

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE V BIPARTITNÝCH  
KUBICKÝCH PLANÁRNYCH GRAFOCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2023

BC. RICHARD BÍRÓ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE V BIPARTITNÝCH  
KUBICKÝCH PLANÁRNÝCH GRAFOCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Informatika  
Študijný odbor: Informatika  
Školiace pracovisko: Katedra informatiky  
Školiteľ: RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.

Bratislava, 2023  
Bc. Richard Bíró



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Richard Bíró  
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** informatika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický
- Názov:** Hamiltonovské kružnice v bipartitných kubických planárnych grafoch  
*Hamilton cycles in bipartite cubic planar graphs*
- Anotácia:** Problém existencie Hamiltonovskej kružnice v 3-súvislých bipartitných kubických planárnych grafoch je známy ako Barnettova hypotéza. Existuje niekoľko čiastkových výsledkov o štruktúre hypotetického kontrapríkladu, tiež existuje niekoľko zosilnení hypotézy, ktoré sú s daným tvrdením ekvivalentné.
- Cieľ:** Cieľom práce je rozšíriť doteraz známe poznatky týkajúce sa skúmanej problematiky. Prostriedkom je študovať vlastnosti konfigurácií malých stien v bipartitných kubických grafoch, a systematicky ich klasifikovať na redukovateľné a neredukovateľné vzhľadom na existenciu Hamiltonovskej kružnice, prípadne aj vzhľadom na zosilnenia Barnettovej hypotézy. Na generovanie konfigurácií i na overovanie ich vlastností je žiadúce využiť pomoc počítača.
- Kľúčové slová:** Barnettova hypotéza, Hamiltonovská kružnica, kubický graf, planárny graf, bipartitný graf
- Vedúci:** RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KI - Katedra informatiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
- Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**  
bez obmedzenia
- Dátum zadania:** 14.12.2021
- Dátum schválenia:** 27.04.2023
- prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie:** V prvom rade by som chcel poďakovať vedúcemu RNDr. Ing. Františkovi Kardošovi, PhD. za pomoc a nápady k tejto práci. Zároveň chcem poďakovať rodičom a príbuzným za podporu.

## Abstrakt

Barnettova hypotéza hovorí, že každý kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf je Hamiltonovský. Existujú podgrafy (známe ako redukovateľné konfigurácie), ktoré sa nemôžu vyskytovať v najmenšom protipríklade. V našej práci sa zaoberáme skúmaním konfigurácií zložených zo stien malej veľkosti a ich klasifikáciou na redukovateľné a neredukovateľné vzhľadom na existenciu Hamiltonovskej kružnice. Súčasťou práce je aj implementácia algoritmov na generovanie a overovanie redukovateľných konfigurácií.

**Kľúčové slová:** Barnettova hypotéza, Hamiltonovská kružnica, kubický graf, planárny graf, bipartitný graf

## Abstract

Barnette's conjecture states that every cubic planar bipartite 3-connected graph is Hamiltonian. There are several subgraphs (known as reducible configurations) which can't occur in the smallest counterexample. In our thesis we study configurations with faces of small length and classify them into reducible and irreducible according to the existence of a Hamiltonian circuit. Thesis also describes implementation of algorithms which generate and verify reducible configurations.

**Keywords:** Barnette's conjecture, Hamiltonian cycle, cubic graph, planar graph, bipartite graph

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>2</b>
1.1 Hamiltonovské grafy . . . . .	2
1.2 Vrcholová a hranová súvislosť . . . . .	2
1.3 Planárne grafy . . . . .	3
1.4 Bipartitné grafy . . . . .	4
1.5 Multipóly . . . . .	5
<b>2 Analýza problému</b>	<b>6</b>
2.1 Silnejšie hypotézy . . . . .	6
2.2 Iné triedy grafov . . . . .	8
2.3 Ekvivalentné formulácie . . . . .	9
2.4 Redukovateľné konfigurácie . . . . .	10
2.4.1 Známe redukovateľné konfigurácie . . . . .	12
2.4.2 3-súvisle redukovateľné konfigurácie . . . . .	15
<b>3 Nové redukovateľné konfigurácie</b>	<b>18</b>
3.1 3-súvisle redukovateľné konfigurácie . . . . .	19
3.2 Nekonečná trieda redukovateľných konfigurácií . . . . .	26
3.2.1 $B_{66}$ -konfigurácie . . . . .	28
3.2.2 $B_{48}$ -konfigurácie . . . . .	31
3.2.3 $B$ -konfigurácie . . . . .	33
<b>4 Stromové reduktory</b>	<b>43</b>
4.1 Stromové 2KBP-multipóly . . . . .	43
4.2 Počet stromových 2KBP-multipólov . . . . .	43
4.3 Stromové KBP-multipóly . . . . .	44
4.3.1 Počet stromových KBP-multipólov . . . . .	44
4.3.2 Počet Hamiltonovských možností . . . . .	45

<b>5 Implementácia</b>	<b>51</b>
5.1 Generovanie KBP-multipólov . . . . .	52
5.1.1 Generovanie stromových KBP-multipólov . . . . .	55
5.2 Generovanie Hamiltonovských možností . . . . .	57
5.3 Rozšírenie Hamiltonovskej možnosti . . . . .	59
5.4 Všeobecný algoritmus . . . . .	59
<b>Záver</b>	<b>63</b>
<b>Príloha</b>	<b>67</b>



# Úvod

V teórii grafov existuje veľa otvorených problémov. Jedným z nich je Barnettova hypotéza, ktorá hovorí, že každý kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf je Hamiltonovský [4]. Nebola dokázaná ani vyvrátená. Sú však známe protipríklady pre silnejšie verzie hypotézy, čiastočné výsledky pre iné triedy grafov a ekvivalentné formulácie [12].

V kapitole 1 spomenieme základné pojmy z teórie grafov a dokázané vety [8], ktoré využijeme v ďalších častiach práce. Uvedieme definíciu multipólu ako grafovej štruktúry zloženej z vrcholov, hrán a polhrán [9].

Barnettova hypotéza patrí medzi dobre preskúmané otvorené problémy. V kapitole 2 popíšeme súčasný stav problematiky. Ukážeme, že všetky predpoklady v znení hypotézy sú nutné [3, 5, 6, 20]. Vysvetlíme pojmy ako redukovateľná konfigurácia, 3-súvisle redukovateľná konfigurácia a reduktor. Definujeme triedu kubických planárnych bipartitných multipólov (KBP-multipólov), s ktorými budeme ďalej pracovať.

Kapitola 3 bude venovaná našim dosiahnutým výsledkom. Uvedieme nové redukovateľné konfigurácie, ktoré sme našli počítačovým prehľadávaním. O troch z nich dokážeme, že sú zároveň 3-súvisle redukovateľnými, a teda sa nemôžu nachádzať v najmenšom protipriklade Barnettovej hypotézy. Najdôležitejším výsledkom bude objavenie nekonečnej triedy redukovateľných konfigurácií ( $B$ -konfigurácií), ktoré vzniknú prikladáním dvojíc stien zvolenej veľkosti.

Na stromové reduktory sa zameriame v kapitole 4. Dokážeme, že počet stromových KBP-multipólov sa dá vypočítať iteratívnym spôsobom. Okrem toho dokážeme tesný horný asymptotický odhad počtu Hamiltonovských možností v stromovom KBP-multipóle s  $p$  polhranami.

Súčasťou práce je program v jazyku Python, ktorý generuje a overuje potenciálne redukovateľné konfigurácie. Implementáciu tohto programu popíšeme v kapitole 5.

V kapitole Záver zhrnieme naše dosiahnuté výsledky.

# Kapitola 1

## Základné pojmy

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy z teórie grafov, ako aj známe tvrdenia z tejto oblasti [8].

**Definícia 1.1.** Graf je usporiadaná dvojica  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je konečná neprázdna množina vrcholov a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina hrán. Hovoríme, že hrana  $e = \{u, v\}$  spája vrcholy  $u$  a  $v$ , respektíve vrcholy  $u$  a  $v$  sú susedné ( $u$  je susedom  $v$  a naopak). Hovoríme tiež, že hrana  $e$  a vrchol  $u$  (respektíve  $v$ ) sú incidentné. Namiesto  $e = \{u, v\}$  píšeme spravidla len  $e = uv$ .

**Poznámka 1.2.** Označenie  $\binom{V}{2}$  je množina všetkých dvojprvkových podmnožín  $V$ .

Z definície je zrejmé, že budeme pracovať s grafmi, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol a neobsahujú slučky ani násobné hrany.

**Definícia 1.3.** Nech  $G = (V, E)$  je graf. Množina susedov vrcholu  $v$  je množina  $N(v) = \{u \in V \mid \exists e \in E : e = uv\}$ . Stupeň vrcholu  $v$  (označenie  $d(v)$ ) je veľkosť množiny jeho susedov  $N(v)$ . Ak má každý vrchol  $v \in G$  stupeň 3, graf  $G$  nazývame kubickým.

### 1.1 Hamiltonovské grafy

**Definícia 1.1.1.** Kružnica na  $n$  vrcholoch je graf  $C_n = (V, E)$ , kde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $E = \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ .

**Definícia 1.1.2.** Hamiltonovská kružnica grafu  $G$  je kružnica, ktorá prechádza všetkými jeho vrcholmi. Graf  $G$  je Hamiltonovský, ak obsahuje Hamiltonovskú kružnicu.

### 1.2 Vrcholová a hranová súvislosť

**Definícia 1.2.1.** Cesta na  $n$  vrcholoch je graf  $P_n = (V, E)$ , kde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $E = \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$ .

**Definícia 1.2.2.** Graf  $G = (V, E)$  nazývame súvislým, ak medzi ľubovoľnými rôznymi vrcholmi  $u, v \in V$  existuje cesta.

**Definícia 1.2.3.** Graf  $G$  je (vrcholovo)  $k$ -súvislý, ak po odstránení ľubovoľných  $i < k$  vrcholov ostane súvislým. Najväčšie také  $k$  sa nazýva vrcholová súvislosť grafu  $G$  (označenie  $\kappa(G)$ ). Vrchol, ktorého odstránením sa graf stane nesúvislým, nazývame artikuláciou.

**Definícia 1.2.4.** Graf  $G$  je hranovo  $k$ -súvislý, ak po odstránení ľubovoľných  $i < k$  hrán ostane súvislým. Najväčšie také  $k$  sa nazýva hranová súvislosť grafu  $G$  (označenie  $\lambda(G)$ ). Hranu, ktorej odstránením sa graf stane nesúvislým, nazývame mostom.

**Definícia 1.2.5.** Graf  $G$  nazývame lesom, ak ide o acyklický graf (neobsahuje žiadnu kružnicu). Graf  $G$  nazývame stromom, ak ide o súvislý acyklický graf.

**Definícia 1.2.6.** Nech  $G$  je les alebo strom. Vrcholy  $G$ , ktoré majú stupeň 1, nazývame jeho listami.  $G$  nazývame kubickým, ak všetky jeho nelistové vrcholy majú stupeň 3.

**Veta 1.2.7.** Nech  $G$  je kubický graf. Potom  $\kappa(G) = \lambda(G)$ .

**Veta 1.2.8.** Nech  $G$  je strom s  $n$  vrcholmi. Potom  $G$  má práve  $n - 1$  hrán.

### 1.3 Planárne grafy

**Definícia 1.3.1.** Graf  $G = (V, E)$  nazývame planárnym, ak existuje nakreslenie do roviny, v ktorom sa jeho hrany nepretínajú. Lineárne súvislé otvorené množiny, ktoré vzniknú rozdelením roviny nakresleným planárnym grafom, nazývame stenami (oblasťami) grafu  $G$ . Dve steny sú susedné, ak majú spoločnú hranu. Množinu všetkých stien daného grafu označujeme  $F$ . Ku každej hrane  $e \in E$  prislúchajú dve steny  $f_1, f_2 \in F$ , ktoré sú s ňou incidentné.

**Definícia 1.3.2.** Nakreslenie planárneho grafu, v ktorom sú všetky jeho steny veľkosti 3, nazývame trianguláciou.

**Definícia 1.3.3.** Nech  $G = (V, E)$  je planárny graf s množinou stien  $F$ . Potom duálny graf  $G^* = (V^*, E^*)$  ku grafu  $G$  je definovaný nasledovne:  $V^* = F, F^* = V$  a

$$E^* = \{f_1 f_2 \mid f_1, f_2 \in F \wedge f_1, f_2 \text{ sú susedné v } G\}$$

**Veta 1.3.4.** Nech  $G$  je kubický graf. Potom  $G^*$  je triangulácia.

Nasledujúca veta využíva pojem stereografickej projekcie [24]:

**Veta 1.3.5.** Graf  $G$  sa dá nakresliť do roviny práve vtedy, keď sa dá nakresliť na sféru (gulovú plochu).

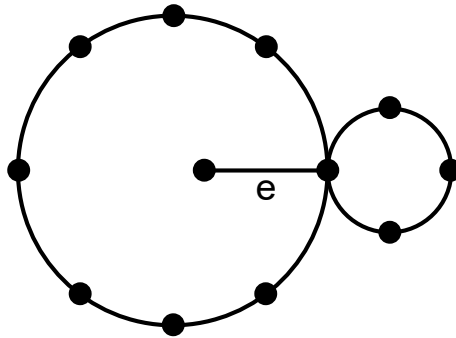
*Dôkaz.* Využitím stereografickej projekcie. Nech  $\alpha$  je rovina, v ktorej je nakreslený graf  $G$ . Umiestnime sféru do trojrozmerného priestoru tak, aby sa dotýkala roviny  $\alpha$ . Označme  $y$  bod sféry, ktorý je najvzdialenejší od  $\alpha$ .

Každému bodu  $x \neq y$  na povrchu sféry priradíme bod  $x'$  v rovine  $\alpha$ , kde  $x'$  je priesečník priamky  $xy$  s rovinou  $\alpha$ . Ak máme nakreslenie na sfére a jeho hrany sa nepretínajú, stereografická projekcia ho zobrazí na rovinné nakreslenie. Opačná projekcia zase zobrazí nakreslenie v rovine na nakreslenie na sfére. Toto zobrazenie je teda bijektívne.  $\square$

Hassler Whitney dokázal v roku 1933 významnú vetu o planárnych 3-súvislých grafoch [23]:

**Veta 1.3.6** (Whitney). *Pre každý planárny 3-súvislý graf  $G$  existuje jednoznačné nakreslenie do roviny. Dve nakreslenia sú ekvivalentné, ak sa líšia iba voľbou vonkajšej steny.*

Predpoklad 3-súvislosti je vo Whitneyho vete nevyhnutný. Na obrázku 1.1 uvádzame jednoduchý príklad planárneho grafu, ktorý nemá jednoznačné nakreslenie do roviny (hrana  $e$  môže byť aj vo vnútri menšej kružnice, aj vo vnútri väčšej kružnice):



Obr. 1.1: Planárny graf, ktorý nemá jednoznačné nakreslenie do roviny

**Veta 1.3.7.** (Euler) *Nech  $G$  je planárny súvislý graf. Nech  $n$  je počet jeho vrcholov,  $e$  počet hrán a  $f$  počet oblastí v grafe  $G$ . Potom platí  $v - e + f = 2$ . Počet oblastí nezávisí od nakreslenia grafu.*

**Dôsledok 1.3.8.** *Nech  $G$  je kubický planárny graf. Potom priemerná veľkosť steny v  $G$  je menšia ako 6.*

## 1.4 Bipartitné grafy

**Definícia 1.4.1.** *Graf  $G = (V, E)$  nazývame bipartitným, ak existuje rozklad množiny vrcholov  $V$  na disjunktné podmnožiny  $A, B$ , pričom každá hrana  $e \in E$  má jeden*

koncový vrchol v  $A$  a druhý v  $B$ .

**Veta 1.4.2.** Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

**Dôsledok 1.4.3.** Nech  $G$  je bipartitný planárny graf. Potom  $G$  obsahuje iba steny párnej dĺžky, pričom každá z nich má veľkosť aspoň 4.

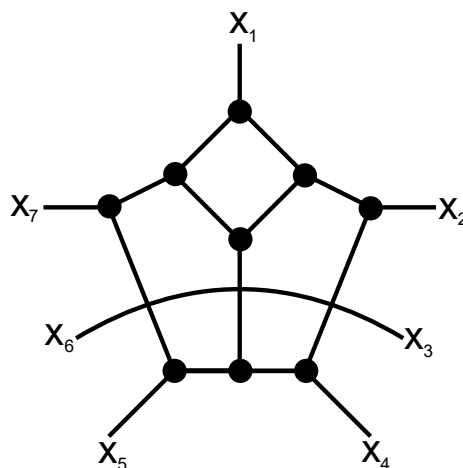
**Veta 1.4.4.** Kubický bipartitný graf nemá most.

## 1.5 Multipóly

Predmetom skúmania nebudú celé grafy, ale iba niektorá ich časť (podgraf). Pracujeme teda s rozšírením pojmu podgrafu, ktorý má niektoré z jeho hrán označené ako „okrajové“ (tým chceme naznačiť, že dané hrany spájajú podgraf so zvyškom grafu). V roku 1991 Miquel Angel Fiol pomenoval v svojej práci túto grafovú štruktúru ako multipól [9]:

**Definícia 1.5.1.** Multipól ( $m$ -pól) je usporiadaná trojica  $M = (V, E, X)$ , kde  $V$  je konečná neprázdna množina vrcholov,  $E \subseteq \binom{V \cup X}{2}$  je množina hrán a  $X$  je konečná množina  $m$  prvkov (polhrán), pričom pre každú polhranu  $x \in X$  existuje práve jeden vrchol alebo polhrana  $u \in V \cup X$  taká, že  $xu \in E$ .

**Príklad 1.5.2.** Na obrázku 1.2 je znázornený multipól  $M = (V, E, X)$  s množinou polhrán  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ .



Obr. 1.2: Multipól [9]

V práci sa budeme zaoberať multipólmi, ktoré majú kubickú, planárnu aj bipartitnú vlastnosť (neskôr sa zameriame aj na 3-súvislosť). Nové pojmy pre tieto špecifické typy multipólov si zdefinujeme v nasledujúcej kapitole.

# Kapitola 2

## Analýza problému

V teórii grafov existuje veľa otvorených problémov. Jeden z nich sa týka Hamiltonovských kružníc v špecifickej triede podgrafov. Je známy pod názvom Barnettova hypotéza [4].

V tejto kapitole uvidíme opis otvoreného problému (Barnettovej hypotézy) a súčasného stavu problematiky spolu s doterajšími známymi výsledkami.

**Definícia 2.1.** *Nech  $G$  je kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf. Potom  $G$  nazývame Barnettovým grafom.*

**Hypotéza 2.2.** *(Barnette) Všetky Barnettove grafy sú Hamiltonovské.*

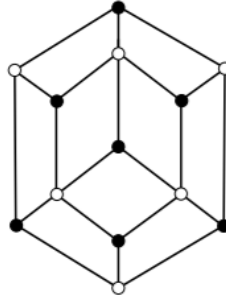
Túto hypotézu sformuloval v roku 1969 David Barnette [4]. Doteraz nebola dokázaná ani vyvrátená. Sú však známe protipríklady pre silnejšie verzie hypotézy, čiastočné výsledky pre iné triedy grafov a ekvivalentné formulácie [12].

### 2.1 Silnejšie hypotézy

Všetky štyri predpoklady Barnettovej hypotézy sú nevyhnutné. Ak ľubovoľný z nich vynecháme, vieme nájsť vyhovujúci protipríklad bez Hamiltonovskej kružnice [12].

