Univerzita Komenského
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra informatiky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov k-partitného grafu

MENO: Ján Švantner
ODBOR: Matematické metódy informatiky
VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc.

Bratislava, 2006

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne s využitím uvedenej literatúry a podporou môjho diplomového vedúceho.

Bratislava, apríl 2006

. . . .

Pod'akovanie

Chcel by som sa pod'akovat' pánovi doc. RNDr. Eduardovi Tomanovi, CSc. za poskytnutie študijných materiálov, za podporu pri vypracovávaní diplomovej práce a za pomoc pri riešení problémov.

Abstrakt

Väčšina výsledkov pre náhodné grafy sa dosahuje pomocou pravdepodobnostných metód. Na skúmanie hodnôt náhodných premenných, ktoré vyjadrujú vlastnosti náhodných grafov, sa často využíva Markovova a Čebyševova nerovnosť. Pre všeobecnú pravdepodobnosť vzniku hrany sa vyjadrujú prahové funkcie, určujúce od akej pravdepodobnosti daná vlastnosť platí pre skoro všetky grafy. Táto diplomová práca sa zaoberá základnými vlastnosťami k-partitných náhodných grafov, ako sú existencia izolovaných vrcholov, počet a existencia izolovaných hrán, hrúbka, súvislosť, eulerovskosť, počet krátkych ciest a kružníc v náhodnom grafe. V prvej časti definujeme pojmy potrebné na priblíženie problematiky čitateľovi. V druhej časti sa zaoberáme zjednodušeným pravdepodobnostným priestorom - dané vlastnosti skúmame v prípadoch, kde sa hrany v podgrafe vyskytujú s konštantou pravdepodobnosťou (konkrétne 1/2). Tretia časť práce sa venuje všeobecnému pravdepodobnostnému priestoru a určovaniu prahových funkcií pre niektoré z horeuvedených vlastností.

Kľúčové slová. Náhodné grafy, prahové funkcie, Markovova a Čebyševova nerovnosť.

Abstract

Most of the results in random graph theory are achieved by probabilistic methods. Markov's inequality and Chebyshev's inequality are often used for examination of values of random variables which represent properties of random graphs. This Master's thesis covers basic properties of k-partitional random graphs like existence of isolated vertices, number of edges, existence of isolated edges, thickness, connectivity of graph, existence of Eulerian path and number of short paths and cycles in graph. In the first chapter we are defining basic terminology which will be needed in the rest of the document. In the second chapter we examine properties of random k-partitional graphs where edges are added with constant probability ($p = 1/2$). The third chapter of thesis deals with generalised probability space - edges are added with probability $p \in (0, 1)$. We are looking for treshold probabilities for given properties of random graph.

Key words. Random graphs, treshold function, Markov's and Chebyshev's inequality.

Obsah

Úvod

Teória grafov má rozsiahle využitie v praktickej, ale aj v teoretickej informatike. Používa sa v dátových štruktúrach, v siet'ach, vo formálnych jazykoch a automatoch, v overovaní správnosti programov, atď'. Ako vedná disciplína vznikla približne v 18. storočí.

Jedným z objektov skúmania teórie grafov sú náhodné grafy. Väčšina výsledkov v tejto oblasti bola dosiahnutá počas posledných 40 rokov. Ich využitie spočíva hlavne v roziahlych štruktúrach, ktoré môžu byt' pomocou grafu popísané (matice, nekonečné boolovské výrazy, ...). Pomocou výsledkov z teórie náhodných grafoch sa dajú určit' vlastnosti danej štruktúry.

Táto práca sa zameriava na k-partitné náhodné grafy. Skúmame v nej rôzne vlastnosti, ako sú existencia hrán, existencia izolovaných vrcholov, súvislost', eulerovskost', počet hrán, atď'. Pri dôkazoch tvrdení používame pravdepodobnostný a kombinatorický aparát spolu s poznatkami z teórie grafov. Pre skúmanie jednotlivých vlastností zavádzame celočíselné náhodné premenné, ktoré charakterizujú daný problém. Namiesto skúmania hodnôt týchto premenných skúmame ich strednú hodnotu a disperziu. Následne, použitím Markovovej a Čebyševovej nerovnosti dostávame výsledky pre samotné náhodné premenné, čím získavame predstavu o danej vlastnosti. Skúmaním stredných hodnôt a disperzií namiesto samotných náhodných premenných sa vyhneme závislostiam a nekompatibilnosti náhodných udalostí. Všetky výsledky sú závislé od počtu vrcholov grafu. Uvažujeme, že počet vrcholov sa blíži k nekonečnu.

V prvej kapitole definujeme potrebné pojmy z pravdepodobnosti a teórie grafov. Uvádzame tu aj niektoré základné tvrdenia z týchto oblastí, ktoré nám pomôžu v ďalších kapitolách. Na konci definujeme pravdepodobnostný model, s ktorým budeme v celej práci pracovať. Väčšina definícií a tvrdení tejto kapitoly je prevzatá z [7] a z [4].

V druhej kapitole sa zaoberáme základnými vlastnosťami k-partitných náhodných grafov, v ktorých sú hrany obsiahnuté s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Skúmame počet izolovaných vrcholov a ohraničujeme priemerný počet hrán, ktoré pri tejto pravdepodobnosti vzniknú. Ohraničujeme aj hrúbku a minimálny a maximálny stupeň vrcholov. Ďalej dokazujeme, že takmer všetky k-partitné grafy sú súvislé a nie sú Eulerovské. V poslednej časti kapitoly sa zameriavame na ohraničenie počtu ciest dĺžky 2 a kružníc dĺžky 3 v grafoch z nášho modelu.

V tretej kapitole zovšeobecníme náš pravdepodobnostný priestor. Budeme používať pravdepodobnostný priestor, v ktorom grafy obsahujú danú hranu s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$. Vysvetlíme správanie náhodných grafov v takto zavedenom modeli a zavedieme pojem prahovej funkcie. Uvedieme spôsob hľadania prahových funkcií. Pre niektoré z vlastností z druhej kapitoly nájdeme prahovú funkciu a dokážeme správnosť jej výberu. Bližšie preskúmame existenciu izolovaných vrcholov a existenciu hrán. V tejto kapitole navyše preskúmame aj existenciu izolovaných hrán.

Kapitola 1

Základné definície a pojmy

V tejto kapitole zavedieme pojmy, ktoré sú použité v tejto práci. Sú to pojmy z pravdepodobnosti, grafov a niekoľko kombinatorických odhadov. V poslednej časti zadefinujeme nami používaný model k-partitného náhodného grafu. Takmer všetky pojmy a výsledky tejto kapitoly sú prebraté z použitej literatúry.

1.1 Pojmy z pravdepodobnosti

Nech Ω je množina možných výsledkov nejakého náhodného pokusu. Prvky množiny Ω nazývame elementárnymi udalosťami. Podmnožiny Ω nazývame udalosťami.

Definícia 1.1.1. *Nech Ω je množina elementárnych udalostí, pričom $\Omega \neq \emptyset$. Neprázdny systém $\mathcal{S}$ podmnožín množiny elementárnych udalostí nazývame pole náhodných udalostí (a označujeme σ-pole), ak spĺňa nasledovné podmienky:*

1. *$A \in \mathcal{S}$, potom $A^C \in \mathcal{S}$ (pričom A^C je komplement vzhľadom na Ω)*
2. *$A_1, A_2, \dots A_n, \dots \in \mathcal{S}$, potom $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$*

Definícia 1.1.2. *Majme množinu Ω pozostávajúcu z n elementárnych vzájomne sa vylučujúcich rovnako možných udalostí. Ak m (pričom $m \leq n$)*

z týchto elementárnych udalostí má za následok nastatie udalosti A[1]*, potom pravdepodobnosť udalosti A definujeme ako podiel $P(A) = \frac{m}{n}$.*

Poznámka 1.1.3. *Pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane je $P(A^C) = 1 - P(A)$.*

Pravdepodobnostným priestorom nazveme trojicu $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

Definícia 1.1.4. *Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Funkciu $X(\omega)$ definovanú na Ω $(\omega \in \Omega)$ budeme nazývať náhodnou premennou vzhľadom na $\mathcal{S}$, ak vzor ľubovoľného intervalu $(-\infty, x)$ je prvkom $\mathcal{S}$, t.j.*

$$\begin{aligned} X^{-1}(-\infty, x) &= \{\omega |\, \omega \in \Omega;\ X(\omega) \in (-\infty, x)\} \\ &= \{\omega |\, \omega \in \Omega;\ X(\omega) < x\} \in S;\ x \in R \end{aligned}$$

Definícia 1.1.5. *Náhodnú premennú X nazývame diskrétnou náhodnou premennou, ak nadobúda konečne veľa alebo spočítateľne veľa reálnych hodnôt čísel.*

Definícia 1.1.6. *Nech náhodná premenná X nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťou $p_i = P[X = x_i]$; $i = 1, 2, \ldots n$. Potom výraz tvaru*

$$E(X) = \sum_i x_i . p_i$$

sa nazýva stredná hodnota diskrétnej náhodnej premennej, ak platí

$$\sum_i |x_i| . p_i < \infty^2$$

.

Poznámka 1.1.7. *Vlastnosti strednej hodnoty náhodnej premennej. X a Y sú náhodné premenné. B a C sú konštanty.*

- $E(C) = C$

[1] $n - m$ elementárnych udalostí nemá za následok nastatie udalosti A

[2] Výraz musí absolútne konvergovať.

- $E(C.X) = C.E(X)$
- $E(B.Y + C.X) = B.E(Y) + C.E(X)$
- $E(X - E(X)) = 0$

Definícia 1.1.8. *Stredná hodnota z funkcie $g(X) = (X - E(X))^k$ sa nazýva centrálnym momentom k-teho rádu.*

$$\mu_k = E\big[(X - E(X))^k\big] = \sum_i (X_i - E(X))^k.p_i$$

Definícia 1.1.9. *Centrálny moment druhého rádu nazývame disperzia náhodnej premennej a označujeme ho $D(X)$:*

$$D(X) = E\big[(X - E(X))^2\big]$$

Poznámka 1.1.10. *Vlastnosti disperzie náhodnej premennej. X a Y sú náhodné premenné. B a C sú konštanty.*

- $D(C) = 0$
- $D(C.X) = C^2.D(X)$
- $D(B.Y + C.X) = B^2.D(Y) + C^2.D(X)$

Veta 1.1.11. *Pre náhodnú premennú X platí*

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

pričom X^2 je náhodná premenná, ktorú nazývame kvadrát náhodnej premennej X.

Väčšinu úloh v tejto práci budeme riešiť s využitím nasledovných dvoch nerovníc. Sú veľmi známe a rozšírené v teórii pravdepodobnosti.

Veta 1.1.12. (Markovova nerovnosť). *Nech X je nezáporná náhodná premenná a nech existuje $E(X)$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$P\big[X \geq \varepsilon\big] \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

Veta 1.1.13. (Čebyševova nerovnosť). *Nech X je nezáporná náhodná premenná a nech existuje $E(X)$ a $D(X)$. Potom pre každé $\delta > 0$ platí*

$$P\big[|X - E(X)| \geq \delta\big] \leq \frac{D(X)}{\delta^2}$$

Poznámka 1.1.14. *Markovovu aj Čebyševovu nerovnosť môžeme pomocou poznámky 1.1.3 nasledovne pozmeniť:*

Markovova nerovnosť. *Ak platí $E(X)/\varepsilon \to 0$, tak*

$$P\big[X < \varepsilon\big] > 1 - \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

Čebyševova nerovnosť. *Ak platí $D(X)/\delta^2 \to 0$, tak*

$$P\big[|X - E(X)| < \delta\big] > 1 - \frac{D(X)}{\delta^2}$$

1.2 Niektoré pojmy z teórie grafov

Definícia 1.2.1. *Nech $k \geq 2, k \in N$. Graf nazveme k-partitný, ak množinu jeho vrcholov dokážeme rozdeliť na k disjunktných množín, ktoré nazývame partície, pričom hrany môžu byť iba medzi vrcholmi z rôznych partícií. Formálnejšie $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$, pričom $\forall i\, V_i \neq \emptyset$ a $\forall i, j; i \neq j; V_i \cap V_j = \emptyset$. Navyše $\forall e = (u, v) \in E(G)$ platí, že ak $u \in V_i \wedge v \in V_j$, tak $i \neq j$.*

Definícia 1.2.2. *Vrchol $v \in V(G)$ nazývame izolovaný, ak $\forall u \in V(G)$ platí $(u, v) \notin E(G)$.*

Definícia 1.2.3. *Hranu $h = (u, v) \in V(G)$ nazývame izolovaná, ak $\forall w, w' \in V(G)$ platí $(w, u) \notin E(G)$ a $(v, w') \notin E(G)$.*

Definícia 1.2.4. *Striedavú postupnosť vrcholov a hrán s nasledovnou vlastnosťou nazývame sledom dĺžky n : $v_0 e_1 v_1 \ldots e_{n-1} v_{n-1} e_n v_n$.*

Definícia 1.2.5. *Ťahom nazývame sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne - t.j. platí: $e_i \neq e_j$ pre $i \neq j$.*

Definícia 1.2.6. *Cestou nazývame ťah, v ktorom sú všetky vrcholy rôzne - t.j. platí* $v_i \neq v_j$ *pre* $i \neq j$.

