \cdot \boldsymbol{\alpha}[i]$
4. $\forall q : \mu(q) = \sum_{r \xhookrightarrow{x} q} \mu(r) \cdot x$
5. $\forall i : \boldsymbol{t}[i] = \sum_{q\in C} \mu(q) \cdot change_i^q$
6. $\forall q, i : botfin_i(q)$
7. $\forall i$: Je počítadlo i klesajúce?
8. $\forall i$: Je počítadlo i divergujúce?

Publikované riešenie, z ktorého vychádzame

9. $q\boldsymbol{u} \rightarrow^* q\boldsymbol{z}$:
   - $q\boldsymbol{u}$ je nad $n = |Q|^2+(2\cdot|Q|+1)^d\cdot(d^2\cdot d!\cdot|Q|^2+2\cdot d^3\cdot d!^2\cdot|Q|^4\cdot(2\cdot|Q|+1)^d)$, $\boldsymbol{u}[i] \geq n$ pre každé i také, že $\boldsymbol{t}[i] > 0$, a $\boldsymbol{u}[i] \geq \mathit{botfin}_i(q)$ pre každé i také, že $\boldsymbol{t}[i] = 0$
   - $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{u})[i] > 0$ pre každé i také, že $\boldsymbol{t}[i] > 0$, inak $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{u})[i] \geq 0$
10. $p\boldsymbol{v} \rightarrow^* q\boldsymbol{u}$



Publikované riešenie problému pokryteľnosti

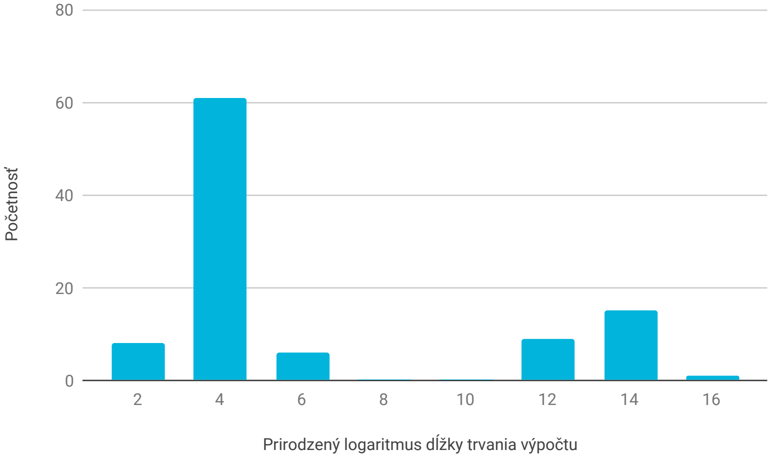
Systém s počítadlami má pokrytie konfigurácie $q\boldsymbol{u}$ vzhľadom na konfiguráciu $p\boldsymbol{v}$, ktorého dĺžka je najviac $(|Q| + |\gamma|) \cdot (3 + n)^{(3d)!+1}$.

Počty iterácii v riešení problému pokrytelnosti

Systém s 2 počítadlami, 3 stavmi a 6 pravidlami:
Horná hranica dĺžky cesty v riešení problému pokryteľnosti:
$3.8 \cdot 10^{5116}$.
Výpočet programu so 100 systémami:

- 89 systémov - cca 10^7 iterácií
- 11 systémov - cca 10^8 iterácií

Histogram dĺžok trvania výpočtu

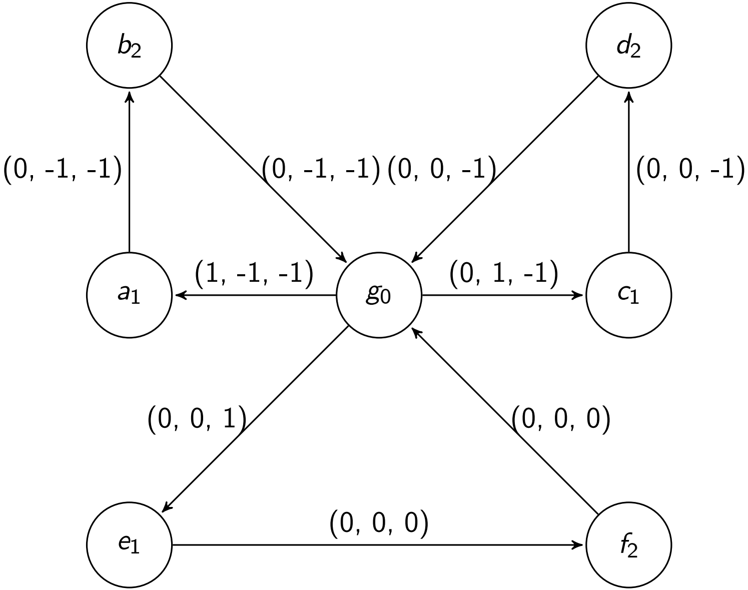


Obr.: Histogram 100 dĺžok trvania výpočtu programu so systémami s 2 počítadlami, 3 stavmi a 6 pravidlami.

Dĺžky trvania výpočtu

		Počet stavov			
		2	3	4	5
Počet pravidiel	6	-	< 1 s	276 s	231 dní*
		-	29 s	< 1 s	50 m*
		-	26 s	277 h*	115 dní*
		-	26 s	263 s	50 m*
		-	28 s	255 s	50 m*
	7	-	-	311 s	50 m*
		-	-	1000 h*	50 m*
		-	-	342 s	50 m*
		-	-	301 s	3 roky*
		-	-	81 dní*	< 1 s
	8	-	-	833 h*	243 dní*
		-	-	555 h*	< 1 s
		-	-	277 h*	115 dní*
		-	-	337 s	115 dní*
		-	-	331 s	50 m*

Konštrukcia systému s počítadlami



Konštrukcia systému s počítadlami

Označíme počet pravidiel v cykle takto: n.
Počet krokov potrebných na zvýšenie hodnôt všetkých počítadiel o jedna: $(n+1)^d - 1$.

Dôkaz

Máme konečnú postupnosť $a_1, \ldots, a_d$ takú, že $a_1 = n$ a
$a_k = a_{k-1} + (a_{k-1} + 1) \cdot n,\ k \in \{2, \ldots, d\}$.
Budeme dokazovať, že $a_k = (n+1)^k - 1$.
Báza: $k = 1 : (n+1)^k - 1 = (n+1)^1 - 1 = n + 1 - 1 = n = a_1$
Indukčný predpoklad: $a_k = (n+1)^k - 1$
Indukčný krok: $a_{k+1} = a_k + (a_k + 1) \cdot n$
$a_{k+1} = (n+1)^k - 1 + ((n+1)^k - 1 + 1) \cdot n$
$a_{k+1} = (n+1)^k - 1 + (n+1)^k \cdot n$
$a_{k+1} = (n+1) \cdot (n+1)^k - 1$
$a_{k+1} = (n+1)^{k+1} - 1$

Ďakujem Vám za pozornosť.