**Hypotéza 2.1.1.** *Všetky planárne bipartitné 3-súvislé grafy sú Hamiltonovské.*

Táto hypotéza nie je pravdivá. Existuje jednoduchý nekubický protipríklad s 13 vrcholmi (tzv. *Kirkmanov* graf [5]) uvedený na obrázku 2.1:

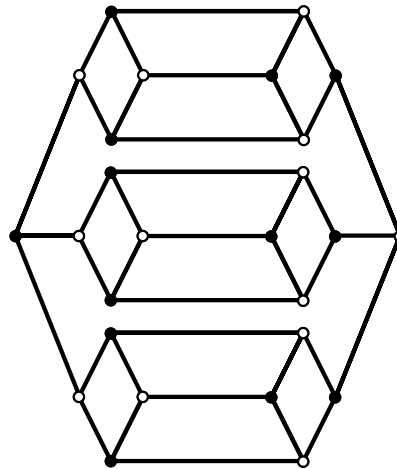


Obr. 2.1: Kirkmanov graf [5]

**Hypotéza 2.1.2.** *Všetky kubické planárne bipartitné grafy sú Hamiltonovské.*

Ani táto hypotéza neplatí. Problém Hamiltonovskej kružnice je  $NP$ -úplný aj pre kubické planárne bipartitné grafy. Môžeme teda zobrať nespĺniteľnú logickú formulu a transformovať ju na kubický planárny bipartitný graf, ktorý neobsahuje Hamiltonovskú kružnicu [1].

Najmenší protipríklad má 26 vrcholov (obrázok 2.2), čo v roku 1982 dokázal Takao Asano pomocou úplného počítačového prehľadávania [3]:

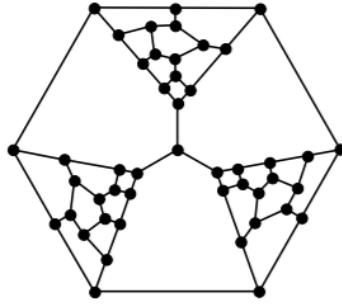


Obr. 2.2: Asanov graf [3]

Tait vyslovil nasledovnú hypotézu [17]:

**Hypotéza 2.1.3.** *(Tait) Všetky kubické planárne 3-súvislé grafy sú Hamiltonovské.*

Britský matematik William Tutte vyvrátil [20] Taitovu domnienku konštrukciou nasledovného grafu (obrázok 2.3):

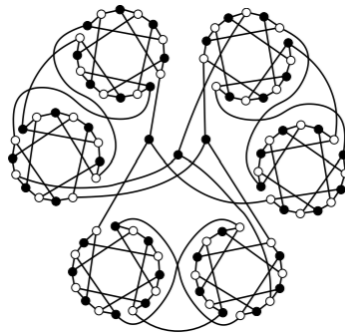


Obr. 2.3: Tuttov kubický planárny 3-súvislý graf bez Hamiltonovskej kružnice [20]

Na základe svojich pozorovaní sformuloval vlastnú hypotézu [21], ktorá pracovala s bipartitnými a nie planárnymi grafmi:

**Hypotéza 2.1.4.** (*Tutte*) *Všetky kubické bipartitné 3-súvislé grafy sú Hamiltonovské.*

Tuttovu domnienku však vyvrátil Joseph Horton nájdením protipríkladu s 96 vrcholmi [6]. Dnes je už známy pod názvom *Hortonov graf* (obrázok 2.4):



Obr. 2.4: Hortonov graf [6]

Neskôr bol objavený menší protipríklad s 50 vrcholmi. V roku 2022 sa pomocou počítačového prehľadávania dokázalo, že ide o najmenší protipríklad [7].

## 2.2 Iné triedy grafov

Keďže ani jeden predpoklad znenia Barnettovej hypotézy nesmie byť vynechaný, matematici sa zamerali na odlišnú triedu grafov a dokazovanie existencie Hamiltonovskej kružnice s požadovanými vlastnosťami práve pre tieto triedy grafov. Aj v tejto oblasti bol urobený rozsiahly prieskum a niektoré výsledky sú veľmi zaujímavé.

Barnettova hypotéza platí pre planárne 4-súvislé grafy, ako ukázali Tutte a Thomassen [18, 19]:

**Veta 2.2.1.** (*Tutte*) *Každý planárny 4-súvislý graf je Hamiltonovský.*



**Veta 2.2.2.** (Thomassen) Každý planárny 4-súvislý graf je Hamiltonovsky súvislý - pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov existuje Hamiltonovská cesta, ktorá začína v jednom vrchole a končí v druhom.

Goodey dokázal Barnettovu hypotézu pre špecifické triedy grafov s malými dĺžkami oblastí [10]:

**Veta 2.2.3.** (Goodey) Každý Barnettov graf, ktorého oblasti majú dĺžku 4 alebo 6, je Hamiltonovský.

František Kardoš v roku 2020 zosilnil jeho tvrdenie prostredníctvom počítačového dôkazu [15]:

**Veta 2.2.4.** (Kardoš) Každý kubický planárny 3-súvislý graf s dĺžkami oblastí najviac 6 je Hamiltonovský.

## 2.3 Ekvivalentné formulácie

Fakt, že nejaký graf je Hamiltonovský, nám veľmi nepomôže. Pomohlo by, keď by sme vedeli lepšie určiť jeho Hamiltonovskú kružnicu (napríklad vymedziť, ktorými hranami môže prechádzať a ktorými nie).

Barnettova domnienka je predmetom skúmania už niekoľko desaťročí. Mnohí matematici sa snažili dokázať silnejšie tvrdenia o Hamiltonovskej kružnici v Barnettovom grafe. Výsledkom ich snahy je šesť ekvivalentných formulácií [12]:

**Veta 2.3.1.** Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

1. Barnettova hypotéza je pravdivá,
2. pre ľubovoľnú hranu  $e$  Barnettovho grafu existuje Hamiltonovská kružnica, ktorá prechádza  $e$ ,
3. pre ľubovoľnú hranu  $e$  Barnettovho grafu existuje Hamiltonovská kružnica, ktorá neprechádza  $e$ ,
4. pre ľubovoľnú dvojicu hrán  $e_1, e_2$  oblasti Barnettovho grafu existuje Hamiltonovská kružnica, ktorá prechádza  $e_1$  a neprechádza  $e_2$ ,
5. pre ľubovoľnú cestu  $P$  dĺžky 3 prechádzajúcu oblasťou Barnettovho grafu existuje Hamiltonovská kružnica, ktorá prechádza strednou hranou  $P$  a neprechádza jej dvoma krajnými hranami,

6. pre ľubovoľnú cestu  $P$  dĺžky 3 prechádzajúcu oblasťou Barnettopho grafu existuje Hamiltonovská kružnica, ktorá prechádza  $P$ .

Kelmans zistil, že Barnettove grafy majú jednu špecifickú vlastnosť [2]:

**Veta 2.3.2.** (Kelmans) Barnettova domnienka platí práve vtedy, keď všetky cyklicky hranovo 4-súvislé Barnettove grafy sú Hamiltonovské.

**Poznámka 2.3.3.** Graf je cyklicky hranovo 4-súvislý, ak odstránením ľubovoľných 3 hrán nedostaneme graf s dvoma komponentmi, ktoré obsahujú cyklus.

Ak chceme vyvrátiť Barnettovu hypotézu, máme niekoľko faktov, ktoré môžeme využiť. Hrubou silou je dokázané, že najmenší protipríklad má aspoň 86 vrcholov [13]. Keďže Barnettov graf je planárny, môžeme využiť Eulerov vzorec uvedený vo vete 1.3.7. Z dôsledku 1.4.3 vyplýva, že každá oblasť Barnettopho grafu musí mať párnú dĺžku. To spolu s vetou 2.2.4 znamená, že aspoň jedna jeho oblasť musí mať dĺžku aspoň 8. Zároveň, z vety 1.4.4 vieme povedať, že Barnettov graf nemôže obsahovať most.

Okrem toho vieme využiť aj ostatné vety spomínané v tejto kapitole, najmä ekvivalentné formulácie z vety 2.3.1.

Zaujímavosťou je, že problém Hamiltonovskej kružnice je  $NP$ -úplný aj pre kubické planárne bipartitné 2-súvislé grafy. Z toho vyplýva, že ak by sme dokázali  $NP$ -úplnosť problému pre Barnettove grafy (ktoré sú 3-súvislé), vyvrátili by sme spomínanú hypotézu. Mohli by sme totiž k danej nesplniteľnej logickej formule zostrojiť Barnettov graf, ktorý nemá Hamiltonovskú kružnicu [1].

## 2.4 Redukovateľné konfigurácie

Teraz prejdeme k jadru našej práce. Jedným z prístupov, ako vyvrátiť Barnettovu hypotézu, je skúmať redukovateľné konfigurácie.

Myšlienka je nasledovná: vezmime si dva multipóly  $M_G, M_R$ , pričom  $M_G$  má viac vrcholov ako  $M_R$ . Predpokladajme, že ľubovoľnú možnosť, akou môže  $M_R$  prechádzať Hamiltonovská kružnica, vieme rozšíriť aj v  $M_G$ . Ak je Barnettova hypotéza nepravdivá, potom existuje najmenší graf  $G$ , ktorý je jej protipríkladom. Ak  $G$  obsahuje  $M_G$  ako podgraf, vieme ho nahradiť  $M_R$  a tým získať graf s menším počtom vrcholov (čo je spor s tým, že  $G$  je najmenší možný). Redukovateľné konfigurácie sú teda podgrafy, ktoré sa zaručene nemôžu vyskytovať v protipríkladoch s najmenším počtom vrcholov.

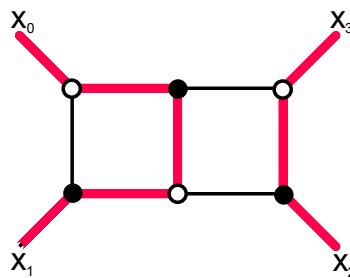
Od multipólov  $M_G, M_R$  budeme vyžadovať, aby mali nasledovné vlastnosti zo znenia Barnettovej hypotézy: kubickosť, planaritu a bipartitnosť. Ak by sme ich chceli zdefinovať rovnako ako klasické multipóly, narazíme na problém. Tým, že  $M_G, M_R$  sú planárne, vieme ich až na voľbu vonkajšej steny jednoznačne zakresliť do roviny [23], čím odrazu začne záležať na cyklickom poradí vychádzajúcich polhrán. Teda  $X$  musíme definovať ako usporiadanú  $n$ -tícu a nie iba ako neusporiadanú množinu. Teraz sme už pripravení vysloviť definíciu nami skúmaných redukovateľných konfigurácií:

**Definícia 2.4.1.** *Nech  $M = (V, E, X), |X| = p$  je multipól, ktorý má kubickú, bipartitnú a planárnu vlastnosť a všetky jeho polhrany  $x \in X$  smerujú do vonkajšej steny. Potom  $M' = (V, E, X')$  nazývame KBP-multipólom, kde  $X'$  je usporiadaná  $p$ -tíca prvkov  $X$  reprezentujúca cyklické poradie polhrán KBP-multipólu  $M'$ . Hodnotu  $|V| + |X'|$  nazývame veľkosťou KBP-multipólu.*

Skratka KBP v názve má zdôrazňovať tri nevyhnutné vlastnosti: kubickosť, bipartitnosť a planaritu.

**Definícia 2.4.2.** *Nech  $M = (V, E, X)$  je KBP-multipól. Množinu  $h \subseteq \binom{X}{2}$  nazývame Hamiltonovskou možnosťou (H-možnosťou), ak  $h_1 \cap h_2 = \emptyset$  pre všetky rôzne  $h_1, h_2 \in h$  a zároveň je možné  $M$  pokryť cestami, ktorých množina dvojíc koncových polhrán je  $h$ . Namiesto  $\{h_i, h_j\} \in h$  píšeme spravidla len  $h_i h_j$ . Množinu všetkých Hamiltonovských možností KBP-multipólu  $M$  označujeme  $H(M)$ .*

**Príklad 2.4.3.** *Na obrázku 2.5 je znázornený KBP-multipól  $M = (V, E, X)$  s Hamiltonovskou možnosťou  $h = \{x_0 x_1, x_2 x_3\}$ .*



Obr. 2.5: KBP-multipól s Hamiltonovskou možnosťou

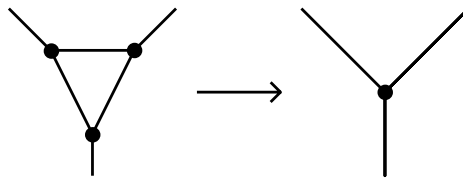
**Definícia 2.4.4.** *Nech  $M_G = (V_G, E_G, X), M_R = (V_R, E_R, X)$  sú KBP-multipóly, pričom  $|V_R| < |V_G|$ . Hovoríme, že  $M_G$  je redukovateľný na  $M_R$ , ak pre ich Hamiltonovské možnosti platí  $H(M_R) \subseteq H(M_G)$ . V takom prípade nazývame  $M_G$  redukovateľnou konfiguráciou a  $M_R$  jej reduktorom.*

### 2.4.1 Známe redukovateľné konfigurácie

Ak v multipóle povolíme kružnice nepárnej dĺžky (nebudeme brať do úvahy bipartitnú vlastnosť), najjednoduchšou redukovateľnou konfiguráciou je trojuholník [15]:

**Veta 2.4.5.** *Trojuholník je redukovateľná konfigurácia.*

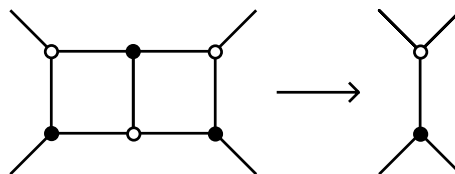
*Dôkaz.* Ľubovoľný trojuholník vieme zredukovať na samostatný vrchol (podľa obrázku 2.6). Ľahko nahliadneme, že k ľubovoľnej Hamiltonovskej kružnici prechádzajúcej reductorom vieme zostrojiť Hamiltonovskú kružnicu prechádzajúcu pôvodným grafom.  $\square$



Obr. 2.6: Redukcia trojuholníka na samostatný vrchol [15]

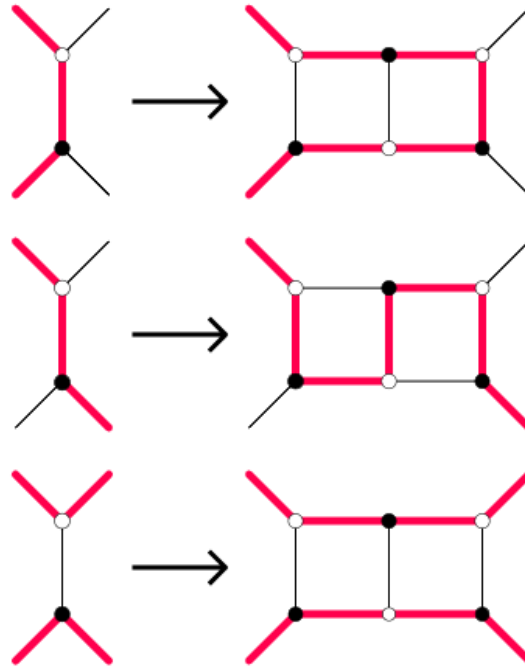
Ďalšími známymi redukovateľnými konfiguráciami sú dve susedné steny veľkosti 4 a tri susedné steny veľkosti 4 [15]:

**Veta 2.4.6.** *Nech  $M_{44}$  je KBP-multipól, ktorý vznikol spojením dvoch oblastí dĺžky 4 (obrázok 2.7). Potom  $M_{44}$  je redukovateľná konfigurácia.*



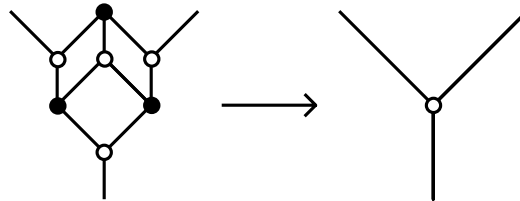
Obr. 2.7: Redukovateľná konfigurácia  $M_{44}$  a jej reductor  $M_{44R}$  [15]

*Dôkaz.* Nech  $G_{min}$  je najmenší hypotetický protipríklad Barnettovej hypotézy. Ukážeme, že multipól  $M_{44R}$  je reductorom  $M_{44}$ . Existujú len tri možnosti (až na symetriu) ako môže Hamiltonovská kružnica prechádzať reductorom  $M_{44R}$  (znázornené na obrázku 2.8). Keďže ku každej z nich vieme zostrojiť ekvivalentnú Hamiltonovskú kružnicu prechádzajúcu  $M_{44}$ , môžeme konfiguráciu  $M_{44}$  z  $G_{min}$  nahradiť reductorom  $M_{44R}$ , čím vznikne menší protipríklad  $G'_{min}$ . To je spor s tým, že  $G_{min}$  je protipríklad s najmenším počtom vrcholov.  $\square$



Obr. 2.8: Dôkaz redukovateľnosti multipólu  $M_{44}$  [15]

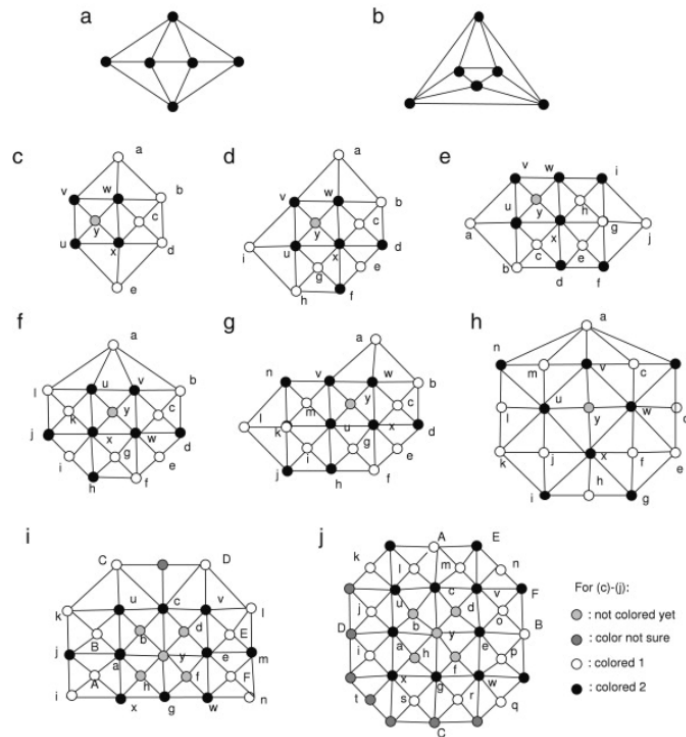
**Veta 2.4.7.** *Nech  $M_{444}$  je KBP-multipól, ktorý vznikol spojením troch oblastí dĺžky 4 (obrázok 2.9). Potom  $M_{444}$  je redukovateľná konfigurácia.*



Obr. 2.9: Redukovateľná konfigurácia  $M_{444}$  a jej reduktor  $M_{444_R}$  [15]

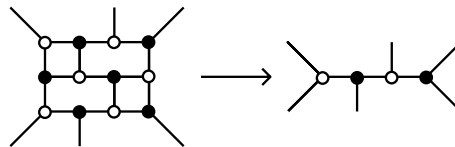
*Dôkaz.* Podobne ukážeme, že  $M_{444_R}$  je reduktorom  $M_{444}$ . Pre každú možnosť ako môže Hamiltonovská kružnica prechádzať  $M_{444_R}$  vieme zostrojiť ekvivalentnú Hamiltonovskú kružnicu prechádzajúcu  $M_{444}$ . Rozdiel oproti predošlej redukcii je ten, že nám mohol vzniknúť graf s násobnými hranami. To sa však mohlo stať jedine v prípade, že  $G_{min}$  bola kocka, čo je Hamiltonovský graf.  $\square$

Xiayoun Lu skúmal redukovateľné konfigurácie v duálnej triangulácii pôvodného grafu. Prehľadávaním našiel 10 rôznych redukovateľných konfigurácií duálnych grafov [16], ktoré sú uvedené na obrázku 2.10:



Obr. 2.10: Luove reducovateľné konfigurácie [16]

Pre ilustráciu: prvé dva duálne grafy reprezentujú multipóly  $M_{44}$  a  $M_{444}$ . Tretí reprezentuje multipól  $M_{4664}$  znázornený na obrázku 2.11:



Obr. 2.11: Redukovateľná konfigurácia  $M_{4664}$  a jej reduktor  $M_{4664_R}$  [16]

Luov algoritmus však nepoužíval úplné prehľadávanie. To znamená, že môžu existovať aj ďalšie reducovateľné konfigurácie s nízkym počtom vrcholov.