Definícia 1.2.7. *Kružnicou nazývame ťah, v ktorom sú všetky vrcholy okrem prvého a posledného rôzne a prvý a posledný vrchol sú totožné* [3] *t.j. platí* $v_0 = v_n$ *a pre všetky iné dvojice platí podmienka z definície cesty.*

Definícia 1.2.8. *Nech* $G = (V, E)$. *Počet vrcholov, s ktorými je* $v \in V$ *spojený hranou, nazývame stupeň vrchola* v. *Označujeme ho* $deg_G(v)$.

Definícia 1.2.9. *Nech* $G = (V, E)$. *Maximálny stupeň grafu definujeme ako* $max_{v \in V} deg_G(v)$. *Maximálny stupeň grafu označujeme* $\Delta(G)$.

Definícia 1.2.10. *Nech* $G = (V, E)$. *Minimálny stupeň grafu definujeme ako* $min_{v \in V} deg_G(v)$ *a označujeme* $w(G)$.

Definícia 1.2.11. *Najmenší počet planárnych grafov, zjednotenie ktorých je totožné s grafom* G, *nazývame hrúbka grafu* G *a označujeme* $\theta(G)$.

1.3 Popis použitého modelu

V tejto práci sa budeme zaoberať vlastnosťami k-partitných náhodných grafov. Pre jednoduchosť výpočtov budeme uvažovať iba k-partitné grafy, ktoré majú v každej partícii n vrcholov. Vyjadrime tento model formálnejšie.

Nech $G_{n,k}$ označuje množinu všetkých neorientovaných k-partitných grafov, ktoré majú v každej partícii práve n vrcholov. Vrcholy sú očíslované - $V = \{v_1, v_2, \dots v_{kn}\}$. Každá hrana sa v grafe G bude vyskytovať s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ nezávisle od ostatných hrán. Počet možných hrán v G je $\binom{k}{2}n^2$. Za týchto podmienok tvorí množina $G_{n,k}$ pravdepodobnostný priestor, kde elementárne udalosti sú jednotlivé grafy G z $G_{n,k}$ a pravdepodobodobnosť vzniku daného grafu $G \in G_{n,k}$ je $1/2^{\binom{k}{2}n^2}$.

[3]Kružnica končí v svojom počiatočnom vrchole

Nech $\mathcal{F}$ je niektorá vlastnosť grafu, ktorú graf môže, ale nemusí mať. Množinu všetkých grafov G z $G_{n,k}$, ktoré majú vlastnosť $\mathcal{F}$ označme $G^{\mathcal{F}}_{n,k}$. Skutočnosť, že graf G má vlastnosť $\mathcal{F}$ označme $G \in \mathcal{F}$.

Budeme hovoriť, že takmer všetky grafy majú vlastnosť $\mathcal{F}$, ak platí nasledujúci vzťah.

$$P[G \in \mathcal{F}] = \lim_{n\to\infty} \frac{|G^{\mathcal{F}}_{n,k}|}{|G_{n,k}|} = 1 \tag{1.1}$$

Naopak budeme hovoriť, že takmer žiadny graf nemá vlastnosť $\mathcal{F}$, ak

$$P[G \in \mathcal{F}] = \lim_{n\to\infty} \frac{|G^{\mathcal{F}}_{n,k}|}{|G_{n,k}|} = 0 \tag{1.2}$$

Lema 1.3.1. *Nech X je náhodná premenná určená na množine grafov z $G_{n,k}$ a $E(X) > 0$ pre $n \to \infty$. Ak platí $D(X)/E(X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, potom $P[X = 0] \to 0$ pre takmer všetky grafy $G \in G_{n,k}$.*

Dôkaz. Zrejme pre ľubovoľný graf $G \in G_{n,k}$, pre ktorý $X(G) = 0$ platí vzťah $|X(G) - E(X)| = E(X)$. Využitím Čebyševovej nerovnosti, kde položíme $\delta = E(X)$, dostávame

$$P[X = 0] \leq P\Big[|X - E(X)| \geq E(X)\Big] \leq \frac{D(X)}{E^2(X)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

Teraz ukážeme s akou pravdepodobnosťou je náhodný graf k-partitný.

Veta 1.3.2. *Skoro žiadny graf nie je k-partitný.*

Dôkaz. Nech G_n označuje množinu všetkých grafov z n vrcholmi. Rozdeľme množinu vrcholov V grafu $G \in G_n$ do k disjunktných množín. Teda $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ a pre $\forall i, j; 1 \leq i, j \leq k; i \neq j$ platí $V_i \cap V_j = \emptyset$. $|V_i|$ označme ako t_i.

Označme množinu všetkých možných k-partitných grafov G_k. Skúsme určiť jej mohutnosť. Aby bol graf G k-partitný, nemôže mať v rámci partícií žiadne hrany. Teda môže mať maximálne $t_1.t_2\dots.t_k$ hrán. Tento výraz nadobúda maximum pre $t_i = \frac{n}{k}$. Partície môžeme vybrať k^n spôsobmi.[4] Z predchádzajúceho vidno, že

$$\begin{aligned} |G_k| &\leq \sum_{G \in G_{n,k}} 2^{\binom{k}{2}(\frac{n}{k})^2} \\ &= k^n.2^{\binom{k}{2}(\frac{n}{k})^2} \end{aligned}$$

Keď porovnáme počet k-partitiných grafov s všetkými grafmi dostávame

$$\begin{aligned} \frac{|G_k|}{|G_n|} &\leq \frac{k^n.2^{\binom{k}{2}(\frac{n}{k})^2}}{2^{\binom{n}{2}}} \\ &= k^n.2^{\binom{k}{2}(\frac{n}{k})^2-\binom{n}{2}} \\ &= k^n.2^{-kn^2+4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Podľa definície 1.2 dostávame platnosť tvrdenia.

$\square$

1.4 Kombinatorické odhady

- **Stirlingova aproximácia faktoriálu**

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\Big) \tag{1.3}$$

- Pre $n \to \infty$, $x \to \infty$ a $\frac{x^3}{\sqrt{n}} \to 0$ platí

$$\sum_{\frac{n}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{n}\leq s\leq n} \binom{n}{s} = \sum_{0\leq s\leq \frac{n}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{n}\leq s} \binom{n}{s} \sim \frac{2^n}{x\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.4}$$

[4] Pri týchto výberoch uvažujeme aj možnosti, keď v niektorých partíciách nebudú vrcholy - čiže nevzniknú k-partitné grafy. Môžeme si to však dovoliť, lebo pre naše potreby nám stačí odhad zhora.

- Pre kombinačné čísla platia tieto rovnosti

  1.
$$\sum_k \binom{n}{k} = 2^n \tag{1.5}$$

  2.
$$\sum_k \binom{n}{2k} = \sum_k \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} \tag{1.6}$$

Kapitola 2

Základné vlastnosti k-partitného náhodného grafu

V tejto kapitole bližšie preskúmame niektoré základné vlastnosti k-partitných náhodných grafov, aby sme získali lepšiu predstavu o ich štruktúre. Budeme pracovať' s pravdepodobnostným priestorom, v ktorom grafy obsahujú danú hranu s pravdepodobnost'ou 1/2.

2.1 Izolovanost' vrcholov a počet hrán

Lema 2.1.1. *Nech $I(G)$ je náhodná premenná určujúca počet izolovaných vrcholov v grafe $G \in G_{n,k}$. Potom jej strednú hodnotu môžeme vyjadrit' nasledovne:*

$$E(I) = \tfrac{k.n}{2^{(k-1).n}}$$

Dôkaz. Označme množinu grafov, ktorých j-ty vrchol je izolovaný ako $G(j)$. Sumu cez všetky grafy z $G_{n,k}$, ktorú dostaneme z definície strednej hodnoty $E(I)$, nahradíme sumou cez všetky vrcholy, pričom sa budeme zaujímat' o počet grafov, ktoré obsahujú daný izolovaný vrchol.

$$
\begin{aligned}
E(I) &= \sum_{G_i \in G_{n,k}} I(G_i).P(G_i) \\
&= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}} \sum_{G_i \in G_{n,k}} I(G_i) \\
&= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}} \sum_{j=1}^{k.n} |G(j)| \\
&= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.2^{\binom{k}{2}n^2}.kn.2^{-(k-1)n} \\
&= \frac{k.n}{2^{(k-1).n}}
\end{aligned}
$$

□

Lemu využijeme v nasledujúcej vete.

Veta 2.1.2. *Takmer žiadny graf z $G_{n,k}$ neobsahuje izolované vrcholy.*

Dôkaz. Použijeme Markovovu nerovnosť s $\varepsilon = 1$.

$$P[I(G) < 1] > 1 - E(I) = 1 - \frac{k.n}{2^{(k-1).n}}$$

Výraz $\frac{k.n}{2^{(k-1).n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ a teda $P[I(G) < 1] \to 1$. To ale znamená, že takmer žiadny graf neobsahuje izolované vrcholy.

□

Podobným spôsobom môžeme určiť počet hrán náhodného grafu z $G_{n,k}$.

Veta 2.1.3. *Nech $\mathcal{H}(G)$ je náhodná premenná označujúca počet hrán grafu $G \in G_{n,k}$. Potom $\mathcal{H}$ môžeme ohraničiť nasledovne:*

$$\binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{n}}\right) < \mathcal{H}(G) < \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4}{n}}\right)$$

Dôkaz. Označme množinu grafov $G \in G_{n,k}$, ktoré obsahujú j-tu hranu ako $G(j)$. Potom platí $|G(j)| = 2^{\binom{k}{2}n^2-1}$. [1] Podobne ako v predchádzajúcej leme nahradíme sumu cez všetky grafy z $G_{n,k}$ sumou cez všetky hrany.

[1]Lebo j-ta hrana v nich určite je a ostatné hrany sa v nich môžu, ale nemusia vyskytovať.

$$
\begin{aligned}
E(\mathcal{H}) &= \sum_{G_i \in G_{n,k}} \mathcal{H}(G_i).P(G_i) \\
&= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}}.\sum_{j=1}^{\binom{k}{2}n^2} |G(j)| \\
&= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.\binom{k}{2}.n^2.2^{\binom{k}{2}n^2-1} \\
&= \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}
\end{aligned}
$$

V ďalšom výpočte budeme potrebovať aj disperziu $D(\mathcal{H})$. Nech $\mathcal{H}^2(G)$ je náhodná premenná, určujúca počet dvojíc hrán v grafe $G \in G_{n,k}$. Označme množinu všetkých grafov, ktoré obsahujú hrany i a j ako $G(i,j)$. Vypočítajme strednú hodnotu $\mathcal{H}^2(G)$.

$$
\begin{aligned}
E(\mathcal{H}^2(G)) &= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}}.\sum_{i=1}^{\binom{k}{2}n^2}\sum_{j=1}^{\binom{k}{2}n^2} |G(i,j)| \\
&= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.\left(\binom{k}{2}^2 n^4 - \binom{k}{2}n^2\right).2^{\binom{k}{2}n^2-2} + 2^{-\binom{k}{2}n^2}.\binom{k}{2}n^2 2^{\binom{k}{2}n^2-1}
\end{aligned}
$$

Poslednú rovnosť sme dostali rozobratím nasledovných prípadov:

- Ak $i \neq j$, tak je $\binom{k}{2}n^2$ možností na výber prvej hrany a $\binom{k}{2}n^2 - 1$ možností na výber druhej hrany, pričom $\left(\binom{k}{2}n^2\right).\left(\binom{k}{2}n^2-1\right) = \binom{k}{2}^2 n^4 - \binom{k}{2}n^2$. Predchádzajúci vzťah musíme ešte prenásobiť $2^{\binom{k}{2}n^2-2}$, lebo dve hrany sú určené pevne a ostatné môžu a nemusia vzniknúť.

