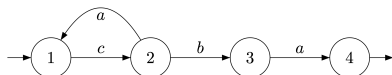


Štruktúrálna obmedzenia automatov s váhami

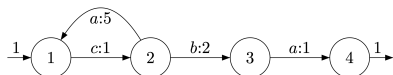
Pavol Kebis,
RNDr. Peter Kostolányi, PhD.

- ▶ Charakterizácia tried štruktúralne obmedzených automatov s váhami.
- ▶ Analýza rozhodovacích problémov štruktúralne obmedzených automatov s váhami nad tropickými polokruhmi v nadväznosti na publikácie S. Almagora, U. Bokera a O. Kupfermanovej.

Konečné automaty s váhami



Konečný automat



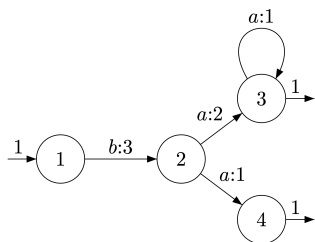
Konečný automat s váhami

- ▶ Realizuje **jazyk** (množina slov).
- ▶ Ekvivalentné automatom s váhami nad Booleovským polokruhom.
- ▶ Realizuje **formálny mocninový rad** (zobrazenie zo slov na hodnoty z polokruhu).
- ▶ Zovšeobecnenie klasických automatov.
- ▶ Nad Booleovským polokruhom, štandardným polokruhom celých čísel, tropickými polokruhmi...

Príklad automatu s váhami nad tropickým polokruhom

Tropické polokruhy sa nazývajú aj min-plus polokruhy.

Môžu sa uvažovať nad $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ a inými množinami.



Príklad

$$ba \rightarrow \min(1 + 3 + 2 + 1, 1 + 3 + 1 + 1) = 6$$

$$baa \rightarrow 1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 8$$

$$baaa \rightarrow 1 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$$

$$a \rightarrow \infty$$

Známe výsledky a východisková situácia

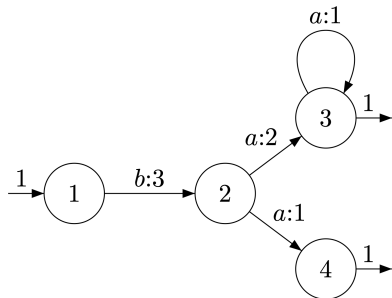
Problém	Tropický polokruh s množinou	
	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$	$\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
Neprázdnosť	P	P
Univerzalita	PSPACE-úplný	Nerozhodnuteľný
Horná ohraničenosť	PSPACE-úplný	Nerozhodnuteľný
Absolútna ohraničenosť	PSPACE-úplný	PSPACE-úplný
Rovnosť všetkých koeficientov	PSPACE-úplný	PSPACE-úplný
Existencia koeficientu	PSPACE-úplný	Nerozhodnuteľný
Rovnosť	Nerozhodnuteľný	Nerozhodnuteľný
Inklúzia	Nerozhodnuteľný	Nerozhodnuteľný

Výsledky S. Almagora, U. Bokera a O. Kupfermanovej pre automaty s váhami nad vybranými polokruhmi.

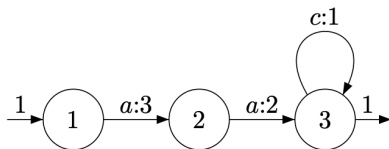
Pre deterministické automaty s váhami nad tropickými polokruhmi celých a prirodzených čísel patrí väčšina problémov do P.

Štruktúrálna obmedzenia

Acyklický automat so slučkami neobsahuje cyklus dĺžky väčšej ako 1 (tzv. extenzívny automat, čiastočne usporiadaný automat).