Holton objavil ďalšie reducovateľné konfigurácie [13]. Tie však obsahujú už menšiu reducovateľnú konfiguráciu, a preto ich nebudeme skúmať.

Prečo sa zaoberáme multipólmi so stenami malej dĺžky? Z dôsledku 1.3.8 vyplýva, že ak má kubický bipartitný planárny graf veľa stien veľkej dĺžky, tak musí obsahovať aj veľa stien malej dĺžky (4 alebo 6). Ak by sa ukázalo, že všetky konfigurácie s malými stenami po určitú hranicu sú reducovateľné (a teda malé steny v najmenšom protipríklade sú nutne obklopené veľkými), došli by sme k sporu a tým dokázali Barnetovu hypotézu.

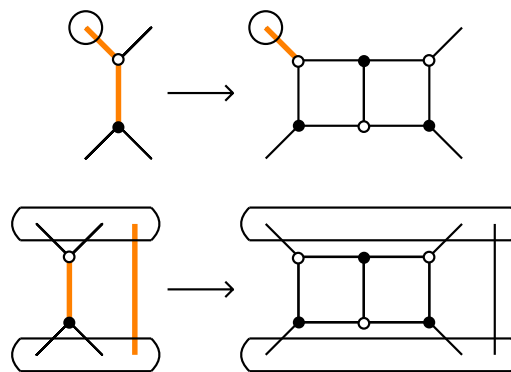
### 2.4.2 3-súvisle redukovateľné konfigurácie

Môžeme si všimnúť, že definícia redukovateľnej konfigurácie  $M_G$  a jej reduktora  $M_R$  zahŕňa kubickú, bipartitnú a planárnu vlastnosť, ale nie 3-súvislosť. Ak zohľadníme aj 3-súvislosť, tak niektoré konfigurácie prestanú byť redukovateľnými. Inými slovami: môže sa stať, že ak v 3-súvislom grafe nahradíme KBP-multipól  $M_G$  KBP-multipólom  $M_R$ , dostaneme graf, ktorý už túto vlastnosť nemá.

Definícia tohto typu redukovateľnosti je v mnohých ohľadoch otvorená na interpretáciu. Začneme netradične, a to opisom prístupu, akým sa zvykne dokazovať 3-súvislá redukovateľnosť pre daný multipól [15]. Novú definíciu uvedieme na konci tejto podkapitoly.

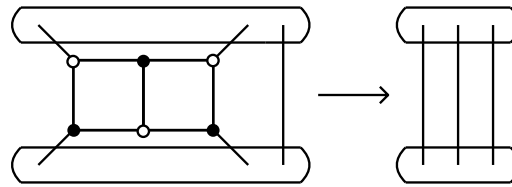
**Veta 2.4.8.**  $M_{44}$  je 3-súvisle redukovateľná konfigurácia.

*Dôkaz.* Z vety 2.4.6 vieme, že  $M_{44}$  je redukovateľná konfigurácia a poznáme aj jej reduktor  $M_{44_R}$ . Stačí len dokázať, že aplikovaním tejto redukcie nemôžeme dostať graf, ktorý nie je 3-súvislý. Z vety 1.2.7 vyplýva, že stačí skúmať hranovú 3-súvislosť. Predpokladajme, že graf  $G$  obsahujúci multipól  $M_{44}$  je hranovo 3-súvislý, ale po nahradení multipólu  $M_{44}$  jeho reduktorom  $M_{44_R}$  dostaneme graf  $G_R$ , ktorý obsahuje hranový 2-rez. Potom musí byť prostredná hrana reduktora  $M_{44_R}$  nutne jeho súčasťou (inak by ľubovoľný 2-rez v  $G_R$  bol 2-rezom aj v  $G$ , čo je spor). Z toho vyplýva, že buď je 2-rez v  $G_R$  tvorený prostrednou hranou a niektorou z polhrán  $M_{44_R}$ , alebo prostrednou hranou a hranou mimo multipólu  $M_{44_R}$  (obrázok 2.12).

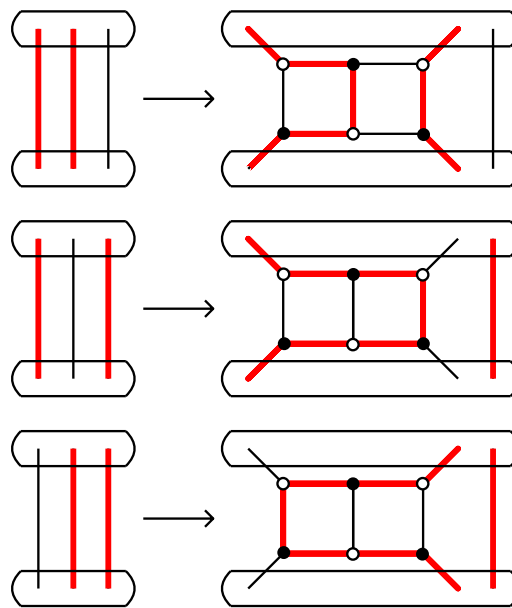


Obr. 2.12: Hranové 2-rezy v reduktore  $M_{44_R}$  [15]

V prvom prípade by graf  $G$  obsahoval most, čo je spor s vetou 1.4.4. Druhá možnosť je prípustná a vedie k nevyhnutnej 3-súvislej vonkajšej štruktúre grafu  $G$ . Našli sme teda jedinou štruktúru, ktorú  $G$  musí mať na to, aby sme aplikáciou redukcie z vety 2.4.6 pokazili 3-súvislú vlastnosť. Štandardným trikom je nájsť inú redukciu, ktorá pokryje tento špecifický prípad. Konkrétne použijeme redukciu uvedenú na obrázku 2.13:

Obr. 2.13: Nová 3-súvislá redukcia multipólu  $M_{44}$  [15]

Táto redukcia zjavne nemôže poukaziť na 3-súvislosť. Zároveň, vzhľadom na vonkajšiu štruktúru vieme každú Hamiltonovskú kružnicu prechádzajúcu grafom  $G_R$  rozšíriť v grafe  $G$  (obrázok 2.14). Tým sme dokázali, že pre každú vonkajšiu grafovú štruktúru existuje redukcia, a teda  $M_{44}$  je 3-súvisle redukovateľná.

Obr. 2.14: Dôkaz 3-súvislej redukovatenosti multipólu  $M_{44}$  [15]

□

Na základe predošlého dôkazu definujeme 3-súvislú redukovateľnosť cez rozšírenie KBP-multipólu o množiny, ktoré nazveme komponentmi. Komponenty budú reprezentovať platnú štruktúru vonkajšej časti multipólu:

**Definícia 2.4.9.** Štruktúrovaný KBP-multipól je štvorica  $M = (V, E, X, C)$ , kde  $(V, E, X)$  je KBP-multipól a  $C$  je konečná neprázdna množina komponentov, pričom sú splnené nasledovné podmienky:

1. každá polhrana  $x \in X$  je v práve jednom komponente  $c \in C$ ,
2. každá dvojica komponentov  $c_1, c_2 \in C$  môže alebo nemusí byť spojená hranou,
3. KBP-multipól  $M$  s pridanou množinou komponentov  $C$  je planárny.

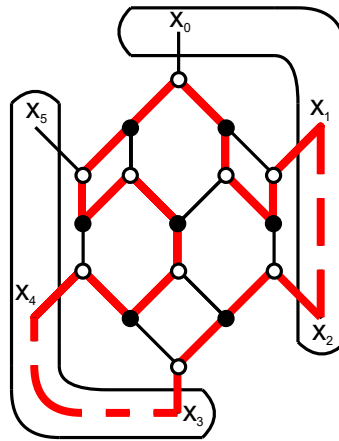


**Definícia 2.4.10.** *Nech  $M = (V, E, X, C)$  je štruktúrovaný KBP-multipól a  $C' \subseteq E$  je množina všetkých hrán, ktoré spájajú dva komponenty  $c_i, c_j \in C$  v  $M$ . Množinu  $h \subseteq \binom{X}{2}$  nazývame Hamiltonovskou možnosťou (H-možnosťou), ak platia nasledovné podmienky:*

1.  $h_1 \cap h_2 = \emptyset$  pre všetky rôzne  $h_1, h_2 \in h$ ,
2. KBP-multipól  $M$  je možné pokryť cestami, ktorých množina dvojíc koncových polhrán je  $h$  a tie sa dajú v rámci vonkajšej štruktúry rozšíriť na špeciálnu Hamiltonovskú kružnicu, ktorá môže prechádzať komponentmi viackrát.

Množinu všetkých H-možností štruktúrovaného KBP-multipólu  $M$  označujeme  $H(M)$ .

**Príklad 2.4.11.** *Na obrázku 2.15 je znázornený KBP-multipól  $M = (V, E, X, C)$  s H-možnosťou  $h = \{h_1h_4, h_2h_3\}$ , kde  $X = (x_0, \dots, x_5)$  a  $|C| = 2$ .*



Obr. 2.15: Štruktúrovaný KBP-multipól s Hamiltonovskou možnosťou

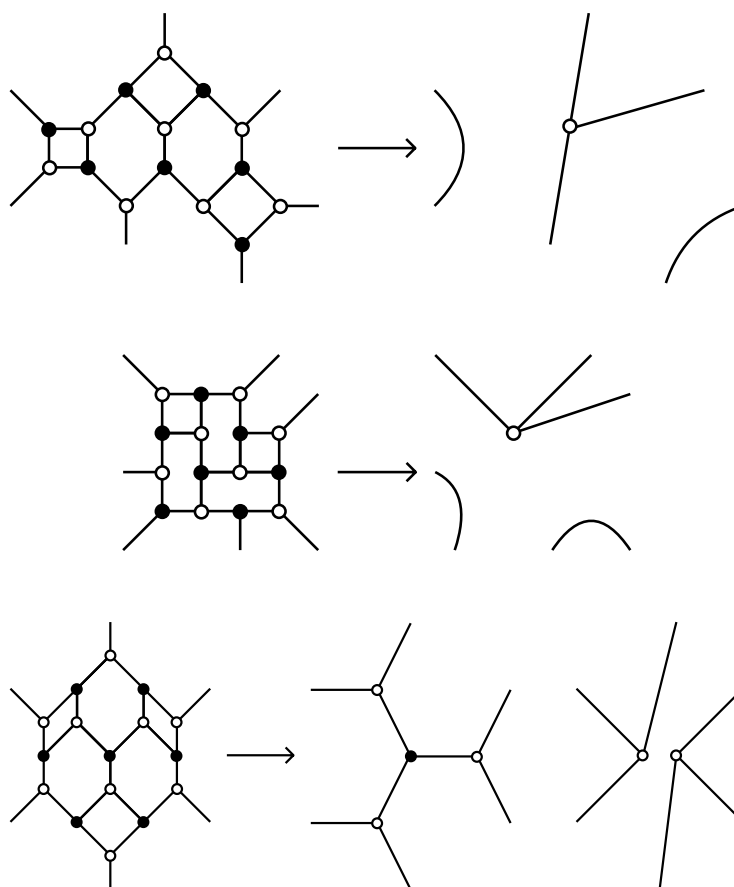
**Definícia 2.4.12.** *Nech  $M_G = (V_G, E_G, X)$  je KBP-multipól. Hovoríme, že  $M_G$  je 3-súvisle redukovateľný, ak pre každú prípustnú množinu komponentov  $C$  a štruktúrovaný KBP-multipól  $M'_G = (V_G, E_G, X, C)$  existuje taký štruktúrovaný KBP-multipól  $M_R = (V_R, E_R, X, C)$ , že  $|V_R| < |V_G|$  a pre ich Hamiltonovské možnosti platí  $H(M_R) \subseteq H(M'_G)$ . V takom prípade nazývame  $M_G$  3-súvisle redukovateľnou konfiguráciou a  $M_R$  jej 3-súvislým reduktorom.*

# Kapitola 3

## Nové redukovateľné konfigurácie

V tejto kapitole uvedieme zoznam redukovateľných konfigurácií nájdených počítačovým prehľadávaním. V troch z nich ukážeme, že sú 3-súvisle redukovateľné. Nakoniec odprezentujeme významný objav: novú nekonečnú triedu redukovateľných konfigurácií.

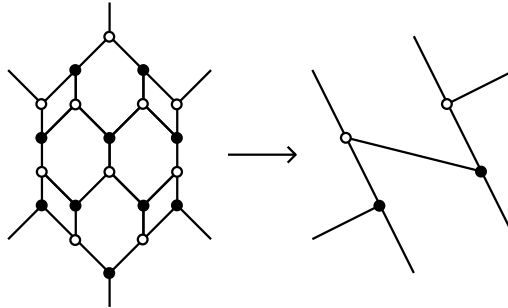
Implementácii programu budeme venovať priestor v kapitole 5. Prehľadali sme všetky KBP-multipóly po veľkosť 21 s nanajvyš 10 polhrami. Našli sme 3 nové redukovateľné konfigurácie  $M_{46464}$ ,  $M_{46664}$  a  $M_{464646}$  uvedené na obrázku 3.2:



Obr. 3.1: Nové redukovateľné konfigurácie  $M_{46464}$ ,  $M_{46664}$  a  $M_{464646}$

V zozname sú iba tie redukovateľné konfigurácie, ktoré neboli spomenuté v predchádzajúcej kapitole, neobsahujú menšiu redukovanú konfiguráciu a nepatria do nekonečnej triedy B-konfigurácií (s tou budeme pracovať v podkapitole 3.2). Ostatné prehľadané KBP-multipóly nemali žiadny reduktor.

Okrem toho sme overili redukovateľnosť Luových konfigurácií (c)–(g) uvedených na obrázku 2.10 a objavili novú redukovateľnú konfiguráciu veľkosti 26 so 6 polhranami (obrázok 3.2):



Obr. 3.2: Nová redukovateľná konfigurácia  $M_{46464646}$

Každú nájdenu redukciiu sme dodatočne overili, aby sme sa uistili, či spĺňa Hamiltonovskú vlastnosť (každá H-možnosť v reduktore sa dá rozšíriť v pôvodnej konfigurácii). Nájdene redukcie sú teda korektné.

### 3.1 3-súvisle redukovateľné konfigurácie

Ukážeme, že niektoré z nájdeneých redukovateľných konfigurácií sú zároveň aj 3-súvisle redukovateľné. Myšlienky dôkazov budú podobné dôkazu vety 2.4.8. Zistíme, aké štruktúry musí mať daný multipól na to, aby sme aplikovaním nájdenej redukcie dostali graf, ktorý nie je 3-súvislý. Pre každú takú štruktúru nájdeme inú redukciiu, ktorá zachová 3-súvislosť a zároveň sa každá H-možnosť v reduktore s danou štruktúrou bude dať rozšíriť aj v pôvodnej konfigurácii.

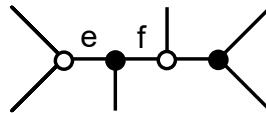
Aplikovaním 3-súvislej redukcie v kubickom planárnom bipartitnom 3-súvislom grafe dostaneme menší kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf. Všetky redukovateľné konfigurácie uvedené v tejto podkapitole sa preto určite nemôžu vyskytnúť v najmenšom protipríklade Barnettovej hypotézy.

V dôkazoch si pomôžeme tým, že ak graf obsahujúci daný multipól nie je 3-súvislý, tak nutne obsahuje vrcholový 2-rez. Z vety 1.2.7 vyplýva, že nutne obsahuje aj hranový 2-rez. To znamená, že množina vrcholov a koncov polhrán multipólu sa dá rozdeliť do

dvoch disjunktných množín  $A, B$  takých, že hrany a polhrany v 2-reze majú jeden koniec v  $A$  a druhý v  $B$  a ostatné majú oba konce v rovnakej množine. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že počet koncov polhrán v  $B$  neprevyšuje počet koncov polhrán v  $A$ .

**Veta 3.1.1.** *KBP-multipól  $M_{4664}$  je 3-súvisle redukovateľný.*

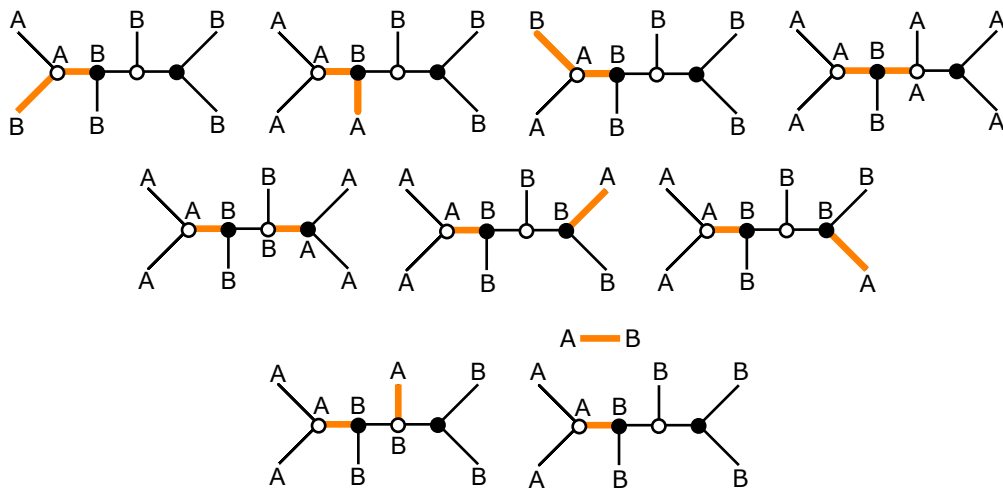
*Dôkaz.* Nech  $M_{4664_R}$  je reduktor konfigurácie  $M_{4664}$ . Označme hrany  $e, f$  v  $M_{4664_R}$  tak ako na obrázku 3.3:



Obr. 3.3: Hrany  $e, f$  v reduktore  $M_{4664_R}$

Predpokladajme, že po aplikovaní redukcie graf obsahujúci  $M_{4664_R}$  už nie je 3-súvislý, a teda má hranový 2-rez. Ak by v tomto reze neboli hrany  $e, f$ , tak rovnaký 2-rez by bol aj v pôvodnom grafe, čo je spor. Rozoberieme zvyšné dva prípady:

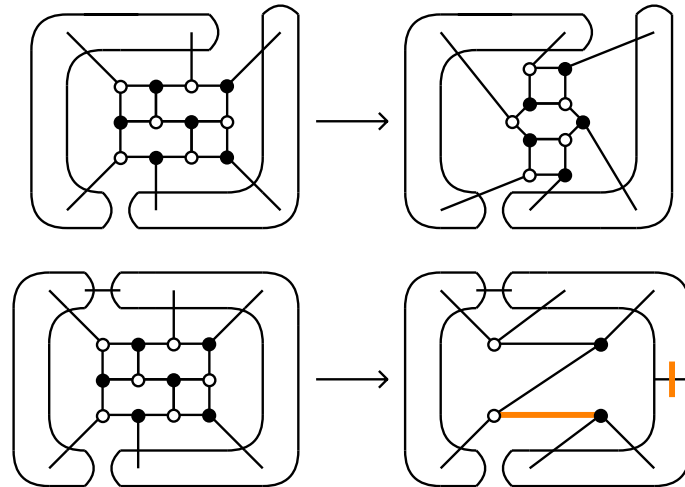
1. Ak je hrana  $e$  súčasťou 2-rezu, máme 9 rôznych možností na výber druhej hrany (obrázok 3.4):



Obr. 3.4: Hranové 2-rezy obsahujúce hranu  $e$

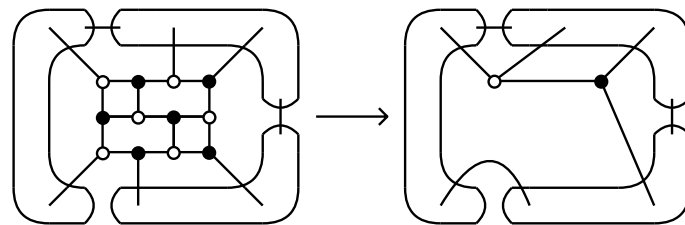
Možnosti (1), (2), (3) a (4) nie sú prípustné, pretože výsledný graf by potom obsahoval most (čo je v spore s tým, že v kubickom bipartitnom grafe nemôžu byť mosty). Možnosti (5), (6) a (7) tiež nie sú prípustné, pretože výsledný graf by nebol planárny (ak ľubovoľným spôsobom spojíme polhrany s koncami v množine  $A$  do jedného komponentu a s polhranami v množine  $B$  urobíme to isté, určite

dôjde k prekríženiu hrán). Pre možnosti (8) a (9) dokážeme nájsť iné redukcie uvedené na obrázku 3.5:



Obr. 3.5: Redukcie pre možnosti (8) a (9)

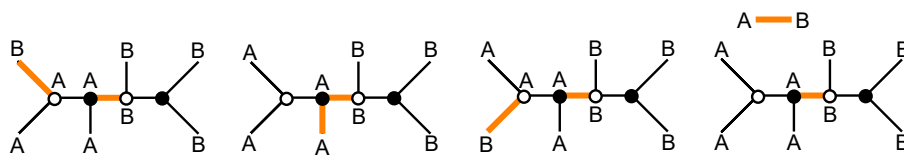
Prvá redukcia určite zachová 3-súvislosť. Ak sme aplikovaním druhej redukcie porušili 3-súvislosť, graf mohol mať jedinú možnú štruktúru. Aj pre ňu vieme nájsť vyhovujúcu redukciu, ako je znázornené na obrázku 3.6:



Obr. 3.6: Dodatočná redukcia pre možnosť (9)

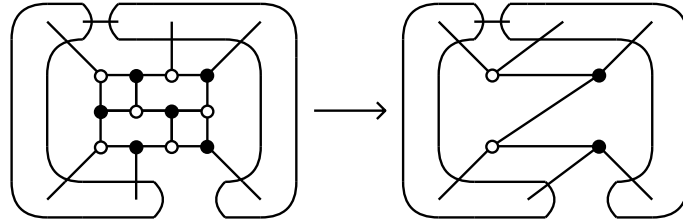
Pre každú dodatočnú redukciu vieme ručne overiť, že každá H-možnosť prechádzajúca reduktorom sa pre danú štruktúru dá rozšíriť aj v pôvodnej konfigurácii.