- Ak $i = j$, tak je $\binom{k}{2}n^2$ možností na výber hrany a táto jedna hrana je pevne určená .

$D(\mathcal{H})$ potom nadobúda nasledovnú hodnotu:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{H}) &= E(\mathcal{H}^2) - E^2(\mathcal{H}) \\ &= \binom{k}{2}^2 \frac{n^4}{4} - \binom{k}{2}\frac{n^2}{4} + \binom{k}{2}\frac{n^2}{2} - \binom{k}{2}^2\frac{n^4}{4} \\ &= \binom{k}{2}\frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

Na odhad počtu hrán použijeme Čebyševovu nerovnosť:

$$P\big[|\mathcal{H}(G) - E(\mathcal{H})| < \delta\big] > 1 - \frac{D(\mathcal{H})}{\delta^2}$$

Po dosadení dostávame

$$P\left[\left|\mathcal{H}(G) - \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\right| < \delta\right] > 1 - \frac{\binom{k}{2}\frac{n^2}{4}}{\delta^2}$$

Chceme, aby sa predchádzajúca pravdepodobnosť blížila k 1. Takže musí platiť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{k}{2}\frac{n^2}{4}}{\delta^2} = 0$. Na splnenie danej limity nám stačí zvoliť $\delta = \binom{k}{2}n^{\frac{3}{2}}$.

$$\left|\mathcal{H}(G) - \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\right| < \binom{k}{2}n^{\frac{3}{2}}$$

Po rozpísaní poslednej nerovnice a následnej úprave dostávame znenie vety:

$$\begin{aligned} \binom{k}{2}\frac{n^2}{2} - \binom{k}{2}\sqrt{n^3} \quad &< \mathcal{H}(G) < \quad \binom{k}{2}\frac{n^2}{2} + \binom{k}{2}\sqrt{n^3} \\ \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{n}}\right) \quad &< \mathcal{H}(G) < \quad \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4}{n}}\right) \end{aligned}$$

□

Dôsledok 2.1.4. *Pre takmer všetky grafy $G \in G_{n,k}$ platí nerovnosť*

$$\theta(G) > \frac{(k-1)n}{12}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{n}}\right)$$

Dôkaz. Z vety 2.1.3 vyplýva, že takmer všetky grafy z $G_{n,k}$ obsahujú viac ako $\binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}}\right)$ hrán. Na druhej strane z teórie grafov vieme, že planárny graf s kn vrcholmi môže obsahovať maximálne $3kn-6$ hrán. Tým dostávame vzťah pre hrúbku

$$\begin{aligned}
\theta(G) &> \frac{\binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}}\right)}{3kn-6} \\
&= \frac{kn}{12(kn-2)}(k-1)n\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}}\right) \\
&> \frac{(k-1)n}{12}\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}}\right)
\end{aligned}$$

□

2.2 Súvislosť

Ďalšou vlastnosťou, o ktorú sa budeme zaujímať je súvislosť.

Veta 2.2.1. *Takmer všetky grafy z $G_{n,k}$ sú súvislé*

Dôkaz. Označme množinu všetkých grafov z $G_{n,k}$, ktoré majú aspoň jeden komponent súvislosti s t vrcholmi ako $G_{n,k}(t)$. Môžeme si všimnúť, že graf $G \in G_{n,k}$ je nesúvislý $\iff$ keď má aspoň jeden komponent súvislosti s $t \leq \lfloor \frac{k.n}{2} \rfloor$ vrcholmi. Ďalej označme množinu súvislých grafov z $G_{n,k}$ ako $S_{n,k}$. Z predchádzajúceho ľahko vidno, že platí: $G_{n,k} - S_{n,k} \subseteq \bigcup_{t=1}^{\lfloor \frac{k.n}{2} \rfloor} G_{n,k}(t)$, a teda platí aj:

$$|G_{n,k}| - |S_{n,k}| \leq \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{k.n}{2} \rfloor} |G_{n,k}(t)| \tag{2.1}$$

Odhadnime $|G_{n,k}(t)|$ zhora:
Rozdeľme množinu vrcholov V na 2 podmnožiny V_1 a V_2, pre ktoré platia

nasledovné rovnosti:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \\ \emptyset &= V_1 \cap V_2 \\ |V_1| &= t \\ |V_2| &= kn - t \end{aligned}$$

Na rozdelenie V do V_1 a V_2 máme $\binom{kn}{t}$ možností. Vypočítajme teraz počet možných grafov pre dané rozdelenie. Nech je počet vrcholov množiny V_1 patriacich prvému komponentu t_1, počet vrcholov množiny V_1 patriacich druhému komponentu t_2, atď'. Teda platí: $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$. Pre jednoduchost' zápisu zavedieme funkciu $h(V_i)$ $(i = 1, 2)$, ktorá vyjadruje počet hrán vychádzajúcich z vrcholov množiny V_i.

Funkcia $h(V_i)$ počíta každú hranu v grafe G dvakrát, a preto počet hrán v G dostaneme ako $\frac{h(V_1)+h(V_2)}{2}$. Výsledný počet možných grafov pre dané rozdelenie bude

$$2^{\frac{h(V_1)+h(V_2)}{2}}$$

Štruktúra $G_{n,k}$ nás núti, aby hrany vrámci V_i boli iba medzi rôznymi komponentami. To určuje tvar nasledovných vzorcov.

$$\begin{aligned} h(V_1) &= t_1.\underbrace{(t_2 + t_3 + \ldots + t_k)}_{t-t_1} + t_2.\underbrace{(t_1 + t_3 + \ldots + t_k)}_{t-t_2} + \ldots + t_k.\underbrace{(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1})}_{t-t_k} \\ &= (t_1.t + t_2.t + \ldots + t_k.t) - (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_k^2) \\ &= t.\underbrace{(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)}_{t} - (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_k^2) \\ &= t^2 - (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_k^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(V_2) &= (n-t_1)\underbrace{(n-t_2+\ldots+n-t_k)}_{(k-1)n-t+t_1}+\ldots+\\
&\quad +(n-t_k)\underbrace{(n-t_1+n-t_2+\ldots+n-t_{k-1})}_{(k-1)n-t+t_k}\\
&= \underbrace{(k-1).n^2-tn-t_1((k-2)n-t)-t_1^2}_{\text{Prvý člen}}+\ldots+\\
&\quad +\underbrace{(k-1).n^2-tn-t_k((k-2)n-t)-t_k^2}_{\text{Posledný člen}}\\
&= kn.((k-1)n-t)-((k-2)n-t)(t_1+t_2+\ldots+t_k)-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)\\
&= kn.((k-1)n-t)-(k-2)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)\\
&= kn.((k-1)n-2t)-2nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)
\end{aligned}
$$

Teda počet všetkých možných grafov pre dané rozdelenie je:

$$2^{\binom{k}{2}n^2-(k+1)nt-nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}$$

Teraz môžeme určiť aj $|G_{n,k}(t)|$:

$$|G_{n,k}(t)| = \binom{kn}{t}.2^{\binom{k}{2}n^2-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}$$

Po dosadení do vzťahu (2.1) dostávame:

$$
\begin{aligned}
|S_{n,k}| &\geq |G_{n,k}| - \sum_{t=1}^{\lfloor\frac{k.n}{2}\rfloor}\binom{kn}{t}.2^{\binom{k}{2}n^2-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}\\
\frac{|S_{n,k}|}{|G_{n,k}|} &\geq 1-\frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{2^{\binom{k}{2}n^2}}.\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{k.n}{2}\rfloor}\binom{kn}{t}.2^{-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}
\end{aligned}
$$

Označme výraz $\binom{kn}{t}.2^{-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}$ ako $f(t)$. Môžeme si všimnúť, že pre $t \in \left\langle 1, \lfloor\frac{k.n}{2}\rfloor\right\rangle$ platí $\frac{f(t+1)}{f(t)} < 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t+1)}{f(t)} &= \frac{\binom{kn}{t+1}.2^{-(k+1)n(t+1)+(t+1)^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+(t_i+1)^2+\ldots+t_k^2)}}{\binom{kn}{t}.2^{-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_i^2+\ldots+t_k^2)}} \quad (2.2)\\
&= \frac{(kn-t)}{(t+1)}.2^{-(k+1)n-2t_i+2t} \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

Majme jedno z rozdelení vrcholov do množín V_1 a V_2 vo funkcii $f(t+1)$. Nech sa $(t+1)$-vý vrchol z množiny V_1 v tomto rozdelení nachádza v i-tej partícii.[2] Tento predpoklad využijeme vo vzt'ahu $(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + (t_i+1)^2 + \ldots + t_k^2)$ v čitateli výrazu (2.2).

Vzt'ah (2.3) nadobúda pre $t \in \left\langle 1, \lfloor \frac{k.n}{2} \rfloor \right\rangle$ hodnoty menšie ako 1, a teda všetky $f(t)$ môžeme zhora odhadnút' pomocou $f(1)$. Teda:

$$
\begin{aligned}
\frac{|S_{n,k}|}{|G_{n,k}|} &\geq 1 - \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{k.n}{2} \rfloor} \binom{kn}{t}.2^{-(k+1)nt+t^2-(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_k^2)}\\
&\geq 1 - \frac{kn}{2}.f(1)\\
&= 1 - k^2n^2.2^{-(k+1)n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1
\end{aligned}
$$

Poslednú rovnost' sme dostali dosadením za $f(1)$. Predpokladali sme, že jediný vrchol v množine V_1 sa pre $f(1)$ nachádza v j-tej partícii.[3]

Fakt, že $\frac{|S_{n,k}|}{|G_{n,k}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ dokazuje podl'a vzt'ahu (1.1) naše tvrdenie.

□

2.3 Eulerovskost'

Lema 2.3.1. *Skoro všetky grafy z $G_{n,k}$ obsahujú vrchol s nepárnym stupňom.*

[2]Tento predpoklad je určený rozdelením vrcholov medzi množiny V_1 a V_2. Pre iné rozdelenie vrcholov môže byt' $(t+1)$-vý vrchol v inej partícii, a preto uvažujeme všeobecne o i-tej partícii.

[3]Podobne ako vo výraze (2.2) aj tu je tento predpoklad závislý od daného rozdelenia vrcholov medzi množiny V_1a V_2, a preto uvažujeme všeobecne o j-tej partícii.

Dôkaz. Nech náhodná premenná $\mathcal{N}(G)$ vyjadruje počet vrcholov s nepárnym stupňom v grafe G. Pri určovaní jej strednej hodnoty použijeme pomocnú náhodnú premennú $X_v^{nep}(G)$, ktorá nadobúda nasledovné hodnoty.

$$\begin{aligned} X_v^{nep}(G) = 1 &\qquad \text{ak } v \in G_{n,k} \text{ a má nepárny stupeň} \\ X_v^{nep}(G) = 0 &\qquad \text{inak} \end{aligned}$$

Stredná hodnota $X_v^{nep}(G)$ sa rovná pravdepodobnosti prípadu, že vrchol v má v grafe G nepárny stupeň.[4] Nech $G_v(j)$ je množina všetkých grafov, v ktorých má vrchol v stupeň j.

$$\begin{aligned} E(X_v^{nep}) &= P\big[v \in V(G) \text{ a má nepárny stupeň}\big] \\ &= 2^{-\binom{k}{2}n^2} . \sum_{j \bmod 2 = 1} |G_v(j)| \\ &= 2^{-\binom{k}{2}n^2} . \sum_{h=0}^{(k-1)n} \binom{(k-1)n}{2h+1} . 2^{\binom{k}{2}n^2 - (k-1)n} && (2.4) \\ &= 2^{-(k-1)n} . 2^{(k-1)n-1} = \frac{1}{2} && (2.5) \end{aligned}$$

Vzt'ah (2.4) dostávame pomocou nasledovných úvah - z $(k-1)n$ hrán, ktoré môžu incidovat' s v vyberieme $2h+1$, ktoré s ním naozaj incidovat' budú. To určí stupeň vrchola. Ostatné hrany dourčíme $2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n}$ spôsobmi. Vo vzt'ahu (2.5) sme využili vzorec (1.6).