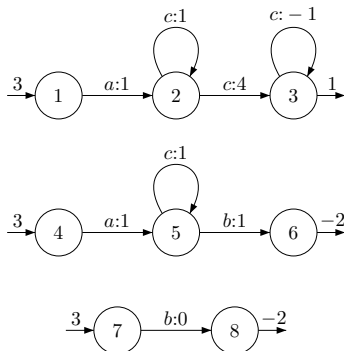
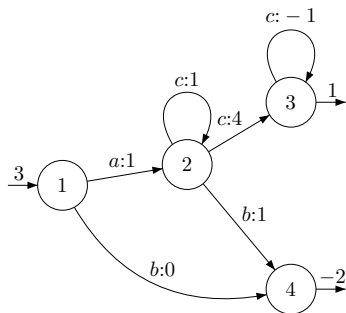


Nerozvetvený automat má 1 začiatkový stav, 1 koncový stav, usporiadané stavy, medzi každými dvoma susednými stavmi je práve 1 hrana.



Homogénny nerozvetvený automat má prechody medzi dvoma susednými stavmi na rovnaké písmeno.

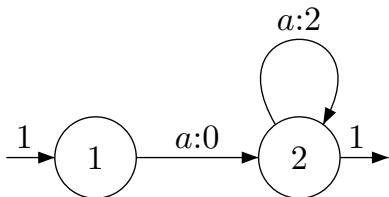
Nerozvetvená normálna forma acyklických automatov so slučkami



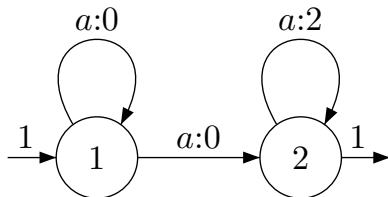
Pre každý acyklický automat so slučkami existuje ekvivalentný automat v nerozvetvenej normálnej forme.

Problém hornej ohraničenosti

Existuje pre daný automat hodnota H taká, že váha každého slova je menšia ako H ?



Automat, ktorého rad *nie* je zhora ohraničený



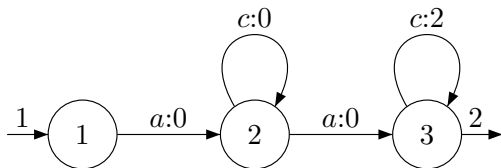
Automat, ktorého rad *je* zhora ohraničený

Pre všeobecné automaty s váhami nad tropickým polokruhom prirodzených čísel je tento problém PSPACE-úplný.

Nutná podmienka hornej ohraničenosti

Uvažujeme homogénne nerozvetvené automaty.

Nutná podmienka: Neexistuje kladná slučka na písmeno iné než a .



Príklad

$aac \rightarrow 5$, $aacc \rightarrow 7$, $aaccc \rightarrow 9$, ...

$aac^n \rightarrow 3 + 2n$

Riešenie problému hornej ohraničenosti

Rad realizovaný homogénnym nerozvetveným automatom nad tropickým polokruhom prirodzených čísel je zhora ohraničený *práve vtedy* ak

- ▶ neexistuje kladná slučka na písmeno iné než a
- ▶ a neexistuje stav s kladnou slučkou na a , ktorý nie je *nahradený* žiadnym iným stavom s nulovou slučkou na a .

Nahraditeľnosť je relácia medzi stavmi automatu so slučkou na a .

Vieme riešiť v polynomiálnom čase a teda problém patrí do P.

Riešenie problému univerzality

Platí pre daný automat a hodnotu H , že váha každého slova je menšia ako H ?

Pre daný zhora ohraničený homogénny nerozvetvený automat \mathcal{A} nad tropickým polokruhom prirodzených čísel a pre danú hodnotu H platí, že všetky slová, ktoré nemajú váhu ∞ majú váhu menšiu ako H práve vtedy, ak všetky slová tvaru

$$\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \dots \omega_n^{k_n}$$

majú váhu menšiu ako H , kde $k_1, \dots, k_n < n^2 + n$. Slová $\omega_1, \dots, \omega_n$ sú definované pre \mathcal{A} .

Stačí nedeterministicky skonštruovať slovo a v polynomiálnom čase overiť, či je jeho váha väčšia ako daná hodnota.

Riešime komplement problému a teda tento problém patrí do coNP.

Dôkaz ťažkosti problému existencie koeficientu s danou váhou

Existuje pre daný automat a hodnotu H slovo, ktorého váha je rovná H ?