2. Ak hrana  $e$  nie je súčasťou 2-rezu, potom v ňom musí byť hrana  $f$ . Máme 4 rôzne možnosti na výber druhej hrany (obrázok 3.7):



Obr. 3.7: Hranové 2-rezy neobsahujúce hranu  $e$

Možnosti (1), (2) a (3) nie sú prípustné (pre prvé dve by existoval 2-rez aj v pôvodnom grafe, tretia je v spore s tým, že graf je planárny). Pre možnosť (4) opäť dokážeme nájsť inú redukciu (obrázok 3.8), ktorá zachováva 3-súvislosť aj Hamiltonovskú vlastnosť:



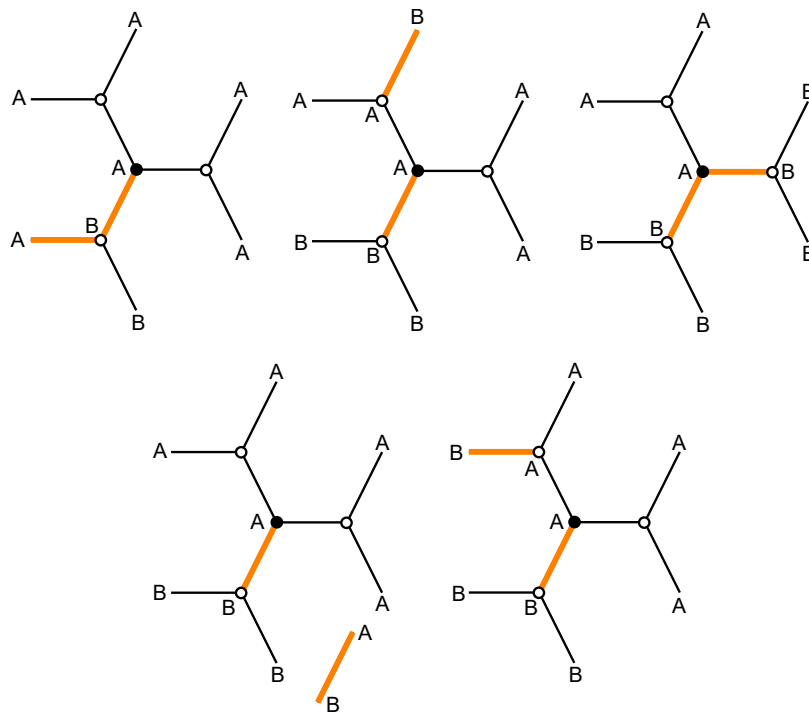
Obr. 3.8: Redukcia pre možnosť (4)

□

**Veta 3.1.2.** *KBP-multipól  $M_{464646}$  je 3-súvisle redukovateľný.*

*Dôkaz.* Nech  $M_{464646_R}$  je prvý reduktor konfigurácie  $M_{464646}$ .

1. Ak sa v  $B$  nachádzajú 2 alebo 3 konce polhrán, máme 5 možností ako môže vyzeráť 2-rez v  $M_{464646_R}$  (obrázok 3.9):

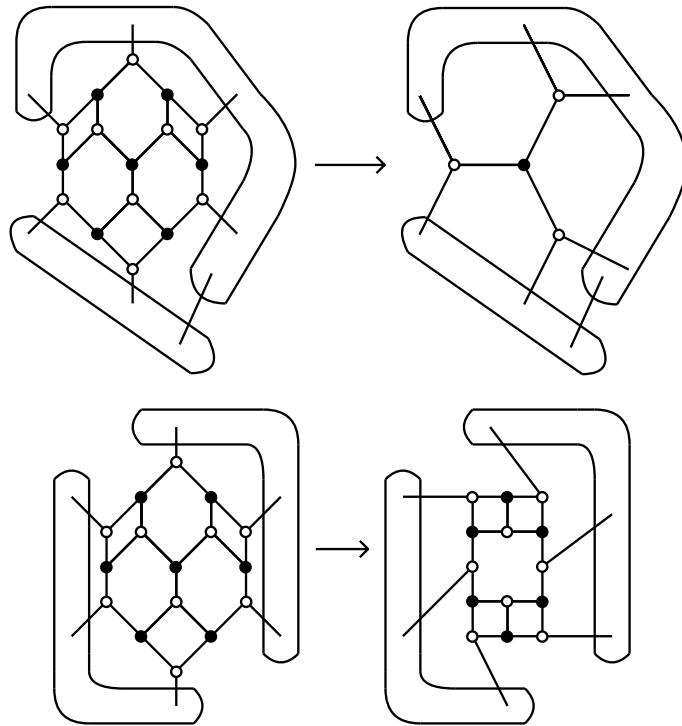


Obr. 3.9: Hranové 2-rezy v reduktore  $M_{464646_R}$

Možnosť (1) nie je prípustná, pretože výsledný graf by potom obsahoval most (čo je v spore s tým, že v kubickom bipartitnom grafe nemôžu byť mosty). Možnosť

(2) tiež nie je prípustná, pretože výsledný graf by nebol planárny (ak ľubovoľným spôsobom spojíme polhrany s koncami v množine  $A$  do jedného komponentu a s polhranami v množine  $B$  urobíme to isté, určite dôjde k prekríženiu hrán). Pre možnosť (3) ľahko overíme, že by existoval 2-rez aj v pôvodnom grafe.

Pre možnosti (4) a (5) dokážeme nájsť iné redukcie (uvedené na obrázku 3.10), ktoré zachovávajú 3-súvislosť. Pre každú z nich vieme ručne overiť, že každá H-možnosť prechádzajúca reduktorom sa pre danú štruktúru dá rozšíriť aj v pôvodnej konfigurácii.



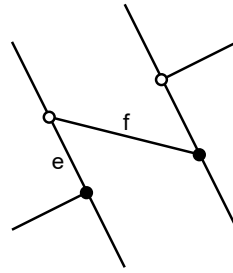
Obr. 3.10: Redukcie pre možnosti (4) a (5)

2. Ak sa 5 koncov polhrán nachádza  $A$  a jeden v  $B$ , potom by ľubovoľný 2-rez v  $M_{464646_R}$  spôsobil 2-rez aj v grafe obsahujúcom konfiguráciu  $M_{464646}$ , čo je spor.
3. Ak všetky konce polhrán sú v množine  $A$ , potom  $M_R$  nemôže obsahovať 2-rez.

□

**Veta 3.1.3.** *KBP-multipól  $M_{46464646}$  je 3-súvisle redukovateľný.*

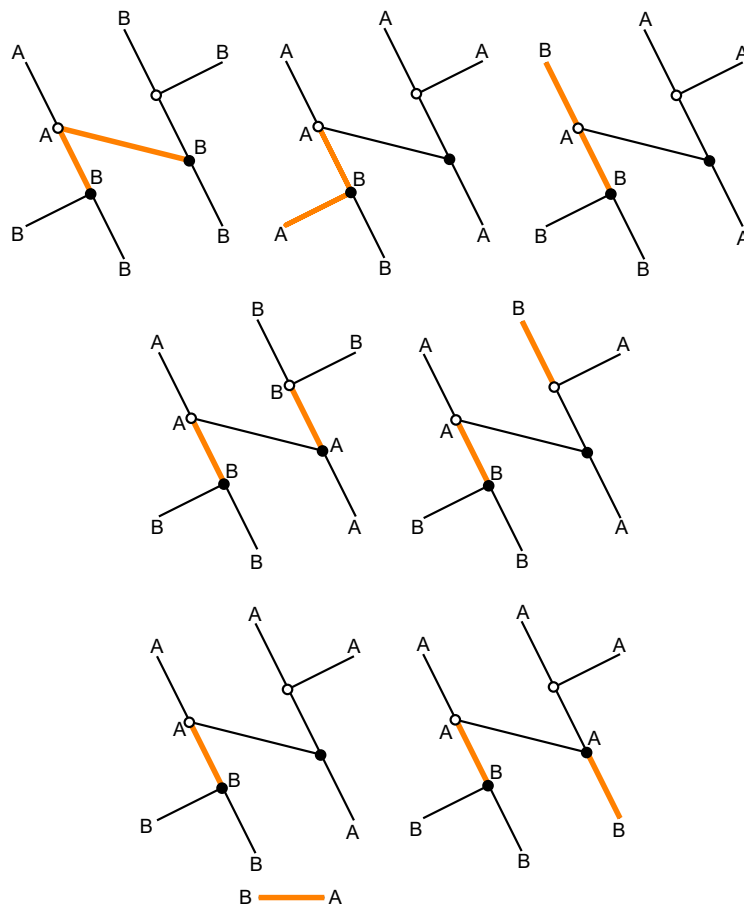
*Dôkaz.* Nech  $M_{46464646_R}$  je reduktor konfigurácie  $M_{46464646}$ . Označme hrany  $e, f$  v multipóle  $M_{46464646_R}$  tak ako na obrázku 3.11:



Obr. 3.11: Hrany  $e, f$  v reduktore  $M_{46464646_R}$

Predpokladajme, že po aplikovaní redukcie graf obsahujúci  $M_{46464646_R}$  už nie je 3-súvislý, a teda má hranový 2-rez. Ak by v tomto reze neboli hrany  $e, f$ , tak rovnaký 2-rez by bol aj v pôvodnom grafe, čo je spor. Rozoberieme zvyšné dva prípady:

1. Ak je hrana  $e$  súčasťou 2-rezu, máme 7 rôznych možností na výber druhej hrany (obrázok 3.12):



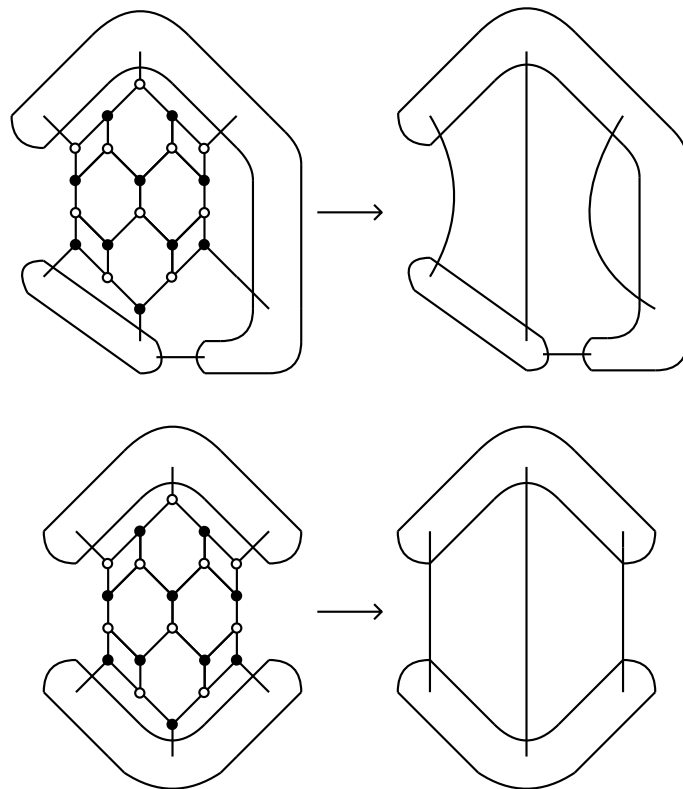
Obr. 3.12: Hranové 2-rezy obsahujúce hrana  $e$

Možnosti (1), (2) a (3) nie sú prípustné, pretože výsledný graf by potom obsahoval most (čo je v spore s tým, že v kubickom bipartitnom grafe nemôžu byť



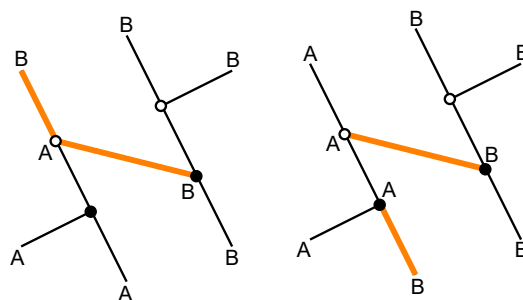
mosty). Možnosti (4) a (5) tiež nie sú prípustné, pretože výsledný graf by nebol planárny (ak ľubovoľným spôsobom spojíme polhrany s koncami v množine  $A$  do jedného komponentu a s polhranami v množine  $B$  urobíme to isté, určite dôjde k prekríženiu hrán).

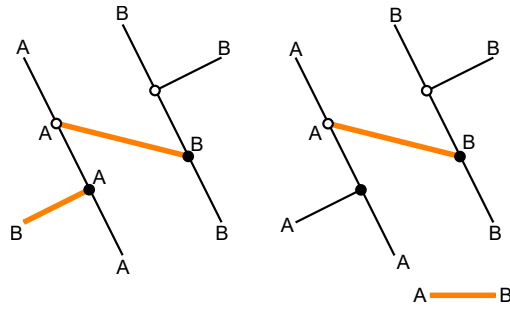
Pre možnosti (6) a (7) dokážeme nájsť iné redukcie (uvedené na obrázku 3.13), ktoré zachovávajú 3-súvislosť. Pre každú z nich vieme ručne overiť, že ľubovoľná  $H$ -možnosť prechádzajúca reduktorom sa pre danú štruktúru dá rozšíriť aj v pôvodnej konfigurácii.



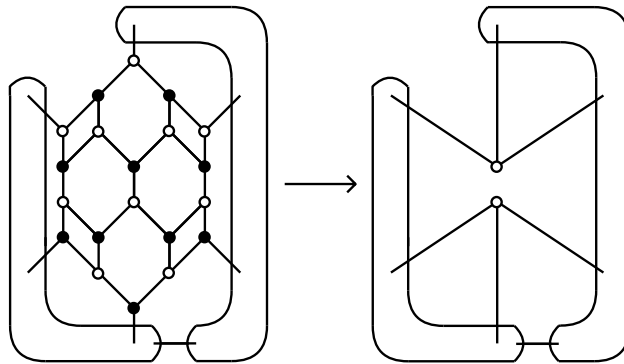
Obr. 3.13: Redukcie pre možnosti (6) a (7)

2. Ak hrana  $e$  nie je súčasťou 2-rezu, potom v ňom musí byť hrana  $f$ . Máme 4 rôzne možnosti na výber druhej hrany (obrázok 3.14):



Obr. 3.14: Hranové 2-rezy neobsahujúce hranu  $e$ 

Možnosti (1), (2) a (3) nie sú prípustné (pre prvé dve by existoval 2-rez aj v pôvodnom grafe, tretia je v spore s tým, že graf je planárny). Pre možnosť (4) opäť dokážeme nájsť inú redukciu (obrázok 3.15), ktorá zachováva 3-súvislosť aj Hamiltonovskú vlastnosť:



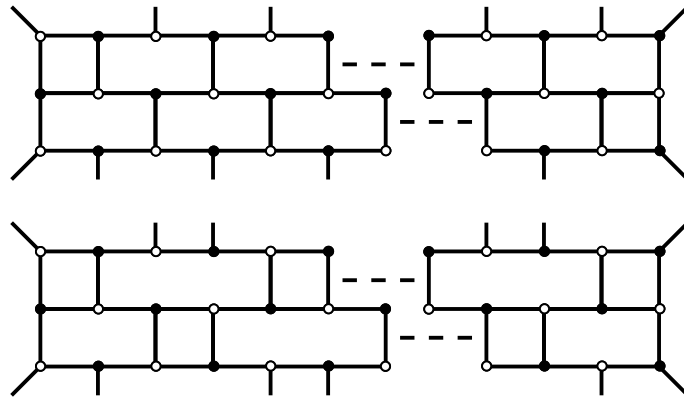
Obr. 3.15: Redukcia pre možnosť (4)

□

## 3.2 Nekonečná trieda redukovateľných konfigurácií

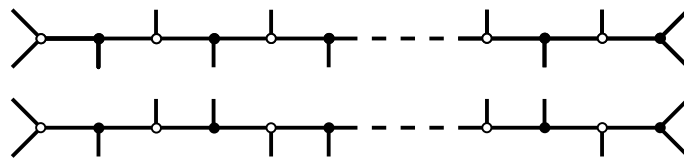
V tejto podkapitole popíšeme novú nekonečnú triedu redukovateľných konfigurácií.

Jednou zo známych redukovateľných konfigurácií je multipól  $M_{4664}$  na obrázku 2.11. Zaoberali sme sa otázkou, či sa jeho modifikáciou nedajú vytvoriť ďalšie redukovateľné konfigurácie. Jednou z prirodzených úprav bolo opakované vkladanie dvojíc stien veľkosti 6 (takýto podgraf označíme  $B_{66}$ ) alebo dvojicu zloženú zo steny veľkosti 4 a steny veľkosti 8 (takýto podgraf označíme  $B_{48}$ ) do stredu postupnosti. Tým dokážeme vytvoriť multipóly ľubovoľnej dĺžky, ako je znázornené na obrázku 3.16:

Obr. 3.16: Konfigurácie typu  $B_{66}$  a  $B_{48}$ 

Pre multipóly, ktoré vznikli postupnosťami dvojíc stien typu iba  $B_{66}$  alebo iba  $B_{48}$ , sme pomocou počítačového programu zisťovali, či sú redukovateľné. Programu sa vždy podarilo nájsť vyhovujúci reduktor, čím potvrdil redukovateľnosť. Redukovateľnosť bola potvrdená dokonca aj pre multipóly, ktoré vznikli ľubovoľnou kombináciou vkladania spomenutých dvojíc stien.