Teraz vypočítajme $E(\mathcal{N})$

$$\begin{aligned} E(\mathcal{N}) &= E\Big(\sum_{v \in G_{n,k}} X_v^{nep}\Big) \\ &= \sum_{v \in G_{n,k}} E(X_v^{nep}) \\ &= \frac{kn}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \end{aligned}$$

[4] Je to spôsobené tým, že nadobúda iba hodnoty 0 a 1.

Platnosť $E(\mathcal{N})\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, nehovorí nič o pravdepodobnosti $P\big[\mathcal{N} \geq 1\big]$. Môže totiž nastať prípad, že pre pár grafov G je $\mathcal{N}(G)$ vysoké a pre ostatné grafy G' bude platiť $\mathcal{N}(G') = 0$. Aby sme dokázali, že v našom prípade táto situácia nenastala, musíme vypočítať disperiziu $D(\mathcal{N})$, ktorá určuje odchýlku $\mathcal{N}$ od strednej hodnoty $E(\mathcal{N})$. Použitím lemy 1.3.1 ukážeme, že vyššie opísaná situácia nenastane, a teda platí naše tvrdenie. Na to, aby sme mohli použiť lemu 1.3.1 však potrebujeme splniť jej predpoklady - pre $n \to \infty$ musí platiť vzťah $\frac{D(\mathcal{N})}{E(\mathcal{N})^2} \to 0$. Na určenie $D(\mathcal{N})$ je potrebné vypočítať strednú hodnotu kvadrátu náhodnej premennej $\mathcal{N}$ (podľa poznámky 1.1.11). Nech $\mathcal{N}^2(G)$ vyjadruje počet dvojíc vrcholov s nepárnym stupňom v grafe G. Majme pomocnú náhodnú premennú $X_{u,v}^{nep}(G)$, ktorá bude nadobúdať nasledovné hodnoty:

$$\begin{aligned} X_{u,v}^{nep}(G) = 1 \qquad & \text{ak } u \text{ aj } v \text{ má nepárny stupeň} \\ X_{u,v}^{nep}(G) = 0 \qquad & \text{inak} \end{aligned}$$

Jej strednú hodnotu vyjadríme podľa toho, v akom vzťahu sú u a v.

- Ak $u = v$, tak platí

$$E(X_{u,v}^{nep}) = E(X_v^{nep}) = \frac{1}{2}$$

- Ak $u \neq v$, ale sú v rovnakej partícii, tak výbery incidentných hrán pre oba vrcholy sú úplne nezávislé a platí

$$\begin{aligned} E(X_{u,v}^{nep}) &= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}} . \sum_{i=0}^{(k-1)n} \binom{(k-1)n}{2i+1} . \sum_{j=0}^{(k-1)n} \binom{(k-1)n}{2j+1} . 2^{\binom{k}{2}n^2 - 2(k-1)n} \\ &= 2^{(k-1)n-1} . 2^{(k-1)n-1} . 2^{-2(k-1)n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Ak $u \neq v$ a sú v rôznych partíciách, tak môžu byť spojené hranou - výbery hrán od seba závisia, a teda platí

$$
\begin{aligned}
E(X_{u,v}^{nep}) &= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}}.\Bigg(\sum_{a=0}^{(k-1)n-1}\binom{(k-1)n-1}{2a+1}.\sum_{b=0}^{(k-1)n-1}\binom{(k-1)n-1}{2b+1}\Bigg) \\
&+ \Bigg(\sum_{c=0}^{(k-1)n-1}\binom{(k-1)n-1}{2c}.\sum_{d=0}^{(k-1)n-1}\binom{(k-1)n-1}{2d}\Bigg).2^{\binom{k}{2}n^2-2(k-1)n+1} \\
&= \frac{1}{2^{\binom{k}{2}n^2}}.2.2^{(k-1)n-2}.2^{(k-1)n-2}.2^{\binom{k}{2}n^2-2(k-1)n+1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

V danom grafe najprv určíme, či je medzi u a v hrana. Ak je, tak pre u a v vyberieme párny počet ďalších hrán. Musíme si uvedomiť, že je o jednu možnosť výberu hrany menej (hrana (u, v) je už určená). Naopak ak medzi u a v hrana nie je, tak vyberieme nepárny počet hrán pre u aj v.

Teraz ľahko určíme strednú hodnotu $E(\mathcal{N}^2)$

$$
\begin{aligned}
E(\mathcal{N}^2) &= E\Big(\sum_{u,v\in G_{n,k}} X_{u,v}^{nep}\Big) \\
&= \sum_{u,v\in G_{n,k}} E(X_{u,v}^{nep}) \qquad (2.6)\\
&= \frac{1}{2}kn + \frac{1}{4}k\binom{n}{2}.2 + \frac{1}{4}\binom{k}{2}.2n^2 \\
&= \frac{k^2n^2+kn}{4}
\end{aligned}
$$

Na výber jedného vrchola máme totiž kn možností, na výber dvoch vrcholov z rovnakej partície máme $k\binom{n}{2}.2$ možností a na výber vrcholov z rôznych partícií máme $\binom{k}{2}n^2.2$ možností.[5]
Teraz skúsme, či $\mathcal{N}$ spĺňa predpoklady lemy 1.3.1.

[5] V sume vo vzorci (2.6) sa totiž zaujímame aj o poradie v akom sú u a v vybraté. Preto sme museli dané dva sčítance prenásobiť dvomi.

$$
\begin{aligned}
P[\mathcal{N}=0] &\leq \frac{D(\mathcal{N})}{E^2(\mathcal{N})} \\
&= \frac{4.(k^2n^2+kn-k^2n^2)}{4.k^2n^2} \\
&= \frac{kn}{k^2n^2} \\
&= \frac{1}{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Predpoklady lemy 1.3.1 sú splnené a teda naše tvrdenie platí.

□

Ako dôsledok lemy dostávame dôležitejšie tvrdenie.

Veta 2.3.2. *Takmer žiadny graf z $G_{n,k}$ nie je eulerovský.*

Dôkaz. Z teórie grafov vieme, že graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a všetky jeho vrcholy majú párny stupeň. Z lemy 2.3.1, však vieme, že takmer všetky grafy $G \in G_{n,k}$ majú aspoň jeden vrchol s nepárnym stupňom, a preto nemôžu byť eulerovské.

□

2.4 Stupne vrcholov

Veta 2.4.1. *Pre skoro každý graf $G \in G_{n,k}$ platí*

$$
\begin{aligned}
\Delta(G) &< \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&- \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}
$$

kde $\varphi(n)$ je ľubovoľná funkcia, ktorá sa pre $n \to \infty$ blíži k ∞ a platí $\varphi(n) = o(\ln\ln(k-1)n)$.

Dôkaz. Nech $G_{v,t}$ je množina grafov, ktoré majú stupeň vrchola v rovný t.

$$|G_{v,t}| = \binom{(k-1)n}{t} 2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n}$$

Nech G_{v,t_0} je množina grafov, v ktorých má vrchol v stupeň aspoň t_0. Označme množinu takýchto grafov G_{v,t_0}. Ľahko vidno, že

$$\begin{aligned}
|G_{v,t_0}| &\leq \sum_{t=t_0}^{(k-1)n} |G_{v,t}| \\
&= \sum_{t=t_0}^{(k-1)n} \binom{(k-1)n}{t} 2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n} \\
&= 2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n} \sum_{t=t_0}^{(k-1)n} \binom{(k-1)n}{t}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Na výpočet výrazu (2.7) použijeme upravený vzorec (1.4)

$$\sum_{\frac{(k-1)n}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{(k-1)n}\leq s\leq (k-1)n} \binom{(k-1)n}{s} \sim \frac{2^{(k-1)n}}{x\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.8}$$

Tento vzorec platí iba pre $x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ a pre $\frac{x^3}{\sqrt{(k-1)n}} \to 0$. Existuje viacero výrazov, ktoré spĺňajú tieto podmienky. Aby sme určili čo najpresnejšie ohraničenie pre $\Delta(G)$, potrebujeme vybrať najmenší z nich. Nech $\varphi(n)$ je ľubovoľná funkcia, pre ktorú platí $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ a $\varphi(n) = o(\ln\ln(k-1)n)$. Budeme uvažovať

$$x = \sqrt{2\ln(k-1)n} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\ln(k-1)n}}$$

Tento výraz spĺňa podmienky pre vzorec (2.8) a teda platí

$$
\begin{aligned}
|G_{v,t_0}| &\sim 2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n}.\frac{2^{(k-1)n}}{x\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{x\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\sim \frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{\sqrt{2\pi}}.\frac{\sqrt{\ln{(k-1)n}}\sqrt{\ln{(k-1)n}}}{(k-1)n\big(\sqrt{2}\ln{(k-1)n}-\frac{1}{4}\ln\ln(k-1)n+\varphi(n)\big).e^{\varphi(n)\sqrt{2}}} \\
&\sim \frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{2(k-1)n\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Nech G_{t_0} je množina všetkých grafov, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol so stupňom aspoň t_0 (tieto grafy majú $\Delta(G) \geq t_0$). Z predchádzajúceho vidno, že

$$
\begin{aligned}
|G_{t_0}| &\sim kn.\frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{2(k-1)n\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}} \\
&= 2^{\binom{k}{2}n^2}.\frac{k}{2(k-1)\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Porovnajme teraz počet týchto grafov so všetkými možnými grafmi:

$$
\begin{aligned}
\frac{|G_{t_0}|}{|G_{n,k}|} &\sim 2^{\binom{k}{2}n^2}.\frac{k}{2(k-1)\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}}.2^{-\binom{k}{2}n^2} \\
&= \frac{k}{2(k-1)\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Takmer všetky grafy teda majú $\Delta(G) < t_0$ pre dané x. Teraz už len určíme t_0. Zo vzorca (2.8) vidno

$$
\begin{aligned}
t_0 &= \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{x}{2}\sqrt{(k-1)n} \\
&= \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
- &\quad \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}
$$

čo dokazuje vetu.

$\square$

Podobným spôsobom môžeme ohraničiť aj minimálny stupeň grafu $\omega(G)$.

Veta 2.4.2. *Pre skoro každý graf $G \in G_{n,k}$ platí*

$$
\begin{aligned}
\omega(G) &> \frac{1}{2}(k-1)n - \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
+ &\quad \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n - \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}
$$

kde $\varphi(n)$ je ľubovoľná funkcia, ktorá sa pre $n \to \infty$ blíži k ∞ a platí $\varphi(n) = o(\ln\ln(k-1)n)$.

Dôkaz. Nech G'_{v,t_0} je množina grafov, v ktorých má vrchol v stupeň menší ako t_0. Podobne ako v predchádzajúcej vete platí

$$
|G'_{v,t_0}| = 2^{\binom{k}{2}n^2-(k-1)n}\sum_{t=0}^{t_0}\binom{(k-1)n}{t}
$$

Tento výraz opäť odhadneme pomocou upraveného vzorca (1.4).

$$
\sum_{0\le s\le \frac{(k-1)n}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{(k-1)n}} \binom{(k-1)n}{s} \sim \frac{2^{(k-1)n}}{x\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.9}
$$

Pre dosiahnutie najpresnejšieho odhadu pre $\omega(G)$ musíme využiť čo najmenšie[6] x, ktoré splní podmienky $x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ a $\frac{x^3}{\sqrt{(k-1)n}} \to 0$. Opäť využijeme

[6]Chceme totiž, aby sme dostali najväčší možný odhad $\omega(G)$. Vo vzorci 2.9 sa x odčítava, takže ho potrebujeme minimalizovať'.

$$x = \sqrt{2\ln(k-1)n} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\ln(k-1)n}}$$

pričom $\varphi(n)$ je ľubovoľná funkcia, pre ktorú platí $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ a $\varphi(n) = o(\ln\ln(k-1)n)$.