Tento problém je NP ťažký už pre automaty s jedným stavom a neobmedzenou abecedou.

Redukcia na subset sum problém používa automat s jedným stavom, váhami z prirodzených čísel a neobmedzenou abecedou. S. Almagor, U. Boker a O. Kupfermanová použili v redukcii acyklické automaty.

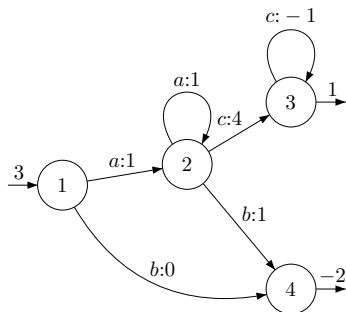
Zhrnutie

Problém	Tropický polokruh s množinou	
	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$	$\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
Horná ohraničenosť	P	?
Absolútna ohraničenosť	P	P
Univerzalita	coNP	?
Rovnosť všetkých váh	coNP	coNP

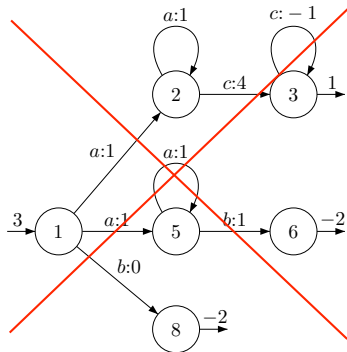
Dokázané výsledky pre homogénne nerozvetvené automaty a k nim patriace otvorené problémy.

- ▶ Problém existencie koeficientu je NP-ťažký pre automaty s váhami, ktoré majú aspoň jeden stav.
- ▶ Všetky problémy, ktoré sú PSPACE-úplné pre všeobecné automaty, sú PSPACE-úplné aj pre acyklické automaty so slučkami.
- ▶ Otvorené ostávajú najmä problémy nad tropickým polokruhom celých čísel a problémy pre nerozvetvené automaty, ktoré nie sú nutne homogénne.

Nerozvetvená normálna forma pre deterministické acyklické automaty so slučkami

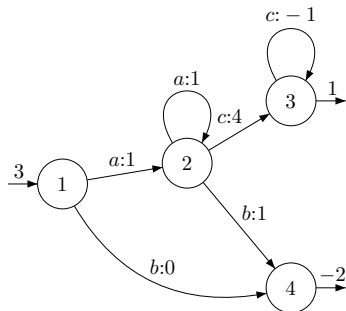


Deterministický acyklický automat so slučkami

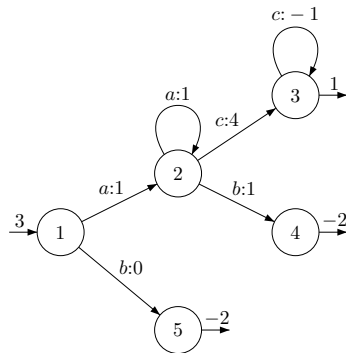


Deterministický acyklický automat so slučkami v nerozvetvenej normálnej forme

Nerozvetvená normálna forma pre deterministické acyklické automaty so slučkami

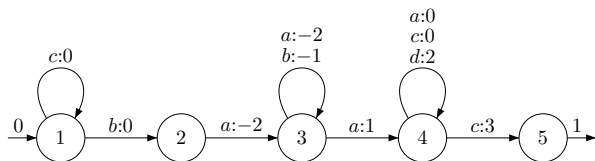


Deterministický acyklický automat so slučkami

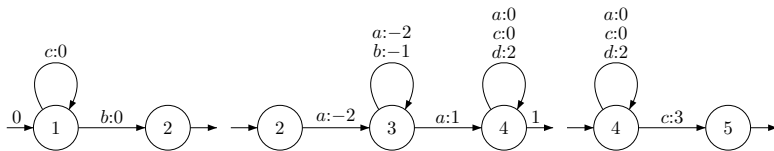


Deterministický acyklický automat so slučkami v upravenej normálnej forme

Nerozvetvené automaty



Nerozvetvený automat



Súvisiace homogénne nerozvetvené automaty