Nájdene reduktory mali špecifickú štruktúru znázornenú na obrázku 3.17. Prikladaním dvojíc typu  $B_{66}$  mal výsledný reduktor podobu multipólu, ktorého polhrany boli pripojené na spoločnú cestu striedavo zdola a zhora. Prikladaním dvojíc typu  $B_{48}$  mal reduktor podobu rovnakého multipólu, až na to, že pripojenia polhrán sa striedali s periódou 2:

Obr. 3.17: Reduktory typu  $B_{66}$  a  $B_{48}$ 

Na základe predchádzajúcich pozorovaní sme vyslovili nasledovnú hypotézu:

**Hypotéza 3.1.** Každý *KBP*-multipól, ktorý začne dvojicou stien veľkosti 4 a 6, pokračuje postupnosťou dvojíc stien typu  $B_{66}$  alebo  $B_{48}$  a skončí opäť dvojicou stien veľkosti 4 a 6, je redukovateľný.

Výsledkom celej podkapitoly bude dôkaz tejto hypotézy. Najskôr formálne definujeme dve nekonečné triedy redukovateľných konfigurácií:  $B_{66}$ -konfigurácie (ktoré vzniknú vkladáním dvojíc typu  $B_{66}$ ) a  $B_{48}$ -konfigurácie (ktoré vzniknú vkladáním dvojíc typu  $B_{48}$ ). Pre tieto triedy dokážeme, že sú redukovateľné a navyše k nim zostrojíme zodpovedajúce reduktory. Dôkaz postavíme na postupnej modifikácii ciest danej

H-možnosti reduktora tak, aby pokryli všetky vnútorné vrcholy vstupnej konfigurácie.

Potom uvedieme potrebné pojmy z teórie formálnych jazykov a automatov. Použijeme ich na to, aby sme vedeli hľadané multipóly reprezentovať jednoznačným slovom ( $B$ -popisom) nad štvorpísmenovou abecedou a vďaka tomu jednoducho popísať ich množinu vrcholov, hrán a polhrán.

Nakoniec zadefinujeme triedu  $B$ -konfigurácií, ktorá vznikne ľubovoľnou kombináciou vkladania dvojíc stien typu  $B_{66}$  a  $B_{48}$ . Dôkaz ich redukovateľnosti urobíme práve pomocou preformulovania úlohy do podoby simulácie konečných automatov, čím prepojíme teóriu grafov s teóriou formálnych jazykov.

### 3.2.1 $B_{66}$ -konfigurácie

Najprv definujeme tie multipóly, ktoré vznikli vkladáním  $n$  dvojíc stien typu  $B_{66}$ .

Vzhľadom na to, že počiatočná a koncová dvojica stien veľkosti 4 a 6 pridajú do mutipólu 6 polhrán a každá dvojica typu  $B_{66}$  pridá 2 polhrany, výsledný KBP-multipól bude mať  $2n + 6$  polhrán.

Každý vnútorný vrchol označíme  $v_{i,j}$ , kde  $i \in \{1, 2, 3\}$  označuje jeho riadok a  $j \in \{1, \dots, n\}$  stĺpec. Polhranám  $x_i, i \in \{0, \dots, n+1\}$  očísľujeme indexy podľa poradia ich navštívenia v reduktore. Množina hrán je potom zložená:

- z polhrán a k nim prislúchajúcim vrcholom,
- z hrán, ktoré spájajú vrcholy v rovnakom riadku a susedných stĺpcoch,
- z hrán, ktoré spájajú vrcholy v rovnakom stĺpci a susedných riadkoch ak z blízkeho riadku nevychádza polhrana.

Formálna definícia  $B_{66}$ -konfigurácie dĺžky  $n \in \mathbb{N}$  potom vyzerá nasledovne:

**Definícia 3.2.1.**  $B_{66}$ -konfigurácia dĺžky  $n \in \mathbb{N}$  je KBP-multipól  $M_G = (V, E, X)$  definovaný nasledovne:  $V = \{v_{i,j} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, 2n+4\}\}$ ,  $X = (x_1, x_3, \dots, x_{2n+3}, x_{2n+5}, x_{2n+4}, x_{2n+2}, \dots, x_2, x_0)$ ,

$$E = \{x_0 v_{3,1}, x_{2n+5} v_{3,2n+4}\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, 2n+3\}\} \cup \\ \{x_i v_{1,i}, v_{2,i} v_{3,i} \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{x_i v_{3,i}, v_{1,i} v_{2,i} \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}, i \equiv 0 \pmod{2}\}$$

Popísať reduktor je jednoduchšie, pretože jeho vnútorné vrcholy sú v jedinom riadku, a teda ich stačí označiť  $v_i$ :

**Definícia 3.2.2.**  $B_{66}$ -reduktor dĺžky  $n \in \mathbb{N}$  je KBP-multipól  $M_R = (V, E, X)$  definovaný nasledovne:  $V = \{v_i \mid i \in \{1, \dots, 2n + 4\}\}$ ,  $X = (x_1, x_3, \dots, x_{2n+3}, x_{2n+5}, x_{2n+4}, x_{2n+2}, \dots, x_2, x_0)$ ,

$$E = \{x_0v_1, x_{2n+5}v_{2n+4}\} \cup \\ \{x_iv_i \mid i \in \{1, \dots, 2n + 4\}\} \cup \\ \{v_iv_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, 2n + 3\}\}$$

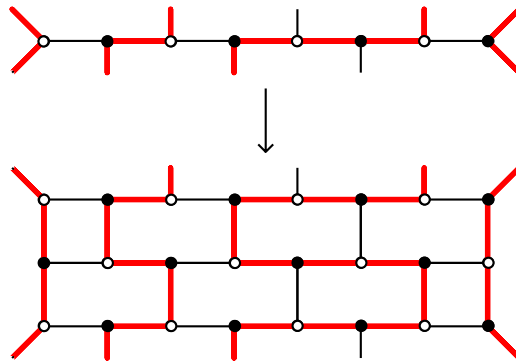
**Veta 3.2.3.** Každá  $B_{66}$ -konfigurácia dĺžky  $n$  je redukovateľná na  $B_{66}$ -reduktor dĺžky  $n$  pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dôkaz.* Nech  $M_G$  je daná  $B_{66}$ -konfigurácia dĺžky  $n$  a  $M_R$  je k nej príslušný reduktor. Dokážeme, že každá možnosť  $h \in H(M_R)$ , akou môže Hamiltonovská kružnica prechádzať  $M_R$ , sa dá rozšíriť na Hamiltonovskú kružnicu prechádzajúcu  $M_G$ . Hlavná myšlienka spočíva v rozdelení polhrán reduktora  $M_R$  na dve skupiny: horné a dolné.

Každá cesta  $P$  spájajúca polhrany  $x_1x_2 \in h$  je jednej zo štyroch typov:

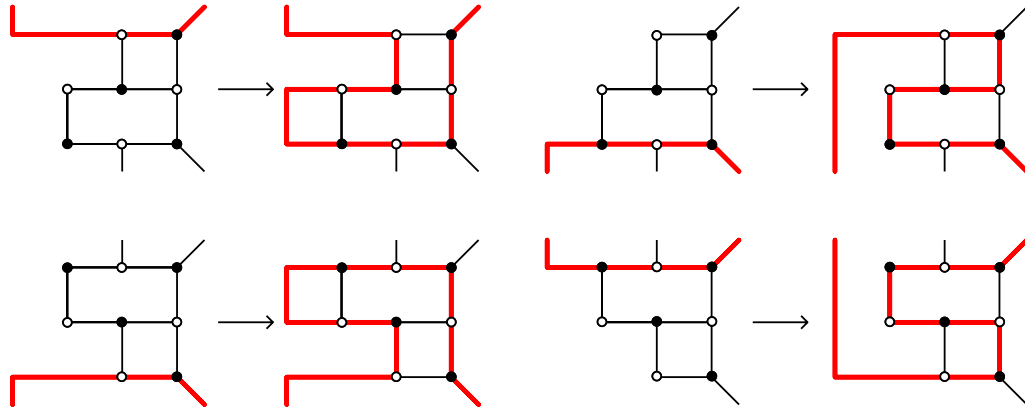
- $P$  spája dve polhrany z hornej skupiny (vtedy budeme  $P$  nazývať H-H cestou),
- $P$  spája dve polhrany z dolnej skupiny (vtedy budeme  $P$  nazývať D-D cestou),
- $P$  spája polhranu z hornej skupiny s polhranou z dolnej skupiny (vtedy budeme  $P$  nazývať H-D cestou),
- $P$  spája polhranu z dolnej skupiny s polhranou z hornej skupiny (vtedy budeme  $P$  nazývať D-H cestou).

Ak sa  $h$  skladá iba z H-D alebo D-H ciest, rozšírenie Hamiltonovskej kružnice v konfigurácii  $M_G$  je jednoduché, ako je zrejmé z obrázka 3.18:



Obr. 3.18: Rozšírenie H-D a D-H ciest

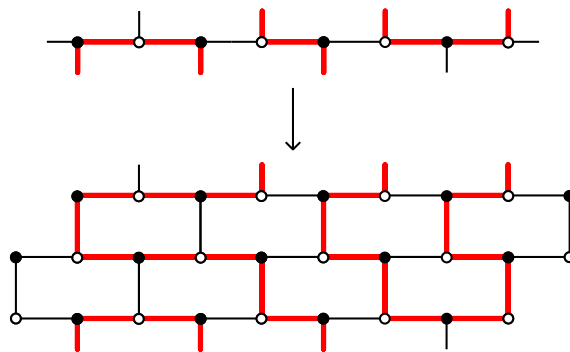
Odteraz predpokladáme, že sa v  $h$  nachádzajú nejaké D-D alebo H-H cesty. Cieľom bude opakovane modifikovať množinu všetkých ciest tak, aby tieto nakoniec pokryli všetky vnútorné vrcholy. Ak je niektorá z D-D alebo H-H ciest prvou alebo poslednou v  $h$ , vieme ju rozšíriť v rámci svojho úseku (obrázok 3.19):



Obr. 3.19: Rozšírenie prvých a posledných D-D alebo H-H ciest

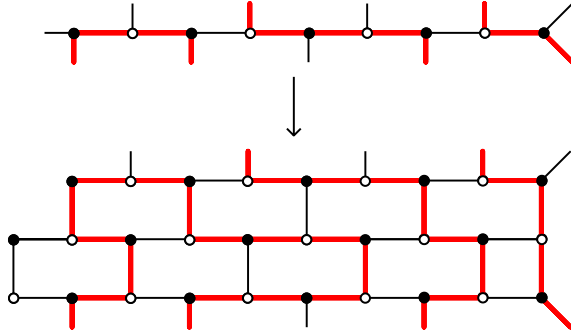
Stačí teda vyriešiť prípad, keď sa uprostred  $h$  nachádza D-D alebo H-H cesta. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že prvá takáto cesta v  $h$  je typu D-D (pre typ H-H použijeme zrkadlovo obrátenú konštrukciu). Keďže nie je poslednou, tak zo štruktúry  $B_{66}$ -konfigurácie vyplýva, že za ňou môže byť niekoľko H-D ciest a potom nasleduje buď H-H cesta, alebo sme na konci.

Postupnosť ciest D-D (H-D)\* H-H vyriešime takto: D-D nezmeníme, všetky H-D posunieme doľava a vzniknutú medzeru vyplníme H-H cestou. Táto elegantná transformácia je znázornená na obrázku 3.20:



Obr. 3.20: Transformácia pre postupnosť ciest D-D (H-D)\* H-H

Ak sme postupnosťou ciest D-D (H-D)\* narazili na koniec, vykonáme opačnú transformáciu: všetky H-D posunieme doprava a vzniknutú medzeru vyplníme D-D cestou tak, ako je uvedené na obrázku 3.21:



Obr. 3.21: Transformácia pre ukončenú postupnosť ciest D-D (H-D)\*

Tým sme dokázali každú možnosť v reduktore  $M_R$  rozšíriť aj v konfigurácii  $M_G$ , a teda  $M_G$  je redukovateľná na  $M_R$ , čo bolo treba dokázať.  $\square$

### 3.2.2 $B_{48}$ -konfigurácie

Teraz definujeme tie multipóly, ktoré vznikli vkladáním  $n$  dvojíc stien typu  $B_{48}$ .

**Definícia 3.2.4.**  $B_{48}$ -konfigurácia dĺžky  $n \in \mathbb{N}$  je KBP-multipól  $M_G = (V, E, X)$  definovaný nasledovne:  $V = \{v_{i,j} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, 2n+4\}\}$ ,  $X = (x_0, x_3, x_4, x_7, x_8, \dots, x_6, x_5, x_2, x_1)$ ,

$$E = \{x_0v_{1,1}, x_{2n+5}v_{3-2(i\%2), 2n+4}\} \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, 2n+3\}\} \cup \\ \{x_i v_{1,i}, v_{2,i} v_{3,i} \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}, i \equiv 0, 3 \pmod{4}\} \cup \\ \{x_i v_{3,i}, v_{1,i} v_{2,i} \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}, i \equiv 1, 2 \pmod{4}\}$$

**Definícia 3.2.5.**  $B_{48}$ -reduktor dĺžky  $n \in \mathbb{N}$  je KBP-multipól  $M_R = (V, E, X)$  definovaný nasledovne:  $V = \{v_i \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}\}$ ,  $X = (x_0, x_3, x_4, x_7, x_8, \dots, x_6, x_5, x_2, x_1)$ ,

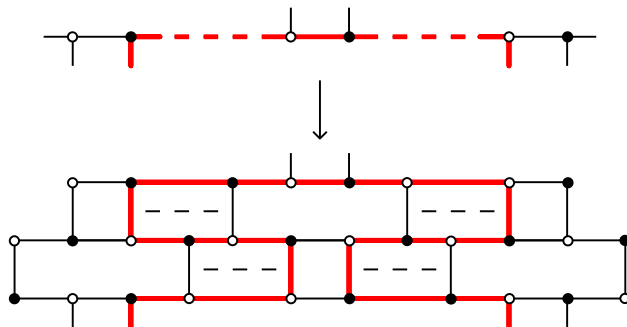
$$E = \{x_0v_1, x_{2n+5}v_{2n+4}\} \cup \\ \{x_i v_i \mid i \in \{1, \dots, 2n+4\}\} \cup \\ \{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, 2n+3\}\}$$

**Veta 3.2.6.** Každá  $B_{48}$ -konfigurácia dĺžky  $n$  je redukovateľná na  $B_{48}$ -reduktor dĺžky  $n$  pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dôkaz.* Nech  $M_G$  je daná  $B_{48}$ -konfigurácia,  $M_R$  je k nej príslušný reduktor a  $h \in H(M_R)$  je ľubovoľná H-možnosť v  $M_R$ . Situácie, keď  $h$  obsahuje iba H-D alebo D-H cesty a keď prvá cesta v  $h$  je typu D-D alebo H-H, vyriešime tak ako v dôkaze vety 3.2.3.

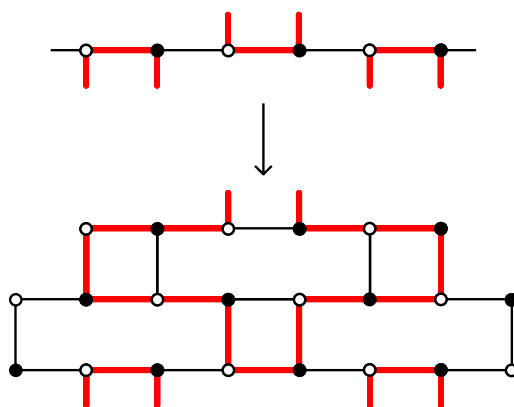
Zavedieme nový pojem: D-D alebo H-H cestu nazveme susednou, ak spája dve po sebe idúce polhrany  $x_i, x_{i+1}$ , ktoré sú obe v rovnakej skupine. Ak D-D cesta nie je susedná, vieme ju rozšíriť spôsobom znázorneným na obrázku 3.22 (pre nie susednú

H-H cestu použijeme zrkadlovú konštrukciu), pričom využijeme nutnú existenciu dvojice stien, ktorá má hore stenu veľkosti 8 a dole stenu veľkosti 4:



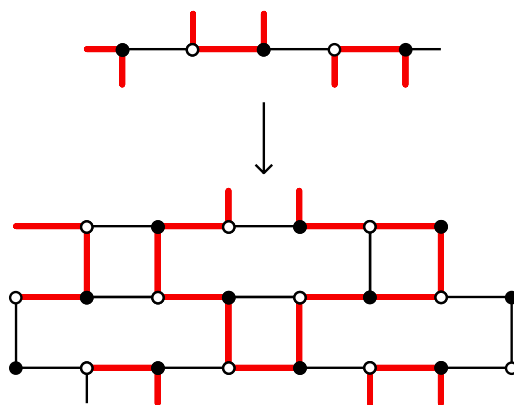
Obr. 3.22: Transformácia nie susednej D-D cesty

Jediným problémom sú teda susedné D-D a H-H cesty. V takom prípade začneme prechádzať zľava doprava cesty z H-možnosti  $h$ . Ak nájdeme tri po sebe idúce susedné cesty, vieme ich rozšíriť tak ako na obrázku 3.23:



Obr. 3.23: Transformácia troch po sebe idúcich susedných ciest

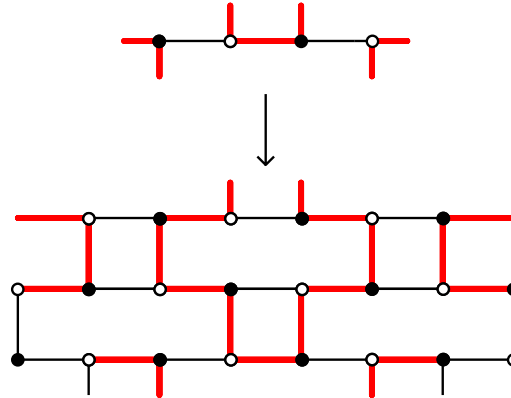
Ak nájdeme dve po sebe idúce susedné cesty, vieme ich rozšíriť podľa obrázka 3.24:



Obr. 3.24: Transformácia dvoch po sebe idúcich susedných ciest



Nakoniec, ak nájdeme iba jednu susednú cestu obklopenú nesusednými, vieme ju rozšíriť podľa obrázka 3.25:



Obr. 3.25: Transformácia izolovanej susednej cesty

Tým sme dokázali každú možnosť v reduktore  $M_R$  rozšíriť aj v konfigurácii  $M_G$ , a teda  $M_G$  je redukovateľná na  $M_R$ , čo bolo treba dokázať.  $\square$

### 3.2.3 $B$ -konfigurácie

V tejto podkapitole formálne definujeme triedu  $B$ -konfigurácií: multipólov s ľubovoľnou kombináciou dvojíc stien typu  $B_{66}$  a  $B_{48}$ . Hlavným cieľom bude dokázať, že aj táto trieda je redukovateľná a má svoje príslušné reduktory.

Dôkaz bude náročnejší. Metódy, ktoré fungovali pri  $B_{66}$  a  $B_{48}$ -konfiguráciách, pri  $B$ -konfiguráciách zlyhajú. Nebudeme totiž vedieť vyriešiť všetky možné postupnosti D-D, H-H, H-D alebo D-H ciest. Okrem toho, našou motiváciou je vyhnúť sa neprehľadným dôkazom, ktoré sú iba rozborom veľkého počtu prípadov.

Preto použijeme inú metódu. Už nebudeme kategorizovať polhrany podľa hornej a dolnej skupiny. Namiesto toho využijeme fakt, že reduktory  $B$ -konfigurácií sú vždy KBP-multipólmi, ktorých polhrany sú pripojené na spoločnú cestu. Zistíme, že ich vieme vždy rozdeliť na menšie časti a tie môžu byť iba štyroch rôznych typov. Tieto časti následne použijeme ako symboly na slovnú reprezentáciu daného multipólu. Ukážeme, že aj samotné  $B$ -konfigurácie sa dajú rozdeliť na štyri typy častí a ekvivalentne slovne reprezentovať.