Rovnako ako v predchádzajúcej vete určíme

$$|G'_{v,t_0}| \sim \frac{2^{\binom{k}{2}n^2}}{2(k-1)n\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}}$$

a následne aj

$$|G'_{t_0}| \sim 2^{\binom{k}{2}n^2}.\frac{k}{2(k-1)\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}}$$

kde G'_{t_0} je množina všetkých grafov, ktoré majú minimálny stupeň vrcholov menší ako t_0. Keďže

$$\frac{|G'_{t_0}|}{|G_{n,k}|} \sim \frac{k}{2(k-1)\sqrt{\pi}}.e^{-\varphi(n)\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

tak môžeme povedať, že takmer žiadny graf neobsahuje vrcholy so stupňom menším alebo rovným t_0.

Ostáva nám určiť t_0. Urobíme to pomocou vzorca (2.9).

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{(k-1)n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{(k-1)n} \\
&= \frac{1}{2}(k-1)n - \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&+ \quad \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n - \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}$$

□

Dôsledok 2.4.3. *Vety 2.4.1 a 2.4.2 okrem iného ukazujú, že vrcholy takmer všetkých grafov $G \in G_{n,k}$ majú stupeň ohraničený nasledovnými nerovnosťami*

$$\begin{aligned}
deg_G(v) &< \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&- \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}} \\
deg_G(v) &> \frac{1}{2}(k-1)n - \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&+ \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n - \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}$$

2.5 Cesty a kružnice v k-partitnom grafe

Veta 2.5.1. *Skoro žiadny graf z $G_{n,k}$ neobsahuje viac ako $n^3.\ln n$ ciest dĺžky 2.*

Dôkaz. Nech náhodná premenná $C_2(G)$ vyjadruje počet ciest dĺžky 2 v grafe $G \in G_{n,k}$ a nech $G_n(C)$ je množina všetkých grafov, ktoré obsahujú cestu C. Potom:

$$\begin{aligned}
E(C_2) &= \sum_{G_i \in G_{n,k}} C_2(G_i).P(G_i) \\
&= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.\sum_C |G_n(C)| \\
&= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.2^{\binom{k}{2}n^2-2}.\frac{1}{2}kn.(k-1)n.((k-2)n+(n-1)) \quad (2.10) \\
&= \binom{k}{2}\frac{n^2}{4}((k-1)n-1) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Pre vytvorenie vzorca v rovnici (2.10) sme zohľadnili nasledujúce fakty:

- Dve hrany sú pevne určené a ostatné môžu, ale nemusia vzniknúť: $2^{\binom{k}{2}n^2-2}$
- Vzorec počíta každú cestu 2-krát (z oboch smerov), a preto ho musíme vydeliť dvoma.
- Na výber prvého a druhého vrchola, medzi ktorými bude prvá hrana cesty je $kn.(k-1)n$ možností (lebo nám stačí iba vybrať dve partície a dva vrcholy v nich)
- Výber tretieho vrchola je zložitejší, lebo buď vyberieme tretiu partíciu, alebo sa vrátime pri tomto výbere do prvej partície. Z toho vyplýva vzorec $((k-2)n+(n-1))$

Po použití Markovovskej nerovnosti s $\varepsilon = n^3 \ln n$ a rovnosti (2.11) dostávame:

$$P[C_2 \geq n^3 \ln n] \leq \frac{\binom{k}{2}(k-1)}{4\ln n} - \frac{\binom{k}{2}}{4n\ln n}$$

Pre $n \to \infty$ nadobúda posledný výraz hodnotu 0 a teda pravdepodobnosť, že v grafe G je viac ako $n^3 \ln n$ hrán je 0.

$\square$

Veta 2.5.2. *Skoro žiadny graf z $G_{n,k}$ neobsahuje viac ako $n^3 \ln n$ kružníc dĺžky 3.*

Dôkaz.

Nech náhodná premenná $K_3(G)$ vyjadruje počet kružníc dĺžky 3 v grafe $G \in G_{n,k}$ a nech je množina $G_n(K)$ zložená z grafov, ktoré obsahujú kružnicu K. Potom:

$$\begin{aligned} E(K_3) &= \sum_{G_i \in G_{n,k}} K_3(G_i).P(G_i) \\ &= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.\sum_K |G_n(K)| \\ &= 2^{-\binom{k}{2}n^2}.2^{\binom{k}{2}n^2-3}.\binom{k}{3}n^3 \qquad (2.12) \\ &= \binom{k}{3}\frac{n^3}{8} \qquad (2.13) \end{aligned}$$

Vzt'ahy v rovnici (2.12) dostávame z nasledovného:

- Tri hrany sú pevne určené a ostatné môžu, ale nemusia vzniknút':

$$2^{\binom{k}{2}n^2-3}$$

- Na výber troch vrcholov tvoriacich kružnicu nám treba $\binom{k}{3}n^3$ hrán (lebo štruktúra nášho modelu nás núti, aby každý z týchto vrcholov bol v inej partícii).

Použijeme Makrovovskú nerovnost' s $\varepsilon = n^3 \ln n$ a vzt'ahom (2.13):

$$P[K_3 \geq n^3 \ln n] \leq \frac{\binom{k}{3}n^3}{8n^3 \ln n} = \frac{\binom{k}{3}}{8 \ln n}$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade sa posledná rovnost' pre $n \to \infty$ blíži k 0, čo dokazuje naše tvrdenie.

$\square$

Kapitola 3

Zovšeobecnený pravdepodobnostný priestor

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom - hrany budú v grafoch obsiahnuté s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$. Pravdepodobnosť, s ktorou daná hrana nie je obsiahnutá v grafe G, označíme q. Ľahko vidno, že $q = 1-p$. Tento pravdepodobnostný priestor budeme označovať $G_{n,k,p}$.

Uvažujme dve konštantné pravdepodobnosti p a p', s ktorými sú hrany obsiahnuté v grafe G. Zisťujeme, že pre p a p' platia rovnaké tvrdenia. Tento fakt by nás mohol priviesť k názoru, že vlastnosti náhodných grafov nezávisia na pravdepodobnosti vzniku hrán. Nie je to však celkom pravda. Pri konštatných rozdieloch pravdepodobností sa zmeny neprejavia. Vlastnosti grafov sa menia až pre pravdepodobnosti, ktoré sa s $n \to \infty$ blížia k 0. Fakt, že konštantná zmena pravdepodobnosti nezmení vlastnosti grafov je prirodzený, lebo keď sa pozrieme na dôkazy z predchádzajúcej kapitoly, zistíme, že hodnoty stredných hodnôt a disperzií náhodných premenných použitých pri výpočtoch boli asymptotické a záviseli od $n \to \infty$. Preto rozdiel v konštantách nemohol radikálne zmeniť výsledok.

V ďalšom texte sa teda budeme zaoberať pravdepodobnosťami vzniku hrán, ktoré závisia od n. Formálne budeme písať, že pravdepodobnosť vzniku hrán je funkcia $p(n)$. Pozrime sa teda, ako sa menia vlastnosti vzhľadom na použitú pravdepodobnosť. Vo všeobecných grafoch s n vrcholmi sa v závislosti na n postupne objavujú jednotlivé vlastnosti a v literatúre sa často tento jav prirovnáva k evolúcii organizmov. Pri $p(n) = n^{-2}$ sa v náhodných grafoch objavujú prvé hrany a pri pravdepodobnosti $\sqrt{n}.n^{-2}$ majú grafy skoro určite komponent s viac ako dvomi vrcholmi. Postupne vznikajú aj ďalšie komponenty a rastú do stromov. Pri pravdepodobnosti n^{-1} sa objavujú prvé cykly. Postupne sa jednotlivé komponenty začnú prekrižovať a vznikne neplanárny graf až napokon jeden komponent pojme všetky ostatné a pri pravdepodobnosti $\ln n.n^{-1}$ je graf skoro určite súvislý. Pre pravdepodobnosť $(1+\varepsilon)\ln n.n^{-1}$ dokonca vzniká Hamiltonovský cyklus.

Navyše sa ukázalo, že väčšina vlastností sa správa monotónne a skokovito[1] t.j. pre danú vlastnosť existuje určitá hranica, pričom pre pravdepodobnosti menšie ako táto hranica takmer žiadny graf danú vlastnosť nemá a pre pravdepodobnosti väčšie ako táto hranica takmer všetky grafy danú vlastnosť majú. Danú hranicu nazveme prahová funkcia. V [4] ju definuje autor nasledovne.

Definícia 3.1.3. *Reálnu funkciu $t(n)$ takú, že $t(n) \neq 0$ pre všetky n, nazývame prahovou funkciou vlastnosti $\mathcal{F}$, ak nasledujúce rovnosti platia pre všetky $p(n)$ a $G \in G_{n,k,p}$*

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{F}] = \begin{cases} 0 & ak\ \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \ pre\ n \to \infty \\ 1 & ak\ \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \ pre\ n \to \infty \end{cases}$$

Z predchádzajúcej definície je vidno, že aj všetky kladné konštanté násobky prahovej funkcie sú prahovými funkciami pre danú vlastnosť. Definícia je teda necitlivá vzhľadom na konštanty. Prahovú funkciu môžeme zadefinovať citlivú aj na konštanty (napríklad ako to bolo treba na odlíšenie spojitosti a Hamiltonovskosti v predchádzajúcom odseku), ale pre väčšinu vlastností to nemá význam.

[1] V poslednej časti tejto práce však ukážeme aj vlastnosť, ktorá sa takto nespráva a musí byť popísaná zložitejším aparátom.

Stretávame sa však aj s vlastnosťami, ktoré sa správajú presne naopak. Pre pravdepodobnosti menšie ako prahová funkcia takmer všetky grafy danú vlastnosť majú a pre pravdepodobnosti väčšie ako prahová funkcia takmer žiadny graf vlastnosť nemá. To nás vedie k zovšeobecneniu definície prahovej funkcie. Naša definícia bude necitlivá aj na neklesajúcosť pravdepodobnosti pre danú vlastnosť. Namiesto neklesajúcosti nám postačí monotónnosť - oproti pôvodnej definícii bude môcť nastať aj prípad

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{F}] = \begin{cases} 1 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \text{ pre } n \to \infty \\ 0 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \text{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

ale budeme vyžadovať, že pre jednu vlastnosť môže nastať iba jedna z týchto dvoch situácií (inými slovami prahová funkcia stále musí oddeľovať grafy s danou vlastnosťou a bez nej).

Definícia 3.1.4. *Reálnu funkciu $t(n)$ takú, že $t(n) \neq 0$ pre všetky n, nazývame prahovou funkciou vlastnosti $\mathcal{F}$, ak pre všetky $p(n)$ a $G \in G_{n,k,p}$ nastáva jeden z prípadov:*

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{F}] = \begin{cases} 0 & \textit{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \textit{ pre } n \to \infty \\ 1 & \textit{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \textit{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

alebo

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{F}] = \begin{cases} 1 & \textit{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \textit{ pre } n \to \infty \\ 0 & \textit{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \textit{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

Aby sme dokázali, že nejaká vlastnosť $\mathcal{F}$ má prahovú funkciu, treba ukázať platnosť oboch rovností z definície prahovej funkcie. Najprv zistíme, ktorú časť definície daná vlastnosť spĺňa. Nájdeme si náhodnú premennú, ktorá charakterizuje danú vlastnosť.[2] Zistíme ako sa správa stredná hodnota tejto náhodnej premennej v $G_{n,k,1/2}$. Ak sa pre konštantnú pravdepodobnosť stredná hodnota blíži k 0, tak vlastnosť spĺňa druhú podmienku z definície

[2] Táto náhodná premenná bude nadobúdať kladné hodnoty iba pre grafy s danou vlastnosťou.

prahovej funkcie. V opačnom prípade spĺňa prvú podmienku. Teraz nájdeme prislúchajúcu prahovú funkciu a dokážeme, že spĺňa obe rovnosti z danej časti definície 3.1.4. Štruktúru dôkazu si ukážeme pre prvý prípad z definície 3.1.4.

- Ukážeme, že pre $\frac{p(n)}{t(n)} \to 0$ skoro žiadny graf z $G_{n,k,p}$ nemá vlastnosť $\mathcal{F}$. Nech X je charakterizujúca náhodná premenná[3] pre danú vlastnosť. Aby sme ohraničili pravdepodobnosť $P[X \geq 1]$ využijeme Markovovu nerovnosť s $\varepsilon = 1$. Ak platí výraz $\lim\limits_{n\to\infty} E(X) = 0$, tak $X(G)$ môže byť pozitívne (a teda rovné aspoň 1) len pre malý počet grafov z $G_{n,k,p}$. To ale znamená, že väčšina grafov vlastnosť $\mathcal{F}$ nemá. Odhad $E(X)$ sa robí ľahšie ako odhad samotnej $X(G)$, lebo nemusíme uvažovať isté faktory ako sú nezávislosť a nekompatibilnosť udalostí.

- Druhá časť dôkazu je troška komplikovanejšia. Na to aby sme dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} P[X \geq 1] = 1$ nestačí iba ohraničiť $E(X)$ zdola, lebo $X(G)$ nie je ohraničené zhora a môže nastať prípad, že pre málo grafov G má $X(G)$ veľkú hodnotu a pre všetky ostatné sa $X(G) = 0$. To nás vedie k použitiu disperzie $D(X)$. Disperzia určuje ako veľmi sa $X(G)$ líši od $E(X)$, respektíve z Čebyševovej nerovnosti ľahko určíme pravdepodobnosť s akou sa $X(G)$ a $E(X)$ líšia o danú δ. Navyše môžeme využiť lemu 1.3.1, ktorá priamo dokáže požadované tvrdenie. Problémom na tomto postupe je obtiažnosť vyjadrenia disperzie $D(X)$. Na výpočet disperzie totiž potrebujeme určiť strednú hodnotu kvadrátu náhodnej premennej (veta 1.1.11) a to môže byť pre zložitejšie vlastnosti ťažké. Často sa disperzia ani nedá vyjadriť presne a musíme sa uspokojiť s odhadmi - to ale nijako neovplyvní výsledok.

Dôkaz pre prípad, že vlastnosť spĺňa druhú podmienku z definície 3.1.4 sa bude robiť symetricky.

[3]Pripomíname, že charakterizujúca náhodná premenná nadobúda kladné hodnoty iba pre grafy z vlastnosťou $\mathcal{F}$.

3.2 Izolované vrcholy

Veta 3.2.1. *Nech $\mathcal{F}$ označuje vlastnosť, že graf $G \in G_{n,k,p}$ obsahuje izolovaný vrchol. Potom $t(n) = \frac{\ln k + \ln n}{(k-1)n}$ je prahová funkcia pre $\mathcal{F}$.*

Dôkaz. Vytvoríme náhodnú premennú $\mathcal{X}_v(G)$, ktorá bude mať dve možné hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_v(G) = 1 \qquad & \text{ak } v \in V(G) \text{ a je izolovaný} \\ \mathcal{X}_v(G) = 0 \qquad & \text{inak} \end{aligned}$$

Keďže $\mathcal{X}_v(G)$ nadobúda iba hodnoty 0 a 1, tak platí

$$E(\mathcal{X}_v) = P\big[v \in V(G) \text{ a je izolovaný}\big]$$

Teda na vyjadrenie vzorca pre $E(\mathcal{X}_v)$ si nám stačí uvedomiť, že izolovaný vrchol v nemôže mať susedov, z čoho vyplýva, že v grafe bude o $(k-1)n$ hrán menej:

$$E(\mathcal{X}_v) = q^{(k-1)n}$$

Nech $\mathcal{I}_p(G)$ je náhodná premenná určujúca počet izolovaných vrcholov grafu G. Z predchádzajúceho vyplývajú nasledovné vzorce:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p(G) &= \sum_{v \in V(G)} \mathcal{X}_v \\ E(\mathcal{I}_p) &= E\Big(\sum_{v \in V(G)} \mathcal{X}_v\Big) \\ &= kn.q^{(k-1)n} \end{aligned}$$

Teraz dokážme, že $t(n)$ je naozaj prahovou funkciou. Pre konštantnú pravdepodobnosť p platí $E(\mathcal{I}_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Izolovanosť vrcholov bude teda spĺňať druhú podmienku z definície prahovej funkcie:

$$\lim_{n\to\infty} P[G \text{ obsahuje izolovaný vrchol}] = \begin{cases} 0 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \text{ pre } n \to \infty \\ 1 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \text{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

Tieto vzťahy dokážeme podľa postupu, ktorý sme uvádzali na začiatku tejto kapitoly.

1. Na dôkaz faktu, že pre pravdepodobnosti asymptoticky väčšie ako $t(n)$ takmer žiadny graf neobsahuje izolované vrcholy nám stačí dokázat', že $E(\mathcal{I}_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$P[\mathcal{I}_p \geq 1] \leq E(\mathcal{I}_p) = kn(1-p(n))^{(k-1)n} = kn\Big(1 - \frac{\gamma(\ln k + \ln n)}{(k-1)n}\Big)^{(k-1)n}$$

V poslednej rovnosti sme dosadili $p(n) = \gamma t(n)$ (čiže $\gamma = \frac{p(n)}{t(n)}$). A teda:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} kn.\big(1 - \frac{\gamma(\ln k + \ln n)}{(k-1)n}\big)^{(k-1)n} &= \lim_{n\to\infty} kn.e^{-\gamma.(\ln k + \ln n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^{\gamma-1}}.\frac{1}{n^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

Posledný výraz sa pre $n \to \infty$ a $\gamma \to \infty$ blíži k 0, čo sme chceli dokázat'.

2. Druhá podmienka, ktorú musí $t(n)$ podl'a našej definície splĺňat' je, že takmer všetky grafy, ktoré vznikli s pravdepodobnost'ou asymptoticky menšou ako je $t(n)$ obsahujú izolovaný vrchol. Na to ale podl'a lemy 1.3.1 treba dokázat' vzt'ah

$$\frac{D(\mathcal{I}_p)}{E^2(\mathcal{I}_p)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Potrebujeme vypočítat' dispeziu. Zavedieme novú náhodnú premennú $\mathcal{X}_{u,v}(G)$, ktorá nadobúda nasledovné hodnoty

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{u,v}(G) = 1 &\qquad \text{ak } u, v \in V(G) \text{ a sú izolované} \\ \mathcal{X}_{u,v}(G) = 0 &\qquad \text{inak} \end{aligned}$$

Jej stredná hodnota sa rovná pravdepodobnosti, že dané dva vrcholy sú izolované v danom grafe. Tu však vzniká viacero prípadov.

$$E(\mathcal{X}_{u,v}) = \begin{cases} q^{(k-1)n} & \text{ak } u = v \\ q^{2(k-1)n} & \text{ak } u \neq v \text{, ale sú v jednej partícii} \\ q^{2(k-1)n-1} & \text{ak } u \neq v \text{ a sú v rôznych partíciách} \end{cases}$$

Zaveďme ďalšiu náhodnú premennú, $\mathcal{I}_p^2(G)$, ktorá bude určovať počet dvojíc izolovaných vrcholov v grafe G. Jej strednú hodnotu vypočítame nasledovne.

$$\begin{aligned} E(\mathcal{I}_p^2) &= E\Big(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\mathcal{X}_{g,h}\Big) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}E(\mathcal{X}_{g,h}) \\ &= kn.q^{(k-1)n} + k\binom{n}{2}.q^{2(k-1)n} + \binom{k}{2}n^2.q^{2(k-1)n-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Poslednú rovnosť sme dostali rozobratím jednotlivých prípadov.

(a) Možností, že $u = v$ je kn a ich pravdepodobnosť je $q^{(k-1)n}$.

(b) Možností, že $u \neq v$, ale sú v jednej partícii[4] je $k\binom{n}{2}.2$ a ich pravdepodobnosť je $q^{2(k-1)n}$.

(c) Možností, že $u \neq v$ a sú v rôznych partíciách je $\binom{k}{2}n^2.2$ a ich pravdepodobnosť je $q^{2(k-1)n-1}$.

Teraz môžeme vypočítať disperziu $D(\mathcal{I}_p)$

$$\begin{aligned} D(\mathcal{I}_p) &= E(\mathcal{I}_p^2) - E(\mathcal{I}_p)^2 \\ &= kn.q^{(k-1)n} + k\binom{n}{2}2.q^{2(k-1)n} + \binom{k}{2}2n^2.q^{2(k-1)n-1} - k^2n^2.q^{2(k-1)n} \\ &= q^{2(k-1)n}.\Big(kn.q^{-(k-1)n} + \Big(\frac{1}{q}-1\Big)k^2n^2 + \Big(1-\frac{1}{q}\Big)kn^2 - kn\Big) \\ &= q^{2(k-1)n}.\Big(kn.q^{-(k-1)n} + \Big(\frac{p}{q}\Big)k^2n^2 - \Big(\frac{p}{q}\Big)kn^2 - kn\Big) \end{aligned}$$

[4]V sume (3.1) počítame každú dvojicu vrcholov dvakrát a teda počet možností musíme vynásobiť dvomi.

A teda:

$$\begin{aligned}
P[\mathcal{I}_p = 0] &\leq \frac{D(\mathcal{I}_p)}{E^2(\mathcal{I}_p)} \\
&= \frac{q^{2(k-1)n}.\Big(kn.q^{-(k-1)n} + \frac{p}{q}k^2n^2 - \frac{p}{q}kn^2 - kn\Big)}{k^2n^2.q^{2(k-1)n}} \\
&= \frac{p(k-1)}{kq} - \frac{1}{kn} + \frac{1}{knq^{2(k-1)n}} \\
&= \frac{(k-1)\frac{\gamma(\ln n + \ln k)}{(k-1)n}}{k\Big(1 - \frac{\gamma(\ln n + \ln k)}{(k-1)n}\Big)} - \frac{1}{kn} + \frac{1}{kn(1-\gamma\frac{\ln n + \ln k}{(k-1)n})^{(k-1)n}} \\
&= \frac{\gamma(\ln n + \ln k)}{kn - k\gamma(\ln n + \ln k)} - \frac{1}{kn} + n^{\gamma-1}k^{\gamma-1}
\end{aligned}$$

Pre $n \to \infty$ a $\gamma = p(n)/t(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ nadobúda posledný výraz hodnotu 0. Tým sme dokázali aj druhú podmienku z definície prahovej funkcie.

□

3.3 Existencia hrán

Veta 3.3.1. *Nech $\mathcal{F}$ označuje vlastnosť, že graf $G \in G_{n,k,p}$ obsahuje aspoň 1 hranu. Potom $t(n) = \frac{1}{\binom{k}{2}n^2}$ je prahová funkcia pre $\mathcal{F}$.*

Dôkaz. Nech $X_h(G)$ je náhodná premenná, ktorá bude mať nasledovné hodnoty:

$$\begin{aligned}
X_h(G) = 1 &\qquad \text{ak } h \in E(G) \\
X_h(G) = 0 &\qquad \text{inak}
\end{aligned}$$

Ľahko vidno, že stredná hodnota $E(X_h)$ sa rovná pravdepodobnosti s akou je hrana h obsiahnutá v grafe G.

$$E(X_h) = p$$

Zadefinujme náhodnú premennú $\mathcal{H}_p(G)$, ktorá bude určovať počet hrán grafu G. Vyjadríme jej strednú hodnotu.

$$E(\mathcal{H}_p(G)) = \sum_{h\in G} E(X_h) = \binom{k}{2} n^2 p$$

Pre vyjadrenie disperzie budeme potrebovať ďalšie dve náhodné premenné:

- $X_{g,h}(G)$ je premenná, ktorá nadobúda nasledovné hodnoty:

$$\begin{aligned} X_{g,h}(G) &= 1 \qquad \text{ak } g, h \in E(G) \\ X_{g,h}(G) &= 0 \qquad \text{inak} \end{aligned}$$

  Jej stredná hodnota sa rovná pravdepodobnosti vzniku hrán g a h v grafe G. Môžu nastať dva prípady.

$$E(X_{g,h}) = \begin{cases} p & \text{ak } g = h \\ p^2 & \text{inak} \end{cases}$$

- Premennú označujúcu počet dvojíc hrán označme ${\mathcal{H}_p}^2(G)$.

$$\begin{aligned} E({\mathcal{H}_p}^2) &= E\Big(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} X_{g,h}(G)\Big) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} E(X_{g,h}) \\ &= \binom{k}{2} n^2 \left(\binom{k}{2} n^2 - 1\right) p^2 + \binom{k}{2} n^2 p \end{aligned}$$

  Poslednú rovnosť sme dostali po zvážení nasledovných faktov:

  – Ak $g = h$ tak je jedna hrana určená (pravdepodobnosť p) a zvoliť ju môžeme $\binom{k}{2} n^2$ spôsobmi.