Predstavme si, že máme daný reduktor, ktorým prechádza Hamiltonovská kružnica. Reduktor rozdelíme stanoveným spôsobom na niekoľko častí, ktoré budeme považovať za samostatné symboly. Urobíme nasledovný algoritmický postup: budeme čítať symboly z reduktora a počas toho rekonštruovať postupnosť zodpovedajúcich symbolov

z konfigurácie – snažíme sa teda postupne zrekonštruovať, ako mohla Hamiltonovská kružnica prechádzať konfiguráciou. Vyabstrahovaním tohto procesu si v každom momente pamätáme stav (informáciu, ktorou z troch koncových hrán prechádza Hamiltonovská kružnica a ktorou nie) a prečítaním symbolu sa presunieme do určeného stavu. V teórii formálnych jazykov existuje jeden výpočtový model, ktorý funguje na tom istom princípe: konečný automat.

Nosným pilierom bude teda konštrukcia dvoch konečných automatov  $A_R, A_G$ , ktoré akceptujú platné slovné reprezentácie reduktorov, resp. platné slovné rekonštrukcie redukovateľných konfigurácií. Otázka, či sú  $B$ -konfigurácie redukovateľné na svoje príslušné reduktory, sa potom dá interpretovať ako pravdivosť inklúzie  $L(A_R) \subseteq L(A_G)$ .

Najprv uvedieme nevyhnutné definície a dokázané vety z oblasti formálnych jazykov a automatov [14]:

**Definícia 3.2.7.** *Deterministický konečný automat  $A$  je päťica  $(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , kde  $K$  je konečná množina stavov,  $\Sigma$  je konečná vstupná abeceda,  $q_0 \in K$  je začiatkový stav,  $F \subseteq K$  je množina akceptačných stavov a  $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$  je prechodová funkcia.*

**Definícia 3.2.8.** *Nedeterministický konečný automat  $A$  je päťica  $(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , kde  $K$  je konečná množina stavov,  $\Sigma$  je konečná vstupná abeceda,  $q_0 \in K$  je začiatkový stav,  $F \subseteq K$  je množina akceptačných stavov a  $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^K$  je prechodová funkcia.*

**Veta 3.2.9.**  *$K$  ľubovoľnému deterministickému konečnému automatu  $A$  existuje nedeterministický konečný automat  $A'$  taký, že  $L(A) = L(A')$ .*

**Veta 3.2.10.**  *$K$  ľubovoľnému nedeterministickému konečnému automatu  $A$  existuje deterministický konečný automat  $A'$  taký, že  $L(A) = L(A')$ .*

**Definícia 3.2.11.** *Konfigurácia konečného automatu (deterministického alebo nedeterministického) je prvok  $(q, w) \in K \times \Sigma^*$ , kde  $q$  je stav automatu a  $w$  je nespracovaná časť vstupného slova.*

**Definícia 3.2.12.** *Krok výpočtu deterministického konečného automatu  $A$  je relácia  $\vdash_A$  na konfiguráciách definovaná  $(q, av) \vdash_A (p, v) \Leftrightarrow p = \delta(q, a)$ .*

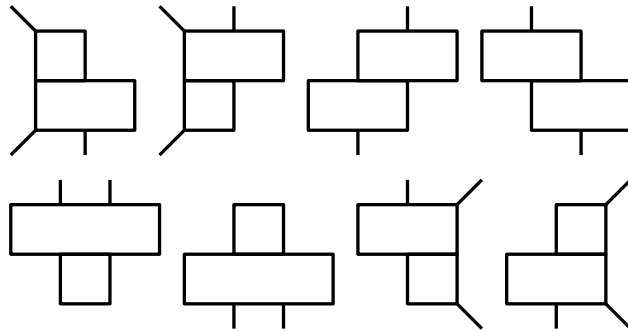
**Definícia 3.2.13.** *Krok výpočtu nedeterministického konečného automatu  $A$  je relácia  $\vdash_A$  na konfiguráciách definovaná  $(q, av) \vdash_A (p, v) \Leftrightarrow p \in \delta(q, a)$ .*

**Definícia 3.2.14.** *Jazyk akceptovaný konečným automatom  $A$  (deterministickým alebo nedeterministickým) je množina  $L(A) = \{w \mid \exists q_F \in F; (q_0, w) \vdash_A^* (q_F, \varepsilon)\}$ .*

**Veta 3.2.15.** *Pre dva (nedeterministické alebo deterministické) konečné automaty  $A_1, A_2$  je rozhodnuteľné, či  $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ .*

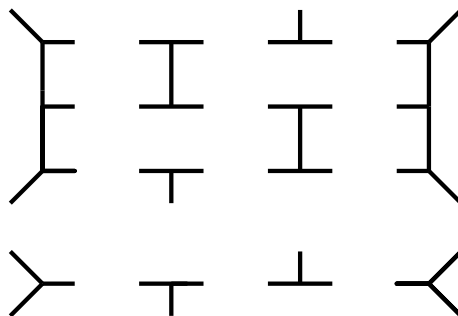
*Dôkaz.* Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $A_1, A_2$  sú deterministické. Zostrojíme DKA akceptujúci jazyk  $L(A_2)^C$  (výmenou akceptačných a neakceptačných stavov v automate  $A_2$ ) a potom pomocou klasickej konštrukcie (cez karteziánsky súčin) zostrojíme DKA  $A$  akceptujúci jazyk  $L(A_1) \cap L(A_2)^C$ . Potom stačí len skontrolovať, či sa dá v  $A$  dostať z jeho počiatočného do niektorého z akceptačných stavov (čo je ekvivalentné vzťahu  $L(A_1) \cap L(A_2)^C \neq \emptyset$ , a teda aj vzťahu  $L(A_1) \not\subseteq L(A_2)$ ).  $\square$

Teraz prejdeme na definíciu  $B$ -konfigurácií. Ukážeme, že každú  $B$ -konfiguráciu vieme jednoznačne zapísať ako slovo nad špeciálnou abecedou ( $B$ -popisom), ktoré nám navyše umožní jednoznačne zapísať množinu vrcholov, hrán a polhrán danej  $B$ -konfigurácie. Z technických dôvodov budeme pracovať s inou množinou vkladaných podgrafov. Doteraz sme pracovali s ôsmimi podgrafmi uvedenými na obrázku 3.26:



Obr. 3.26: Množina ôsmich podgrafov

Táto množina je dobrá pre intuitívnu predstavu, ale je zbytočne veľká. Ak by sme do nej zahrnuli aj všetky Hamiltonovské možnosti, potrebovali by sme veľmi veľa podgrafov, čo by neskôr viedlo k väčšiemu počtu stavov a komplikovanejšej konštrukcii konečného automatu. Ukáže sa, že nám postačia iba štyri podgrafy:  $B$ -konfiguráciu budeme zapisovať ako slovo nad abecedou  $\Sigma_B = \{\succ, \tau, \perp, \prec\}$ , pričom každý symbol reprezentuje jeden zo štyroch podgrafov uvedených na obrázku 3.27:



Obr. 3.27: Množina štyroch podgrafov  $\succ, \tau, \perp, \prec$

Je dôležité uvedomiť si, že popisná sila sa novou množinou podgrafov zvýšila. Dokážeme totiž vytvoriť multipól, ktorý nie je  $B$ -konfiguráciou - stačí začať s postupnosťou podgrafov  $\succ\tau\tau$ , čím vznikne multipól, ktorý obsahuje dve susedné steny veľkosti 4 (čo nie je prípustné). Ako vyzerajú popisy, ktoré zodpovedajú práve  $B$ -konfiguráciám? Predpokladajme, že sme umiestnili začiatočný podgraf  $\succ$ . Nasledujúci podgraf môže byť  $\tau$ ,  $\pm$  alebo  $\prec$  (ak chceme prikladanie ukončiť).

Predpokladajme, že sme si vybrali  $\tau$ . To však znamená, že v ďalšom kroku sme nútení zvoliť podgraf  $\pm$  (inak porušíme podmienku, že prikladáme iba dvojice stien typu  $B_{66}$  alebo  $B_{48}$ ). Táto idea sa dá zovšeobecniť: v nepárnom kroku máme pri prikladaní na výber z dvoch podgrafov  $\tau$ ,  $\pm$ , ale v párnom kroku je výber podgrafov deterministicky daný. Z toho vyplýva, že popisy  $B$ -konfigurácií sú dané regulárnym výrazom  $\succ\{\tau\pm, \pm\tau\}^*\prec$ , čo vedie k nasledovnej definícii:

**Definícia 3.2.16.**  $B$ -popis je slovo  $w = w_1 \dots w_n$  nad abecedou  $\Sigma_B = \{\succ, \tau, \pm, \prec\}$ , také, že  $w \in \{\succ\{\tau\pm, \pm\tau\}^*\prec\}$ .

Uvedieme aj konštrukciu  $B$ -konfigurácie na základe jej  $B$ -popisu. Pre prehľadnosť si zadefinujeme dve funkcie:

- $side(x_i)$  vráti 1 ak je polhrana  $x_i \in X$  na hornej strane multipólu (t. j. v prvom riadku), inak vráti 3
- $order(i)$  vráti polhranu  $x \in X$ , ktorá je  $i$ -ta v cyklickom poradí všetkých polhrán (za nultú polhranu považujeme  $x_1$ , pokračuje sa v smere hodinových ručičiek)

Definície potom vyzerajú nasledovne:

**Definícia 3.2.17.** Nech  $w = w_1 \dots w_n$  je daný  $B$ -popis. Potom  $B$ -konfigurácia je  $KBP$ -multipól  $M_G = (V, E, X)$ , kde  $V = \{v_{i,j} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$ ,  $X = (order(0), \dots, order(n+1))$ ,

$$E = \{x_0 v_{side(x_0),1}, x_{n+1} v_{side(x_{n+1}),n}\} \cup \{x_i v_{side(x_i),i} \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \\ \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \\ \{v_{2,j} v_{i,j} \mid i \in \{1, 3\}, j \in \{1, \dots, n\}, \neg(1 < j < n \wedge side(x_j) = i)\}$$

pričom  $side : X \rightarrow \{1, 3\}$ ,  $order : \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$  sú nasledovné funkcie:

$$side(x_i) = \begin{cases} 4 - side(x_{i+1}) & i \leq 1 \\ 1 & 1 < i < n \wedge w_i = \pm \\ 3 & 1 < i < n \wedge w_i = \tau \\ 4 - side(x_{i-1}) & i \geq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{order}(i) &= \{x_j \mid j \in \{0, \dots, n+1\}, \\ &\quad (i \leq \frac{n}{2} \wedge |\{x_k \mid k < j \wedge \text{side}(x_k) = 1\}| = i) \vee \\ &\quad (i > \frac{n}{2} \wedge |\{x_k \mid k > j \wedge \text{side}(x_k) = 3\}| = \frac{n}{2} - 1 - i)\} \end{aligned}$$

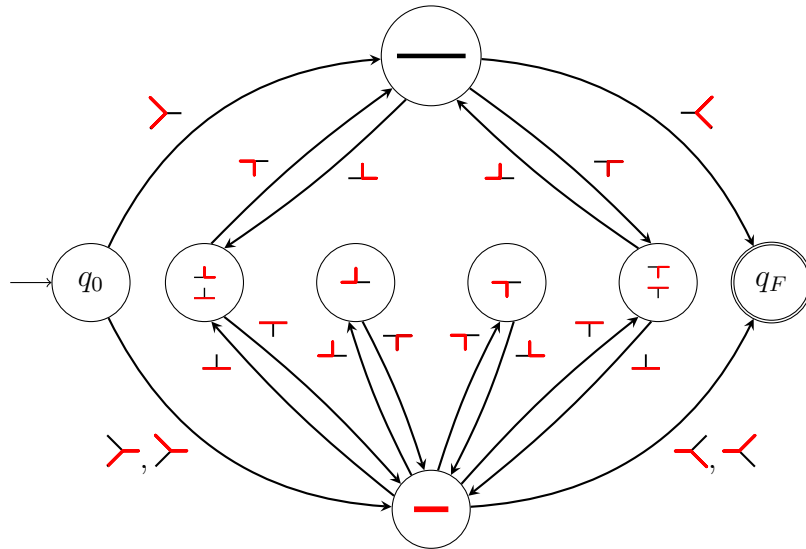
**Definícia 3.2.18.** *Nech  $w = w_1 \dots w_n$  je  $B$ -popis. Potom  $B$ -reduktor je KBP-multipól  $M_R = (V, E, X)$ , kde  $V = \{v_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ ,  $X = (\text{order}(0), \dots, \text{order}(n+1))$ ,  $E = \{x_i v_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{x_0 v_1, x_{n+1} v_n\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ .*

**Veta 3.2.19.** *Nech  $M_R$  je  $B$ -reduktor a  $w = w_1 \dots w_n$  je jeho  $B$ -popis. Potom*

$$H(M_R) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \bigcup_{\substack{s \in \{0,1\}, f \in \{n, n+1\} \\ s < i_1 < \dots < i_k < f-1}} \{x_s x_{i_1}, x_{i_1+1} x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}+1} x_{i_k}, x_{i_k+1} x_f\}$$

*Dôkaz.* Zrejme. Každá H-možnosť prechádzajúca reduktorom musí nutne prechádzať polhranou  $x_0$  alebo  $x_1$  a zároveň polhranou  $x_n$  alebo  $x_{n+1}$ . Zároveň, ak nejaká cesta spája polhrany  $x_i$  a  $x_j$  (v našom číslovaní indexov) uprostred reduktora, tak ďalšia cesta musí nevyhnutne začať polhranou  $x_{j+1}$ . Z toho vyplýva vyššie uvedená rovnosť.  $\square$

Našou hlavnou úlohou je dokázať, že pre ľubovoľnú  $B$ -konfiguráciu  $M_G$  a jej reduktor  $M_R$  platí  $H(M_R) \subseteq H(M_G)$ . Pre  $B$ -konfigurácie a  $B$ -reduktory sme zatiaľ definovali  $B$ -popis, ktorý závisí len od postupnosti prikladaných dvojíc stien. Symboly  $\succ, \tau, \perp, \prec$  však neposkytujú informáciu o Hamiltonovskej kružnici prechádzajúcej daným  $B$ -reduktorom. Potrebujeme  $B_h$ -popis obsahujúci aj informáciu o Hamiltonovskej možnosti prechádzajúcej daným  $B$ -reduktorom. Rozšírená abeceda  $\Sigma_{B_h}$  bude teda obsahovať symboly  $\succ, \succ, \succ, \tau, \tau, \tau, \perp, \perp, \perp, \prec, \prec, \prec$ . Na obrázku 3.28 je znázornený automat  $A_R$ , ktorý akceptuje práve  $B_h$ -popisy  $B$ -reduktorov:



Obr. 3.28: Automat  $A_R$

**Veta 3.2.20.** *Nech  $w = w_1 \dots w_n$  je slovo nad abecedou  $\Sigma_{B_h}$ . Potom  $w$  je  $B_h$ -popisom  $B$ -reduktora  $M_R$  práve vtedy, keď  $w \in L(A_R)$ .*

*Dôkaz.* Musíme zabezpečiť, aby pre slovo  $w$  platili nasledovné dve vlastnosti:  $w$  má tvar  $\succ\{\tau^+, +\tau\}^*\prec$  a postupnosť symbolov vo  $w$  zodpovedá Hamiltonovskej možnosti. Je jednoduché vytvoriť konečné automaty  $A_1, A_2$ , ktoré overujú tieto dve vlastnosti, pričom  $A_1$  má 5 stavov a  $A_2$  má 2 stavy.

Teraz stačí vytvoriť konečný automat  $A_R$  taký, že  $L(A_R) = L(A_1) \cap L(A_2)$ . Použijeme štandardnú konštrukciu pomocou karteziánskeho súčinu. Automat  $A_R$  má  $2 \cdot 5 = 10$  stavov, ale dva z nich sú izolované, a teda ich môžeme odstrániť. Výsledný automat zodpovedá obrázku 3.28.  $\square$

Uvedený automat použijeme v definícii  $B_h$ -popisu  $B$ -reduktora:

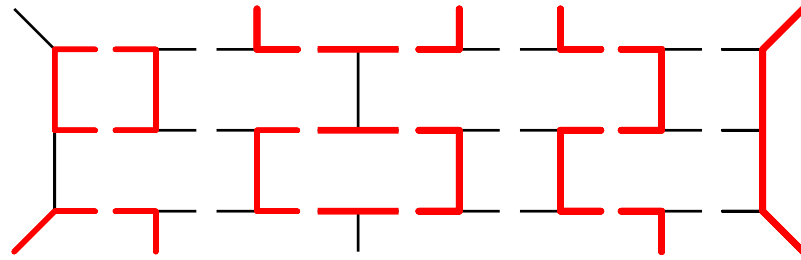
**Definícia 3.2.21.**  *$B_h$ -popis  $B$ -reduktora  $M_R$  je slovo  $w = w_1 \dots w_n$  nad abecedou  $\Sigma_{B_h} = \{\succ, \succ, \succ, \tau, \tau, \tau, \perp, \perp, \perp, \prec, \prec, \prec\}$  také, že  $w \in L(A_R)$ .*

Náročnejšou úlohou bude zostrojiť konečný automat, ktorý akceptuje  $B_h$ -popis práve vtedy, keď reprezentuje možnú rekonštrukciu redukovateľnej konfigurácie. Každý symbol pre časť reduktora má svoj príslušný symbol pre časť konfigurácie, ako bolo znázornené na obrázku 3.27. Ak do toho zahrnieme aj Hamiltonovskú vlastnosť, dostaneme väčšiu množinu symbolov. Abecedu novovzniknutých symbolov označíme  $\Sigma_{B'_h}$ .

Po prečítaní ľubovoľného symbolu z abecedy  $\Sigma_{B_h}$  uhádneme symbol z abecedy  $\Sigma_{B'_h}$  reprezentujúci H-možnosť prechádzajúci príslušnou časťou konfigurácie. Tento proces opakujeme dovtedy, dokým nedočítame celý vstup. Musíme si položiť nasledovnú otázku: podľa akých pravidiel budeme prikladať časti konfigurácie vedľa seba?

Začneme naivným pravidlom: dve časti konfigurácie môžu byť vedľa seba práve vtedy, keď tri výstupné hrany z prvej časti konfigurácie sú rovnako Hamiltonovsky zafarbené ako tri vstupné hrany v druhej časti. Tri vychádzajúce hrany budú v tomto prípade reprezentovať stav konečného automatu.

Tento prístup má dva problémy. Prvým z nich je skutočnosť, že algoritmus môže vygenerovať izolované Hamiltonovské kružnice, ako je znázornené na obrázku 3.29:

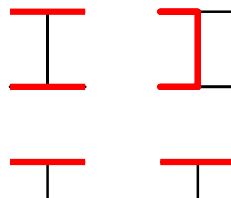


Obr. 3.29: Postupnosť symbolov z  $\Sigma_{B'_h}$  s izolovanými Hamiltonovskými kružnicami

Problém vyriešime tak, že po prečítaní symbolu sa nedeterministicky rozhodneme, či chceme v budúcnosti spojiť vrchné dve vychádzajúce hrany alebo spodné dve vychádzajúce hrany. Túto informáciu si uložíme do stavu. Zároveň si pamätáme aj informáciu, či sme už počas algoritmu spojili vrchné dve vychádzajúce hrany alebo spodné dve vychádzajúce hrany. Detekcia vzniku izolovanej Hamiltonovskej kružnice je potom triviálna.