  – Ak $g \neq h$ tak sú určené dve hrany (pravdepodobnosť p^2) a zvoliť ich môžeme $\binom{k}{2} n^2 \left(\binom{k}{2} n^2 - 1\right)$ spôsobmi.

Pomocou daných náhodných premenných môžeme vypočítať $D(\mathcal{H}_p)$

$$\begin{aligned} D(\mathcal{H}_p) &= E(\mathcal{H}_p^2) - E^2(\mathcal{H}_p) \\ &= \binom{k}{2} n^2 \left(\binom{k}{2} n^2 - 1 \right) p^2 + \binom{k}{2} n^2 p - \binom{k}{2}^2 n^4 p^2 \\ &= \binom{k}{2}^2 n^4 p^2 - \binom{k}{2} n^2 p^2 + \binom{k}{2} n^2 p - \binom{k}{2}^2 n^4 p^2 \\ &= \binom{k}{2} n^2 p(1-p) \end{aligned}$$

Overme teraz platnosť nášho tvrdenia.

Pre konštantné $p(n)$ platí $E(\mathcal{H}_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, z čoho vyplýva, že pre prahovú funkciu musí platiť

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{F}] = \begin{cases} 0 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \text{ pre } n \to \infty \\ 1 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \text{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

Dokážme to.

1. Nech $\gamma = p(n)/t(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} P\big[\mathcal{H}_p \geq 1\big] &\leq E(\mathcal{H}_p) \\ &= \binom{k}{2} n^2 \gamma t(n) \\ &= \binom{k}{2} n^2 \gamma \frac{1}{\binom{k}{2} n^2} \\ &= \gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

2. Nech $\gamma = p(n)/t(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Potom platí

$$\begin{aligned} P\big[\mathcal{H}_p = 0\big] &\leq \frac{D(\mathcal{H}_p)}{E^2(\mathcal{H}_p)} \\ &= \frac{\binom{k}{2} n^2 \gamma \frac{1}{\binom{k}{2} n^2} \left(1 - \gamma \frac{1}{\binom{k}{2} n^2} \right)}{\binom{k}{2}^2 n^4 \gamma^2 \frac{1}{\binom{k}{2}^2 n^4}} \\ &= \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\binom{k}{2} n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Funkcia $t(n)$ spĺňa obe podmienky z definície a teda je prahovou funkciou pre existenciu hrán.

□

3.4 Izolovanosť hrán

Veta 3.4.1. *Nech $\mathcal{F}$ označuje vlastnosť, že neprázdny graf $G \in G_{n,k,p}$ obsahuje izolovanú hranu. Potom $t(n) = \frac{\ln n + \ln \ln n}{n}$ je prahová funkcia pre $\mathcal{F}$.*

Dôkaz. Majme náhodnú premennú $\mathcal{X}_h(G)$, ktorá nadobúda nasledovné hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_h(G) = 1 & \quad \text{ak } h \in E(G) \text{ a je izolovaná} \\ \mathcal{X}_h(G) = 0 & \quad \text{inak} \end{aligned}$$

Keďže $\mathcal{X}_h(G)$ nadobúda iba hodnoty 0 a 1, platia nasledobné vzťahy:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}_h) &= P[h \in E(G) \text{ a je izolovaná}] \\ &= p.q^{2((k-1)n-1)} \end{aligned}$$

Nech $\mathcal{H}_t(G)$ je náhodná premenná určujúca počet izolovaných hrán v grafe. Jej strednú hodnotu môžeme vyjadriť nasledovne:

$$E(\mathcal{H}_t) = E\left(\sum_{h \in E} \mathcal{X}_h(G)\right) = \binom{k}{2} n^2.p.q^{2((k-1)n-1)}$$

Skúsme teraz vybrať správnu prahovú funkciu:

1. Uvažujme konštantné $p(n) = P$ $(P \in (0,1))$.

   $$\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{H}_t) = \binom{k}{2} n^2 P(1-P)^{2(k-1)n-2}$$

   Posledný vzťah sa pre $n \to \infty$ blíži k 0. Prahová funkcia musí preto spĺňať tieto podmienky

   $$\lim_{n\to\infty} P[G \text{ obsahuje izolovanú hranu}] = \begin{cases} 0 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty \text{ pre } n \to \infty \\ 1 & \text{ak } \frac{p(n)}{t(n)} \to 0 \text{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

2. Možnosť ou, ktorá sa zdá byť správna je $t(n) = \frac{1}{\binom{k}{2}n^2}$.
Skutočne

$$\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{H}_t) = \lim_{n\to\infty} \binom{k}{2} n^2 \frac{1}{\binom{k}{2}n^2}\left(1 - \frac{1}{\binom{k}{2}n^2}\right)^{2(k-1)n-2} = 1$$

čo indikuje, že pre pravdepodobnosti asymptoticky menšie ako $t(n)$ takmer žiadny graf nebude obsahovať izolovanú hranu. Táto funkcia však nevyhovuje podmienke, že pre všetky pravdepodobnosti p asymptoticky väčšie ako $t(n)$ je $\lim_{n\to\infty} D(\mathcal{H}_t)/E^2(\mathcal{H}_t) = 0$, a teda to nie je prahová funkcia.

3. Aby sme dosiahli, že pre prahovú funkciu $t(n)$ bude platiť $\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{H}_t) = 1$, tak po odmyslení konštánt[5] získavame rovnosť:

$$n.T = e^T \text{ pre } n \to \infty, \text{ pričom } T = t(n).n$$ [6]

Jedným správnym riešením rovnice $n.T = e^T$ je práve $t(n) = \frac{1}{n^2}$ (z prípadu 2), ale ako sme už povedali, tak toto nie je prahová funkcia.

Problém je v tom, že druhé riešenie danej rovnice nemá algebraický zápis a tak ho môžeme iba odhadnúť. Odhad druhého riešenia má nasledovný tvar:
$T = \ln n + \ln\ln n$

$$\begin{aligned} n.T &= e^T \\ n.(\ln n + \ln\ln n) &= e^{\ln n}.e^{\ln\ln n} \\ \ln n + \ln\ln n &= \ln n \\ 1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} &= 1 \end{aligned}$$

Pre $n \to \infty$ platí $\frac{\ln\ln n}{\ln n} \to 0$ a rovnosť platí.

[5] Pre jednoduchosť výsledkov zjednodušíme tvar $E(\mathcal{H}_t)$ na $E(\mathcal{H}_t) = n^2.p.(1-p)^n$. Môžeme si to dovoliť, lebo naša definícia prahovej funkcie nie je citlivá na konštanty.

[6] Využili sme fakt,že pre $n \to \infty$ sa výraz $(1 - \frac{T}{n})^n$ rovná e^{-T}

Overme teraz, že funkcia $t(n) = \frac{T}{n} = \frac{\ln n + \ln\ln n}{n}$ je naozaj prahová pre izolované hrany.

1. Pre $\gamma = \frac{p(n)}{t(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ musí platiť $E(\mathcal{H}_t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{H}_t) &= \binom{k}{2} n^2.p.q^{2(k-1)n-2} \\
&= \binom{k}{2} n^2.\frac{p(1-p)^{2(k-1)n}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{\binom{k}{2} n\gamma(\ln n + \ln\ln n)\left(1-\gamma\frac{\ln n+\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{2(k-1)n}{(-\gamma)(\ln n+\ln\ln n)}.(-\gamma)(\ln n+\ln\ln n)}}{\left(1-\gamma.\frac{\ln n+\ln\ln n}{n}\right)^2} \\
&= \frac{\binom{k}{2} n^3(\ln n + \ln\ln n)}{(n-\gamma.\ln n + \gamma\ln\ln n)^2.e^{\gamma(2(k-1)\ln n + 2(k-1)\ln\ln n)}} \\
&\sim \frac{\binom{k}{2} n^3 \ln n}{n^2.n^{2(k-1)\gamma}.(\ln n)^{2(k-1)\gamma}} + \frac{\binom{k}{2} n^3 \ln\ln n}{n^2.n^{2(k-1)\gamma}.(\ln n)^{2(k-1)\gamma}} \\
&= \frac{\binom{k}{2}.n^{1-2(k-1)\gamma}}{(\ln n)^{2(k-1)\gamma}} + \frac{\binom{k}{2}.(\ln n)^{1-2(k-1)\gamma}}{n^{2(k-1)\gamma}}
\end{aligned}$$

Posledný výraz sa pre $\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ blíži k 0.

2. Na druhé tvrdenie budeme potrebovať disperziu $D(\mathcal{H}_t)$. Nech $X_{g,h}$ je náhodná premenná, ktorá nadobúda tieto hodnoty

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{g,h}(G) = 1 &\qquad \text{ak hrany } g,h \in E(G) \text{ a sú izolované} \\
\mathcal{X}_{g,h}(G) = 0 &\qquad \text{inak}
\end{aligned}$$

Nech $\mathcal{H}_p^2(G)$ je náhodná premenná určujúca počet dvojíc izolovaných hrán v grafe G. Na určenie jej strednej hodnoty musíme preskúmať nasledovné možnosti:

- Ak $g = h$, tak existuje $\binom{k}{2}n^2$ možností na výber vrcholov pre hrany g, h. Keďže je 1 hrana určená a zároveň je izolovaná, dostávame pravdepodobnosť $p.q^{2(k-1)n-2}$. Celkový vzorec pre tento prípad je teda:

$$\binom{k}{2} n^2 p.q^{2(k-1)n-2}$$

- Druhý prípad nastáva, keď hrany g a h majú spoločný vrchol a vrcholy, ktoré nemajú spoločné **sú** v rovnakej partícii. Formálnejšie, $g = (v_1, v_2)$ a $h = (v_2, v_3)$, pričom v_1 a v_3 sú v rovnakej partícii. Vzorec pre tento prípad vyzerá nasledovne:

$$2\binom{k}{2} n^2(n-1)p^2.q^{3(k-1)n-4}$$

  V tomto prípade však hrany g a h nie sú izolované (lebo majú spoločný vrchol), a preto sa $X^2(G)$ rovná 0. Tento prípad teda nebude zarátaný v $E(X^2)$.

- Keď hrany g a h majú spoločný vrchol a vrcholy, ktoré nemajú spoločné **nie sú** v rovnakej partícii ($g = (v_1, v_2)$ a $h = (v_2, v_3)$ pričom v_1 a v_3 sú v rôznych partíciách), tak vzorec vyzerá nasledovne:

$$k(k-1)(k-2)n^3p^2.q^{3(k-1)n-4}$$

  Ani v tomto prípade g a h nie sú izolované, a preto tiež nebude zarátaný v $E(X^2)$.

- Ďalší prípad je, keď hrany g a h nemajú spoločný vrchol, ale všetky ich vrcholy sú iba v **2 partíciách**. Vzorec pre tento prípad má tvar:

$$\binom{k}{2} n^2(n-1)^2p^2q^{4(k-1)n-4}$$

- Ak hrany g a h nemajú spoločný vrchol a všetky ich vrcholy sú v **3 partíciách**, dostávame vzťah:

$$k(k-1)(k-2)n^3(n-1)p^2.q^{4(k-1)n-4}$$

- Posledný prípad je, keď hrany g a h nemajú spoločný vrchol a všetky ich vrcholy sú v **4 partíciách**. Vzťah je :

$$\binom{k}{2}\binom{k-2}{2}n^4p^2.q^{4(k-1)n-4}$$

$E(\mathcal{H}_p^2)$ dostaneme ako súčet predchádzajúcich prípadov. Vyjadríme disperziu.