Druhým problémom je prípad, keď prikladaním častí konfigurácií siete dostaneme sadu Hamiltonovských ciest (a teda zdanlivo aj H-možnosť), ale koncové polhrany párov ciest nebudú zodpovedať tomu, ako vyzerajú H-možnosti prechádzajúce  $B$ -reduktorom. Z vety 3.2.19 vyplýva, že ak  $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}$  sú polhrany reduktora a  $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ , tak H-možnosť môže obsahovať prvky  $x_{i_1}x_{i_2}$  a  $x_{i_3}x_{i_4}$ , ale určite nie prvky  $x_{i_1}x_{i_4}$  a  $x_{i_2}x_{i_3}$ . Namiesto konkrétneho riešenia necháme konštrukciu automatu nezmenenú a na záver ukážeme, že vo výslednom automate sa nemôže vyskytnúť tento problém.

Teraz nám už nič nebráni vytvoriť množinu prechodov medzi stavmi automatu. Uvedieme príklad: nech sme stave  $\equiv$  (teda všetkými tromi vychádzajúcimi hranami prechádza Hamiltonovská kružnica, pričom vrchné dve chceme v budúcnosti spojiť) a prečítaný symbol z abecedy  $\Sigma_{B'_h}$  je  $\top$ . Potom môžeme k existujúcej postupnosti priložiť dva rôzne symboly z abecedy  $\Sigma_{B'_h}$  uvedené na obrázku 3.30. Priložením týchto symbolov sa dostaneme do stavu  $\equiv$ , respektíve  $\equiv$ .

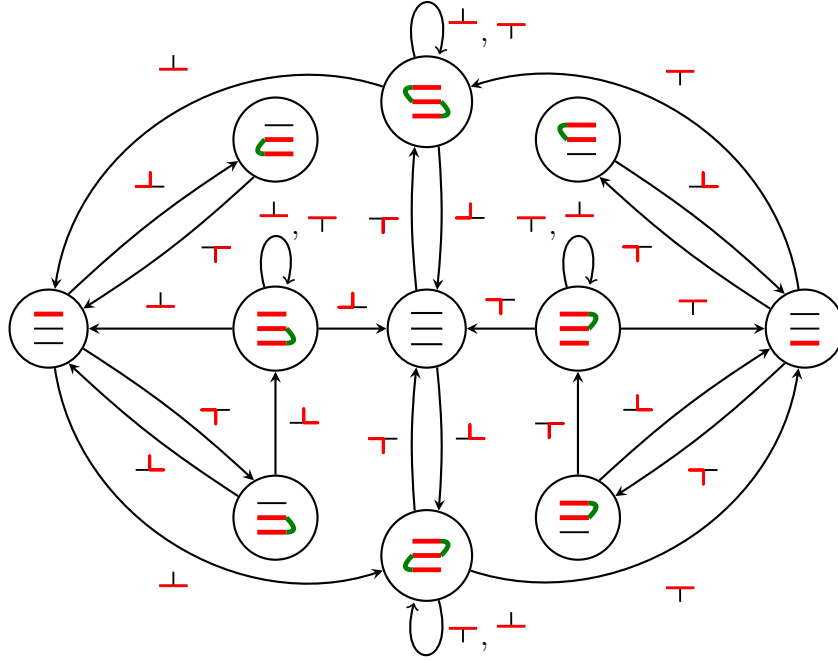


Obr. 3.30: Vyhovujúce symboly z abecedy  $\Sigma_{B'_h}$

Náš automat bude mať jeden počiatkový stav  $q_0$  a jeden akceptačný stav  $q_F$ . Množina prechodov pre tieto stavy bude vyzeráť nasledovne:

$$\begin{array}{lll}
 \delta(q_0, \curvearrowright) \ni \equiv & \delta(q_0, \curvearrowright) \ni \equiv & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F \\
 \delta(q_0, \curvearrowright) \ni \equiv & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F \\
 \delta(q_0, \curvearrowright) \ni \equiv & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F \\
 \delta(q_0, \curvearrowright) \ni \equiv & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F & \delta(\equiv, \curvearrowleft) \ni q_F
 \end{array}$$

Na obrázku 3.31 je výsledný konečný automat (okrem stavov  $q_0, q_F$  a ich prechodov) akceptujúci práve tie  $B_h$ -popisy, ktoré zodpovedajú korektnej rekonštrukcii H-možnosti prechádzajúcej reduktorom v redukovateľnej konfigurácii:



Obr. 3.31: Automat  $A_G$

Tento automat neobsahuje problém s nekorektnými H-možnosťami. Predpokladajme, že automat vrátil nekorektnú H-možnosť. Potom existoval moment počas prikladania častí konfigurácie, v ktorom prechádzala Hamiltonovská možnosť dvomi vychádzajúcimi nespojenými hranami. To sa mohlo stať iba v stavoch  $\equiv$  a  $\equiv$ . Z nich sa však vieme dostať len do stavov  $\equiv, \equiv, \equiv, \equiv$  a  $\equiv$ , a teda nemáme ako dokončiť dvojicu ciest nekorektným spôsobom.

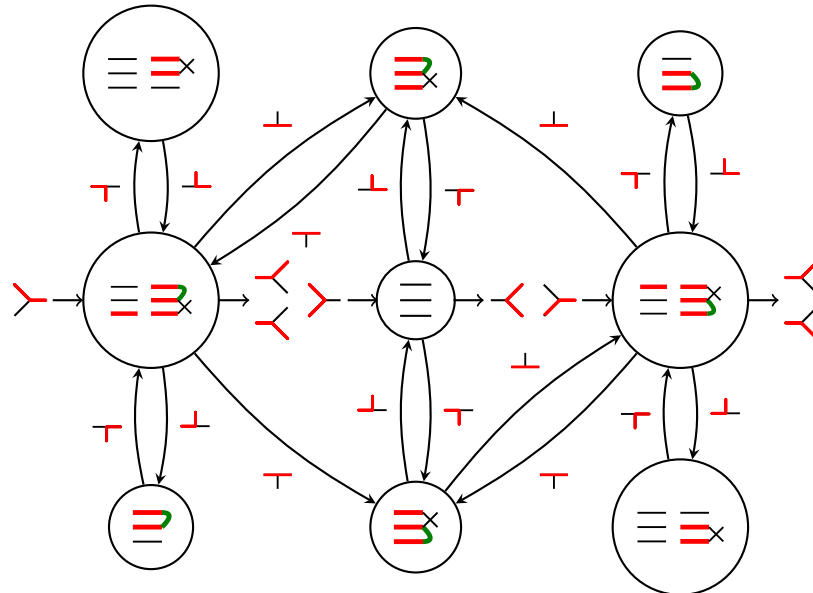
**Dôsledok 3.2.22.** Každá  $B$ -konfigurácia je redukovateľná na svoj príslušný  $B$ -reduktor.

*Dôkaz.* Počítačovým programom overíme platnosť inklúzie  $L(A_R) \subseteq L(A_G)$ . □

**Poznámka 3.2.23.** Predošlý automat vieme ešte vylepšiť zlúčením niektorých dvojíc stavov, čím dostaneme nový automat  $A'_G$  uvedený na obrázku 3.32. Jeho výhodou je okrem menšieho počtu stavov aj skutočnosť, že vždy máme na výber najviac jeden prechod pre daný symbol. Vďaka tejto deterministickej vlastnosti vieme rýchlo algoritmicke

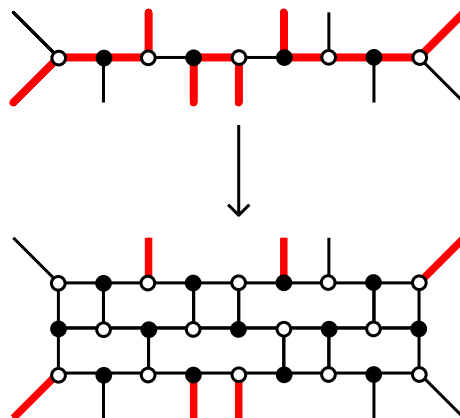


zostrojil rozšírenie  $H$ -možnosti v danej konfigurácii. Keďže v každom novom stave si pamätáme najviac dva rôzne segmenty, tak aj v ľubovoľnom kroku algoritmu si musíme udržiavať nanajvýš dve rôzne rekonštrukcie (z ktorých jedna môže neskôr zaniknúť). Inklúzia  $L(A_R) \subseteq L(A'_G)$  platí.



Obr. 3.32: Automat  $A_{G'}$

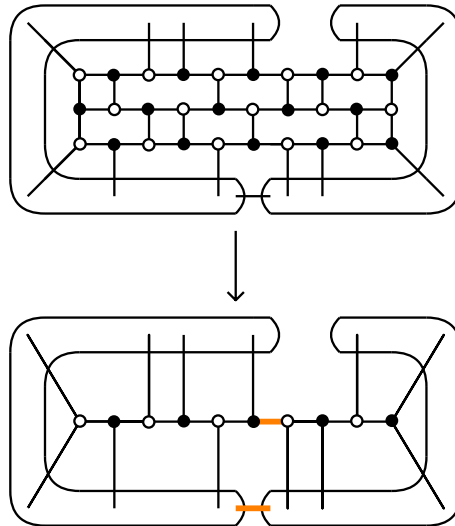
Ak porušíme pravidlo o prikladaní dvojíc stien, výsledný KBP-multipól už nemusí byť redukovateľný, ako je znázornené na obrázku 3.33:



Obr. 3.33: Príklad nerozšíriteľnej  $H$ -možnosti v modifikovanej  $B$ -konfigurácii

Dokázali sme, že  $B$ -konfigurácie sú redukovateľnými konfiguráciami. Ak aplikujeme ľubovoľnú ich redukciiu v kubickom planárnom bipartitnom grafe, dostaneme menší kubický planárny bipartitný graf.

Nanešťastie, pre  $B$ -konfigurácie neplatí 3-súvislá redukovateľnosť. Aplikovaním redukcie môže vzniknúť graf, ktorý nie je 3-súvislý (protipríklad je na obrázku 3.34). Pomocou počítačového programu sme overili, že žiadna iná vyhovujúca redukcia neexistuje. Preto nemôžeme vysloviť tvrdenie, že  $B$ -konfigurácie sa nevyskytujú v najmenšom protipríklad k Barnettovej hypotéze. Na druhej strane,  $B$ -konfigurácie sa stali užitočným nástrojom v dôkazoch, ktoré sa zaoberajú Hamiltonovskými kružnicami v kubických planárnych bipartitných grafoch.



Obr. 3.34: Príklad  $B$ -konfigurácie, ktorá nie je 3-súvisle redukovateľná

# Kapitola 4

## Stromové reduktory

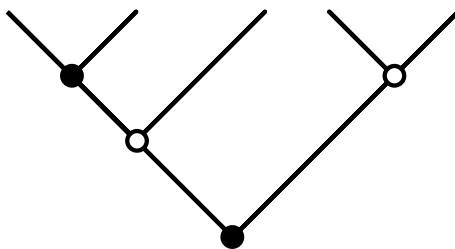
V tejto kapitole sa zameriame na stromové reduktory. Dokážeme, že počet stromových KBP-multipólov aj počet ich Hamiltonovských možností sa dá vypočítať iteratívnym spôsobom.

### 4.1 Stromové 2KBP-multipóly

Najskôr definujeme multipóly reprezentované stromami s koreňom stupňa 2 a ostatnými vrcholmi stupňa 3:

**Definícia 4.1.1.** Stromový 2KBP-multipól je multipól  $M_{T_2} = (V, E, X)$ , pričom  $G = (V, E)$  je strom, vrcholy a polhrany  $M_{T_2}$  majú hierarchiu (pričom polhrany sú v hierarchii najnižšie), koreň  $r \in V$  má stupeň 2 a ostatné vrcholy majú stupeň 3.

**Príklad 4.1.2.** Na obrázku 4.1 uvádzame príklad stromového 2KBP-multipólu  $M_{T_2}$  s bipartitným zafarbením polhrán  $B = (1, 1, 0, 0, 0)$ .



Obr. 4.1: Stromový 2KBP-multipól

### 4.2 Počet stromových 2KBP-multipólov

V tejto podkapitole popíšeme algoritmus, ktorý pomocou metódy dynamického programovania elegantne spočíta počet stromových 2KBP-multipólov s daným bipartitným zafarbením jeho polhrán.

**Definícia 4.2.1.** *Nech  $B = (b_0, \dots, b_{p-1}) \in \{0, 1\}^p$  je dané bipartitné zafarbenie polhrán  $x_0, \dots, x_{p-1}$ . Potom pre  $0 \leq i \leq j \leq p-1, b \in \{0, 1\}$  definujeme funkciu  $T_2(i, j, b)$  ako počet rôznych stromových 2KBP-multipólov, ktorých koreň má farbu  $b$  a cyklické poradie ich polhrán je  $X = (x_i, \dots, x_j)$ .*

Pri konštrukcii algoritmu, ktorý vráti počet rôznych stromových 2KBP-multipólov s daným zafarbením  $b_0, \dots, b_{p-1}$ , využijeme metódu dynamického programovania. Polhrany si umiestnime vedľa seba v ich cyklickom poradí  $x_0, \dots, x_{p-1}$ . Ukážeme, že hodnoty  $T_2(i, j, b)$  je možné vypočítať iteratívnym spôsobom:

**Veta 4.2.2.**

$$T_2(i, j, b) = \begin{cases} 0 & i = j \wedge b_i \neq b \\ 1 & i = j \wedge b_i = b \\ \sum_{k=i}^{j-1} T_2(i, k, 1-b) \cdot T_2(k+1, j, 1-b) & i < j \end{cases}$$

*Dôkaz.* Ak  $i = j$ , tak počet multipólov pokrývajúci polhranu  $x_i$  s farbou koreňa  $b$  je zjavne 1 ak má daná polhrana farbu  $b_i = b$  a 0 inak.

Nech  $i < j$ . Uvažujme ľubovoľný stromový 2KBP-multipól  $M_{T_2}$  pokrývajúci polhrany  $x_i, \dots, x_j$  so zafarbením  $b_i, \dots, b_j$  a označme jeho koreň  $r$  (ktorý má stupeň 2). Ak odoberieme vrchol  $r$ , multipól sa nám rozpadne na dva stromové 2KBP-multipóly  $M_{T_2}^1, M_{T_2}^2$ , pričom  $M_{T_2}^1$  pokrýva polhrany  $x_i, \dots, x_k$  a  $M_{T_2}^2$  pokrýva polhrany  $x_{k+1}, \dots, x_j$  pre nejaké  $k \in \{i, \dots, j-1\}$ . Aby sa  $M_{T_2}^1$  a  $M_{T_2}^2$  dali pripojiť na spoločný koreň  $r$ , musia mať ich korene nutne rovnaké zafarbenie  $b$  (v takom prípade bude mať  $r$  farbu  $1-b$ ). Navyše, tvar vzniknutého multipólu  $M_{T_2}$  je jednoznačne určený, keďže iba jeho koreň má stupeň 2.  $\square$

### 4.3 Stromové KBP-multipóly

Teraz zdefinujeme triedu multipólov, ktoré sú reprezentované kubickými stromami:

**Definícia 4.3.1.** *Stromový KBP-multipól je KBP-multipól  $M = (V, E, X)$ , pričom  $G = (V, E)$  je kubický strom,  $M$  je zakorenený a  $|X| \geq 3$ .*

#### 4.3.1 Počet stromových KBP-multipólov

**Definícia 4.3.2.** *Nech  $B = (b_0, \dots, b_{p-1}) \in \{0, 1\}^p$  je dané bipartitné zafarbenie polhrán  $x_0, \dots, x_{p-1}$ . Potom definujeme funkciu  $T(i, j)$  ako počet rôznych stromových KBP-multipólov, ktorých cyklické poradie polhrán je  $X = (x_i, \dots, x_j)$ .*

Ukážeme, ako pomocou techniky dynamického programovania zistiť počet stromových KBP-multipólov s daným bipartitným zafarbením jeho polhrán:

**Veta 4.3.3.**

$$T(i, j) = \begin{cases} 0 & j - i < 2 \\ \sum_{k=i+1}^{j-1} T_2(i+1, k, b_i) \cdot T_2(k+1, j, b_i) & j - i \geq 2 \end{cases}$$

*Dôkaz.* Ak  $j - i < 2$ , tak multipól pokrýva nanajvýš 2 polhrany. Stromový KBP-multipól má však z definície aspoň 3 polhrany, čiže  $T(i, j) = 0$ .

Nech  $j - i \geq 2$ . Uvažujme ľubovoľný stromový KBP-multipól  $M_T$  pokrývajúci polhrany  $x_i, \dots, x_j$  so zafarbením  $b_i, \dots, b_j$ . Keďže  $M_T$  má všetky vrcholy stupňa 3, jeho koreň nie je jednoznačne určený, a teda nemôžeme použiť postup z dôkazu vety 4.2.2.

Označme otca polhrany  $x_i$  ako  $r$  a zvoľme  $r$  ako koreň  $M_T$ . Potom je už tvar stromového KBP-multipólu  $M_T$  jednoznačne určený. Ak odoberieme vrchol  $r$ , multipól sa nám rozpadne na samostatnú polhranu  $x_i$  a dva stromové 2KBP-multipóly  $M_{T_2}^1, M_{T_2}^2$ , pričom  $M_{T_2}^1$  pokrýva polhrany  $x_{i+1}, \dots, x_k$  a  $M_{T_2}^2$  pokrýva polhrany  $x_{k+1}, \dots, x_j$  pre nejaké  $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$ . Aby sa  $x_i, M_{T_2}^1$  a  $M_{T_2}^2$  dali pripojiť na spoločný koreň  $r$ , musia mať korene multipólov  $M_{T_2}^1$  a  $M_{T_2}^2$  zafarbenie rovné  $b_i$ . Z toho vyplýva druhá rovnosť v znení vety.  $\square$

### 4.3.2 Počet Hamiltonovských možností

Pre stromové KBP-multipóly s  $p$  polhranami vieme dokázať horné ohraňenie počtu ich H-možností. Dospejeme k prekvapujúcemu zisteniu: najväčší možný počet Hamiltonovských možností je rovný Fibonacciho číslu  $F_{p+1}$ , čo znamená, že medzi Fibonacciho postupnosťou a H-možnosťami v stromových KBP-multipóloch je priamy súvis.

Začneme algoritmom, ktorý zistí počet H-možností v danom stromovom KBP-multipóle  $M_T$ . Každý vrchol stupňa 3 sa bude pozeráť na vrcholy a polhrany, ktoré sú nižšie v hierarchii. Všetky polhrany a vrcholy stupňa 3 si budú pamätať dvojicu čísel  $f, g$  (takúto dvojicu nazveme Hamiltonovským párom) vyjadrujúce počet H-možností, ktoré prechádzajú alebo neprechádzajú ich otcom. Ukážeme, že Hamiltonovský pár vrcholu vieme vypočítať z Hamiltonovských párov jeho synov, a teda vieme spočítať počet H-možností v  $M_T$  jediným prechodom zdola nahor.

Z definície vieme, že vrcholy a polhrany daného stromového KBP-multipólu  $M_T$  majú hierarchiu. Koreň  $M_T$  je v tejto hierarchii najvyššie. Pod ním sú jeho tri susedné vrcholy (synovia). Každý vrchol stupňa 3 okrem koreňa má jeden nadradený vrchol (otec) a dva podradené vrcholy alebo polhrany (synovia). Polhrany majú jednoznačne definovaného otca ako vrchol, s ktorým sú incidentné.