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{H}_t) &= k(k-1)n^2p^2q^{4(k-1)n-4}\Big(\frac{1}{4}(k-2)(k-3)n^2 + k(k-1)n^2 \\
&- (k-2)n + \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}k.(k-1)n^2\Big) + \binom{k}{2}n^2pq^{2(k-1)n-2} \\
&= \frac{1}{2}\binom{k}{2}p^2n^2q^{4(k-1)n-4}\Big(-4(k-1)n+2\Big) + \binom{k}{2}n^2p.q^{2(k-1)n-2}
\end{aligned}$$

Teraz môžeme vyjadriť aj pomer $\frac{D(\mathcal{H}_t)}{E(\mathcal{H}_t)^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{D(\mathcal{H}_t)}{E(\mathcal{H}_t)^2} &= \frac{\frac{1}{2}\binom{k}{2}p^2n^2q^{4(k-1)n-4}\Big(2-4(k-1)n\Big) + \binom{k}{2}n^2pq^{2(k-1)n-2}}{\binom{k}{2}n^4p^2q^{4(k-1)n-4}} \\
&= \frac{2}{kn^2} - \frac{4}{kn} + \frac{(1-p)^2}{\binom{k}{2}n^2p(1-p)^{2(k-1)n}} \\
&= \frac{2}{kn^2} - \frac{4}{kn} + \frac{(n-\gamma.\ln n + \gamma\ln\ln n)^2}{n^2}.\frac{e^{2(k-1)\gamma\ln n}.e^{2(k-1)\gamma\ln\ln n}}{\binom{k}{2}n\gamma(\ln n + \ln\ln n)} \\
&\overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{2(k-1)\gamma}.(\ln n)^{2(k-1)\gamma}}{n^2p(n)}
\end{aligned}$$

Keďže chceme dokázať existenciu izolovaných hrán iba v neprázdnych grafoch, môžeme počítať s pravdepodobnosťami asymptoticky väčšími ako $\frac{1}{\binom{k}{2}n^2}$. [7] Nech $\varphi(n)$ je ľubovoľná funkcia, ktorá sa pre $n \to \infty$ blíži k ∞ a platí pre ňu podmienka

$$\gamma = \frac{p(n)}{t(n)} = \frac{\varphi(n)}{n.(\ln n + \ln\ln n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Potom môžeme p vyjadriť ako $\frac{\varphi(n)}{n^2}$ a platí:

$$\begin{aligned}\frac{D(\mathcal{H}_t)}{E(\mathcal{H}_t)^2} &= \frac{n^{2(k-1)\gamma}.(\ln n)^{2(k-1)\gamma}}{n^2 p}\\ &= \frac{n^{2(k-1)\gamma}.(\ln n)^{2(k-1)\gamma}}{\varphi(n)}\end{aligned}$$

Daný výraz sa pre $\gamma = \frac{p(n)}{t(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ a pre všetky $\varphi(n)$ spĺňajúce dané podmienky blíži k 0, čím je tvrdenie dokázané.

Poznámka 3.4.2. *Z posledných dvoch tvrdení je vidieť akú pravdepodobnosť treba na existenciu izolovaných hrán v takmer všetkých grafoch z $G_{n,k,p}$. Veta 3.3.1 hovorí, že na existenciu hrán nám treba pravdepodobnosť asymptoticky väčšiu ako $\frac{1}{\binom{k}{2}n^2}$ a veta 3.4.1 tvrdí, že pre izolovanosť hrany musí byť pravdepodobnosť asymptoticky menšia ako $\frac{\ln n + \ln\ln n}{n}$. Teda takmer všetky grafy s pravdepodobnosťou vzniku hrán medzi danými hranicami obsahujú izolované hrany.*

Poznámka 3.4.3. *Izolovanosť hrán v grafoch je jednou z vlastností, ktoré sa nedajú popísať dokonca ani našou zovšeobecnenou definíciou prahovej funkcie. Ako sme z predchádzajúcich tvrdení videli, táto vlastnosť je ohraničená až dvomi prahovými funkciami. Existuje teda trieda vlastností, ktoré musia byť popísané "pravdepodobnostnými intervalmi"* [8]*, čo je zovšeobecnenie pojmu prahovej funkcie.*

□

[7] Vyplýva to z vety 3.3.1.

[8] Pre pravdepodobnosti z týchto intervalov platí, že takmer všetky grafy, v ktorých sú hrany obsiahnuté s týmito pravdepodobnosťami, danú vlastnosť majú. Naopak pre ostatné pravdepodobnosti platí, že takmer žiadny graf danú vlastnosť nemá.

Záver

V práci sme sa zaoberali vlastnosťami k-partitných náhodných grafov. Väčšinu výsledkov sme dosiahli skúmaním náhodných premenných, ktoré charakterizovali dané vlastnosti. V druhej kapitole sme pracovali s pravdepodobnostným priestorom, v ktorom sú hrany v grafoch obsiahnuté s pravdepodobnosťou 1/2. V tomto pravdepodobnostnom priestore sme preskúmali nasledovné náhodné premenné:

1. $I(G)$ - počet izolovaných vrcholov v grafe G
2. $\mathcal{H}(G)$ - počet hrán v grafe G
3. $C_2(G)$ - počet ciest dĺžky 2 v grafe G
4. $K_3(G)$ - počet kružníc dĺžky 3 v grafe G
5. $\mathcal{N}(G)$ - počet vrcholov s nepárnym stupňom v grafe G

V tretej kapitole sme uvažovali všeobecnejší pravdepodobnostný priestor. Hrany v grafe vznikali s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$. Zadefinovali sme pojem prahovej funkcie a pre jednotlivé vlastnosti sme určili prislúchajúce prahové funkcie. Na skúmanie vlastností sme opäť používali náhodné premenné. Podobne ako v druhej kapitole sme využili

- počet izolovaných vrcholov v grafe G - $\mathcal{I}_p(G)$ a
- počet izolovaných hrán v grafe G - $\mathcal{H}_p(G)$

Navyše sme sa zaujímali o počet izolovaných hrán v neprázdnom grafe G - $\mathcal{H}_t(G)$.

V práci sme dosiahli nasledovné výsledky.

- Ukázali sme, že takmer žiadny graf nie je k-partitný (Veta 1.3.2).
- Určili sme strednú hodnotu $E(\mathcal{I}_p) = kn.(1-p)^{(k-1)n}$ a disperziu počtu izolovaných vrcholov v grafe G. Pre pravdepodobnosť $p = 1/2$ to viedlo k tvrdeniu, že takmer každý graf obsahuje izolovaný vrchol (Veta 2.1.2). Pre všeobecnú pravdepodobnosť sme určili prahovú funkciu $t(n) = \frac{\ln k + \ln n}{(k-1)n}$ (Veta 3.2.1).
- Pomocou strednej hodnoty náhodnej premennej počtu hrán $E(\mathcal{H}_p) = \binom{k}{2} n^2 p$ a disperzie $D(\mathcal{H})$ sme pre $p = 1/2$ ohraničili počet hrán v k-partitnom náhodnom grafe (Veta 2.1.3).
$$\binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{\sqrt{4}}{n}\right) < \mathcal{H}(G) < \binom{k}{2}\frac{n^2}{2}\left(1+\frac{\sqrt{4}}{n}\right)$$
Pre všeobecnú pravdepodobnosť sme určili prahovú funkciu pre existenciu hrán (Dôsledok 2.1.4) $t(n) = \frac{1}{\binom{k}{2}n^2}$ (Veta 3.3.1).
- Pomocou ohraničenia pre počet hrán sme ohraničili aj hrúbku grafu vzťahom
$$\theta(G) > \frac{(k-1)n}{12}\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}}\right)$$
.
- V 3. kapitole sme určili prahovú funkciu pre počet izolovaných hrán v neprázdnych k-partitných náhodných grafoch $t(n) = \frac{\ln n + \ln\ln n}{n}$ (Veta 3.4.1). Využili sme pri tom náhodnú premennú $\mathcal{H}_t(G)$, vyjadrujúcu počet izolovaných hrán v daných grafoch. Potrebovali sme určiť jej strednú hodnotu $E(\mathcal{H}_t) = \binom{k}{2} n^2.p.q^{2((k-1)n-1)}$ a disperziu.

- Posledné dva body nám pomohli ohraničiť pravdepodobnosti pre vznik izolovaných hrán. Hovorí o tom poznámka 3.4.2. Táto vlastnosť ukázala, že existujú aj vlastnosti, ktoré sa nedajú opísať iba pomocou jednej prahovej funkcie. Hovorí o tom poznámka 3.4.3.

Pre pravdepodobnosť vzniku hrany 1/2 sme dokázali aj tieto tvrdenia:

- Pomocou strednej hodnoty a disperzie počtu vrcholov s nepárnym stupňom $E(\mathcal{N}) = \frac{1}{2}$ pre pravdepodobnosť vzniku hrany 1/2 sme dokázali, že takmer všetky grafy obsahujú vrchol s nepárnym vrcholom (Lema 2.3.1). Tým sme dokázali aj dôležitejšie tvrdenie - skoro žiadny graf nie je eulerovský (Veta 2.3.2).

- Porovnaním počtu nesúvislých grafov a počtu všetkých grafov sme dostali tvrdenie, že všetky takmer všetky grafy sú súvislé (Veta 2.2.1).

- Ohraničili sme maximálny a minimálny stupeň vrchola (Vety 2.4.1 a 2.4.2). Uvedené nerovnosti zároveň určujú v akom intervale sa budú pohybovať stupne vrcholov v takmer všetkých grafoch z $G_{n,k}$ (Dôsledok 2.4.3).

$$\begin{aligned}
\Delta(G) &< \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&- \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n + \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(G) &> \frac{1}{2}(k-1)n - \frac{1}{2}\sqrt{2(k-1)n\ln(k-1)n} \\
&+ \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2(k-1)n}}{\sqrt{\ln(k-1)n}}\ln\ln(k-1)n - \frac{\varphi(n)\sqrt{(k-1)n}}{\sqrt{2\ln(k-1)n}}
\end{aligned}$$

- Pomocou strednej hodnoty náhodnej premennej, určujúcej počet ciest dĺžky 2, $E(C_2) = \binom{k}{2}\frac{n^2}{4}((k-1)n-1)$ sme určili, že takmer žiadny graf nemá viac ako $n^3.\ln n$ týchto ciest (Veta 2.5.1).

- Podobne sme zistili, že takmer každý graf nemá viac ako $n^3.\ln n$ kružníc dĺžky 3 (Veta 2.5.2). Využili sme strednú hodnotu náhodnej premennej počítajúcej kružnice dĺžky 3 $E(K_3) = \binom{k}{3}\frac{n^3}{8}$.

Zaujímali sme sa aj o existenciu dlhších ciest a kružníc v grafoch z $G_{n,k,1/2}$. Konkrétnejšie sme skúmali existenciu Hamiltonovskej cesty a kružnice. Nepodarilo sa nám presne spočítat' počet Hamiltonovských ciest pre k-partitné grafy a obmedzili sme sa na horný a dolný odhad. Stredná hodnota sa síce pre $n \to \infty$ blížila k ∞, ale nepodarili sa nám dokázat' predpoklady lemy 1.3.1, a teda nemôžeme potvrdit', že vačšina grafov z $G_{n,k,1/2}$ obsahuje Hamiltonovskú cestu a kružnicu.

Literatúra

[1] B.Bollobás:
Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods
American Mathematical Society, Providence l986

[2] B.Bollobás:
Martingales, isometric inequalities and random graphs
Colloquia mathematica societatis János Bolyai, Eger 1987

[3] B.Bollobás:
Random graphs.
Academic Press, London l985

[4] R.Diestel:
Graph theory.
Springer - Verlag, New York 2000

[5] P.Erdos, J.Spencer:
Probabilistic in combinatorics.
Akademiai Kiado, Budapest l974

[6] M.Karoński:
A review of random graphs
Instytut Matematyki UAM, Poznań 1978

[7] F.Lamoš:
Základy teórie pravdepodobnosti.
Univerzita Komenského, Bratislava 1983

[8] E.M.Palmer:
Graphical Evolution
New York l985

[9] Z.Zvolenská:
Vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov bipartitného grafu.
Univerzita Komenského, Bratislava 2004