Uvedieme potrebné definície:

**Definícia 4.3.4.** *Nech  $M_T = (V, E, X)$  je stromový KBP-multipól a  $u \in V \cup X$  je jeho ľubovoľný vrchol alebo polhrana. Definujeme otcovskú hranu (o-hranu)  $u$  ako prvok  $u' \in E \cup X$ , pričom:*

$$u' = \begin{cases} u & u \in X \\ e & u \in V, e = uv, v \text{ je otec } u \end{cases}$$

*Potom Hamiltonovský pár (H-pár) pre  $u$  je usporiadaná dvojica  $(f, g)$ , kde  $f \in \mathbb{N}$  je počet H-možností prechádzajúcich  $u'$  a  $g \in \mathbb{N}$  je počet H-možností, ktoré neprechádzajú  $u'$ . Pre stromové 2KBP-multipóly platí analogická definícia.*

**Veta 4.3.5.** *Nech  $M_{T_2} = (V, E, X)$  je stromový 2KBP-multipól a  $u \in V \cup X$  je jeho ľubovoľný vrchol alebo polhrana. Ak  $u \in V$ , označíme jeho ľavého syna  $u_1$  a pravého syna  $u_2$ . Potom H-pár pre  $u$  je rovný:*

$$(f, g) = \begin{cases} (1, 1) & u \in X \\ (f_1g_2 + f_2g_1, f_1f_2) & u \in V, \text{H-pár pre } u_1 \text{ je } (f_1, g_1), \text{H-pár pre } u_2 \text{ je } (f_2, g_2) \end{cases}$$

*Dôkaz.* Ak  $u \in X$ , potom zjavne existujú práve dve H-možnosti, z ktorých jedna prechádza a druhá neprechádza o-hranou  $u$ , a teda  $(f, g) = (1, 1)$ .

Nech  $u \in V$ ,  $u_1, u_2$  sú jeho synovia a H-páry pre  $u_1, u_2$  sú rovné  $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$ . Potom každá H-možnosť  $h \in H(M_{T_2})$  môže prechádzať  $u$  tromi rôznymi spôsobmi:

1.  $h$  prechádza o-hranou  $u_1$  a neprechádza o-hranou  $u_2$  (z čoho vyplýva, že musí prechádzať o-hranou  $u$ ) – takých H-možností je presne  $f_1g_2$ ,
2.  $h$  prechádza o-hranami  $u$  a  $u_2$  a neprechádza o-hranou  $u_1$  – takých H-možností je presne  $f_2g_1$ ,
3.  $h$  prechádza o-hranami  $u_1$  a  $u_2$  a neprechádza o-hranou  $u$  – takých H-možností je presne  $f_1f_2$ .

Z toho vyplýva, že H-pár pre  $u$  je rovný  $(f, g) = (f_1g_2 + f_2g_1, f_1f_2)$ . □

**Lema 4.3.6.** *Nech  $M_{T_2}$  je stromový 2KBP-multipól, pričom H-pár pre jeho koreň je  $(f, g)$ . Potom  $g \leq f \leq 2g$ .*

*Dôkaz.* Úplnou matematickou indukciou vzhľadom na počet polhrán  $p$ . Ak  $p = 1$ , tak jediný možný H-pár je  $(f, g) = (1, 1)$ , a teda platí  $g \leq f \leq 2g$ .

Teraz predpokladajme, že lema platí pre všetky stromové 2KBP-multipóly s najviac  $p$  polhranami a vezmime si ľubovoľný stromový 2KBP-multipól s  $p + 1$  polhranami. Označme jeho koreň  $u$  a jeho H-pár  $(f, g)$ . Nech  $u_1, u_2$  sú synovia  $u$  a  $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$  sú

ich H-páry. Odstránením vrcholu  $u$  zo stromového 2KBP-multipólu nám vzniknú dva stromové 2KBP-multipóly s koreňmi  $u_1, u_2$ , na ktoré sa vzťahuje indukčný predpoklad (keďže majú menší počet polhrán). Teda  $g_1 \leq f_1 \leq 2g_1$ ,  $g_2 \leq f_2 \leq 2g_2$ . Z toho vieme odvodiť nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} f_1g_2 + f_2g_1 &\leq f_1f_2 + f_2f_1 = 2f_1f_2 \\ f_1g_2 + f_2g_1 &\geq f_1\frac{f_2}{2} + f_2\frac{f_1}{2} = f_1f_2 \end{aligned}$$

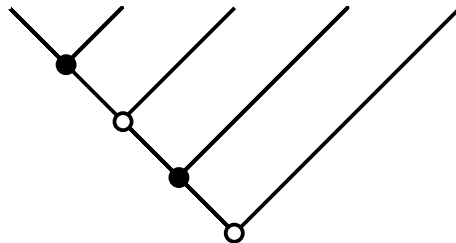
Ich zlúčením dostaneme vzťah  $f_1f_2 \leq f_1g_2 + f_2g_1 \leq 2f_1f_2$ . A keďže z vety 4.3.5 vyplýva, že  $f = f_1g_2 + f_2g_1$  a  $g = f_1f_2$ , platí  $g \leq f \leq 2g$ . Tým je dôkaz ukončený.  $\square$

Pripomenieme definíciu Fibonacciho postupnosti a jej asymptotický odhad [22]:

**Definícia 4.3.7.** *Fibonacciho postupnosť  $F_n$  je postupnosť čísel definovaná nasledovne:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .*

**Veta 4.3.8.**  $F_n \in O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Čo má Fibonacciho postupnosť spoločné so stromovými KBP-multipólmi? Uvažujme stromový 2KBP-multipól  $M_{T_2}$  na obrázku 4.2, ktorého všetky polhrany sú pripojené na spoločnú cestu. Ak začneme analyzovať H-páry vrcholov a polhrán a počet H-možností, dopracujeme sa k Fibonacciho číslam.



Obr. 4.2: Fibonacciho 2KBP-multipól

Vieme, že  $M_{T_2}$  musel vzniknúť pripojením prvých dvoch polhrán k spoločnému vrcholu a následným opakovaným pripajáním už existujúceho vrcholu a prvej voľnej polhrany. Všetky polhrany majú H-pár rovný  $(1, 1)$ . Po pripojení prvých dvoch z nich bude mať nový H-pár hodnotu  $(2, 1)$ . Z H-párov s hodnotami  $(2, 1)$  a  $(1, 1)$  vznikne H-pár s hodnotou  $(3, 2)$  a táto anomália s Fibonacciho číslami pokračuje ďalej.

Preskúmame odvodené rekurentné vzorce  $f = f_1g_2 + f_2g_1$  a  $g = f_1f_2$ . Vždy, keď spájame koreň s novou polhranou, platí  $f_2 = g_2 = 1$ . Keďže sme začínali s H-párom rovným  $(1, 1)$ , tak nové H-páry budú vždy typu  $(F_{k+1}, F_k)$  pre nejaké  $k \in \mathbb{N}$ .

Stromové 2KBP-multipóly, ktoré vzniknú týmto procesom, nazývame *Fibonacciho 2KBP-multipólmi*. Na obrázku 4.2 je teda Fibonacciho 2KBP-multipól s 5 polhranami.

Pokračujeme dôležitou vetou:

**Veta 4.3.9.** *Nech  $M_{T_2}$  je stromový 2KBP-multipól s  $p$  polhranami, pričom H-pár pre jeho koreň je  $(f, g)$ . Potom:*

1.  $f \leq F_{p+1}$
2.  $f + g \leq F_{p+2}$
3.  $2f + g \leq F_{p+3}$

*Dôkaz.* Úplnou matematickou indukciou vzhľadom na  $p$ . Ak  $p = 1$ , tak jediný možný H-pár je  $(f, g) = (1, 1)$ , a teda platí  $f = 1 \leq F_2$ ,  $f + g = 2 \leq F_3$ ,  $2f + g = 3 \leq F_4$ .

Označme  $r$  koreň stromového 2KBP-multipólu  $M_{T_2}$  s  $p$  polhranami. Potom  $r$  má synov  $r_1, r_2$ . Nech  $(f, g), (f_1, g_1), (f_2, g_2)$  sú H-páry pre  $r, r_1, r_2$ . Vieme povedať, že multipól s koreňom  $r_1$  pokrýva  $k$  polhrán a multipól s koreňom  $r_2$  pokrýva  $p - k$  polhrán pre nejaké  $k \in \{1, \dots, p - 1\}$ .

Hodnoty H-párov rastú exponenciálne v závislosti od hĺbky stromu (to vyplýva z rekurentných vzťahov  $f = f_1g_2 + f_2g_1$ ,  $g = f_1f_2$  a počiatocnej hodnoty  $(1, 1)$ ). Preto najväčšie hodnoty výrazov  $f, f + g, 2f + g$  dosiahneme pre  $k \in \{1, p - 1\}$ . Bez ujmy na všeobecnosti zvolme  $k = p - 1$ . Potom  $f_2 = g_2 = 1$ . Z indukčného predpokladu vyplývajú nerovnosti:

$$\begin{aligned} f_1 &\leq F_p \\ f_1 + g_1 &\leq F_{p+1} \\ 2f_1 + g_1 &\leq F_{p+2} \end{aligned}$$

Využitím vety 4.3.5 odvodíme pre multipól  $M_{T_2}$  nasledovné nerovnosti:

$$\begin{aligned} f &= f_1 + g_1 \leq F_{p+1} \\ f + g &= 2f_1 + g_1 \leq F_{p+2} \\ 2f + g &= 3f_1 + 2g_1 = (f_1 + g_1) + (2f_1 + g_1) \leq F_{p+1} + F_{p+2} = F_{p+3} \end{aligned}$$

Tým je dôkaz ukončený. □

Teraz sa zameriame na počet H-možností, ktoré môžu prechádzať daným stromovým KBP-multipólom s  $p$  polhranami. Začneme nasledovnou vetou:



**Veta 4.3.10.** *Nech  $M_T = (V, E, X)$  je stromový KBP-multipól,  $r \in V$  je jeho koreň a  $r_1, r_2, r_3 \in V \cup X$  sú synovia  $r$ . Nech  $(f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3)$  sú H-páry pre  $r_1, r_2, r_3$ . Potom:*

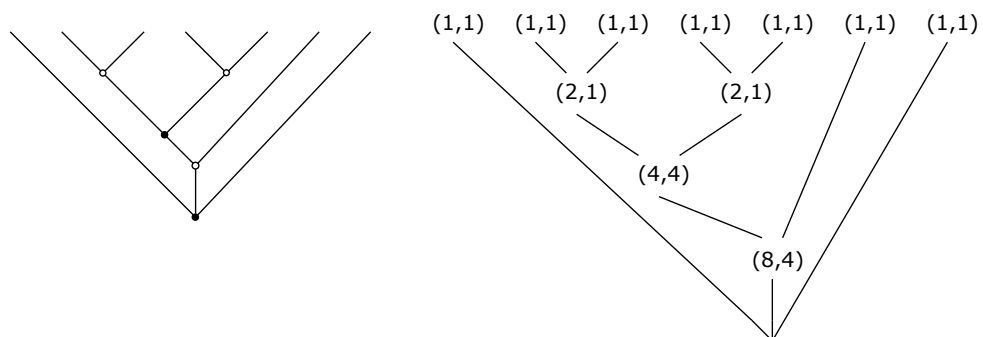
$$|H(M_T)| = f_1 f_2 g_3 + f_1 g_2 f_3 + g_1 f_2 f_3$$

*Dôkaz.* Každá H-možnosť môže prechádzať  $r$  tromi spôsobmi:

1.  $h$  prechádza o-hranami  $r_1$  a  $r_2$  a neprechádza o-hranou  $r_3$  – takých H-možností je presne  $f_1 f_2 g_3$ ,
2.  $h$  prechádza o-hranami  $r_1$  a  $r_3$  a neprechádza o-hranou  $r_2$  – takých H-možností je presne  $f_1 g_2 f_3$ ,
3.  $h$  prechádza o-hranami  $r_2$  a  $r_3$  a neprechádza o-hranou  $r_1$  – takých H-možností je presne  $g_1 f_2 f_3$ .

Z toho vyplýva, že  $|H(M_T)| = f_1 f_2 g_3 + f_1 g_2 f_3 + g_1 f_2 f_3$ . □

**Príklad 4.3.11.** *Na obrázku 4.3 je príklad priebehu algoritmu pre daný stromový KBP-multipól. Môžeme sa presvedčiť, že multipól má naozaj  $1 \cdot 8 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \cdot 1 = 20$  rôznych H-možností.*



Obr. 4.3: Počet H-možností v stromovom KBP-multipóle

V nasledujúcej vete dokážeme, že Fibonacciho postupnosť je horným ohraničením počtu H-možností v stromových KBP-multipóloch s  $p$  polhrami:

**Veta 4.3.12.** *Nech  $M_T = (V, E, X)$  je stromový KBP-multipól s  $p$  polhrami. Potom:*

$$|H(M_T)| \leq F_{p+1}$$

*Dôkaz.* Úplnou matematickou indukciou vzhľadom na  $p$ . Ak  $p = 3$ , jediný stromový KBP-multipól má  $3 \leq F_4$  Hamiltonovské možnosti.

V indukčnom kroku najskôr predpokladajme, že  $M_T$  má posledné dve polhrany  $x_{p-2}, x_{p-1}$  incidentné s jeho koreňom  $r$  (takýto normálny tvar zjavne existuje – stačí polhrany z  $X$  vhodne cyklicky posunúť a zvoliť požadovaný koreň). Nech  $r'$  je ľavý syn  $r$ . Ak  $p \geq 4$ , tak  $r'$  má určite ľavého syna  $r_1$  a pravého syna  $r_2$ .

Ak sa pozrieme na multipól s koreňom  $r'$ , tak ide o stromový 2KBP-multipól ( $r'$  má stupeň 2) s  $p - 2$  polhranami. Označme H-páry pre vrcholy  $r, r', r_1, r_2$  postupne  $(f, g), (f', g'), (f_1, g_1), (f_2, g_2)$ . Z lemy 4.3.9 a vety 4.3.5 nám vyjde podmienka:

$$f' = f_1g_2 + f_2g_1 \leq F_{p-1} \tag{4.1}$$

Spojme  $r'$  s novou samostatnou polhranou  $x$  (ktorá má H-pár rovný  $(1, 1)$ ). Teraz je už  $r'$  koreňom stromového KBP-multipólu  $M_{T'}$  s  $p - 1$  polhranami, a teda naň môžeme použiť indukčný predpoklad  $|M_{T'}| \leq F_p$ . Keďže H-páry synov  $r'$  sú  $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$  a  $(1, 1)$ , z vety 4.3.10 dostaneme ďalšiu podmienku:

$$|M_{T'}| = f_1f_2 + f_1g_2 + f_2g_1 \leq F_p \tag{4.2}$$

Hamiltonovské páry synov  $r$  sú potom  $(f', g') = (f_1g_2 + f_2g_1, f_1f_2), (1, 1)$  a  $(1, 1)$ . Z podmienok 4.1 a 4.2 vyplýva, že:

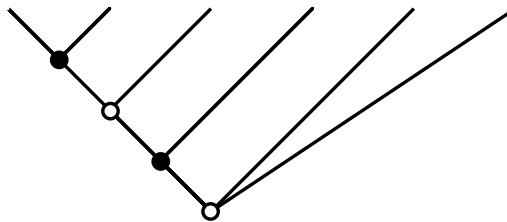
$$|H(M_T)| = 2(f_1g_2 + f_2g_1) + f_1f_2 = (f_1g_2 + f_2g_1 + f_1f_2) + (f_1g_2 + f_2g_1) \leq F_{p-1} + F_p = F_{p+1}$$

čo bolo treba dokázať. □

**Dôsledok 4.3.13.** *Nech  $M_T = (V, E, X)$  je stromový KBP-multipól s  $p$  polhranami. Potom  $H(M_T) \in O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p\right)$ .*

*Dôkaz.* Priamo vyplýva z viet 4.3.8 a 4.3.12. □

Asymptotický odhad z dôsledku 4.3.13 je tesný a dosiahneme ho pre Fibonacciho KBP-multipóly. Na obrázku 4.4 je Fibonacciho KBP-multipól so 6 polhranami. Využitím Hamiltonovských párov zistíme, že má práve  $F_7 = 13$  Hamiltonovských možností.



Obr. 4.4: Fibonacciho KBP-multipól

# Kapitola 5

## Implementácia

V tejto podkapitole uvidíme algoritmy, ktoré nám pomôžu pri hľadaní redukovateľných konfigurácií.

Chceme navrhnúť program, ktorý hľadá redukovateľné konfigurácie a ich reduktory po určitú hranicu. Tento program vznikne kombináciou štyroch podprogramov počítajúcich funkciu:

1.  $f_1 : n, p \rightarrow G(n, p)$ , ktorý generuje potenciálne redukovateľné konfigurácie po veľkosť  $n$  s nanajvýš  $p$  polhranami,
2.  $f_2 : M_G \rightarrow R$ , ktorý pre KBP-multipól  $M_G$  generuje jeho potenciálne reduktory,
3.  $f_3 : M_R \rightarrow H(M_R)$ , ktorý pre KBP-multipól  $M_R$  generuje všetky H-možnosti prechádzajúce  $M_R$ ,
4.  $f_4 : h, M_G \rightarrow \{0, 1\}$ , ktorý overí, či sa H-možnosť  $h$  dá rozšíriť v  $M_G$ .

Tým, že sme problém rozdelili do niekoľkých vrstiev, môžeme na každej z nich pracovať samostatne.

Celý program implementujeme v programovacom jazyku Python. Zvolili sme si ho hlavne preto, že podporuje generátory (príkaz *yield*), čo využijeme v našich podprogramoch. Použijeme aj knižnicu *networkx*, ktorá obsahuje efektívne algoritmy pre prácu s grafmi [11].

Pre prvé dva podprogramy sa zameriame na všeobecnejšiu úlohu: generovanie KBP-multipólov s daným bipartitným zafarbením polhrán. Algoritmus budeme postupne optimalizovať pomocou rekurzie s memoizáciou.

Ukážeme, že pre tretí a štvrtý podprogram nemáme k dispozícii lepšie riešenie ako skúšanie všetkých možností. Dokážeme to redukciou problému existencie konkrétnej H-možnosti na problém Hamiltonovskej kružnice.

V záverečnej podkapitole sa pozrieme na schému, ktorá čo najefektívnejšie využíva štyri spomenuté podprogramy. Keďže najviac času zaberie generovanie a overovanie Hamiltonovských možností, snažíme sa nájsť postup, ktorý používa tretí a štvrtý podprogram v čo najmenej možnej miere.

Treba si uvedomiť, že najdôležitejšou časťou našej práce sú dosiahnuté teoretické výsledky v kapitolách 3 a 4 a program používame iba ako pomôcku. Každú novú vygenerovanú redukovateľnú konfiguráciu musíme dodatočne ručne skontrolovať, aby sme sa vyhli situácii, že neredukovateľnú konfiguráciu prehlásime za redukovateľnú pre chybu v algoritme. Preto sme v priloženom zdrojovom kóde použili iba základné algoritmy a generovanie redukovateľných konfigurácií prebehlo iba po veľkosť  $n = 21$ .

## 5.1 Generovanie KBP-multipólov

Najprv sa zameriame na generovanie KBP-multipólov  $M_1, \dots, M_m$ . Ak sa pozrieme na ľubovoľnú redukovateľnú konfiguráciu a jej reduktor, všimneme si dôležitú vlastnosť. Všetky polhrany redukovateľnej konfigurácie  $M_G$  majú presne dané bipartitné zafarbenie  $B = \{b_0, \dots, b_{p-1}\} \in \{0, 1\}^p$ , ktoré musí ostať zachované v jej ľubovoľnom reduktore  $M_R$ . Túto vlastnosť využijeme tak, že zafarbenie  $B$  bude dodatočným vstupom do generátora KBP-multipólov.

Ďalšie pozorovanie sa týka samotného bipartitného zafarbenia  $B$ . Ak máme vygenerované KBP-multipóly pre  $B = \{b_0, \dots, b_{p-1}\}$ , rovnaké KBP-multipóly získame pre zafarbenie  $B' = \{1 - b_0, \dots, 1 - b_{p-1}\}$  (vrcholy a polhrany budú mať len vymenené farby 0 a 1). Riešenia pre  $B_k = \{b_k, \dots, b_{p-1}, b_0, \dots, b_{k-1}\} \in \{0, 1\}^p$  zase vzniknú z riešení pre  $B$  a následným premenovaním polhrán  $x_0, \dots, x_{p-1}$  na  $x_k, \dots, x_{p-1}, x_0, \dots, x_{k-1}$ . Nakoniec, riešenia pre  $B_{rev} = \{b_{p-1}, \dots, b_0\}$  sú iba zrkadlovými obrazmi riešení pre  $B$ .

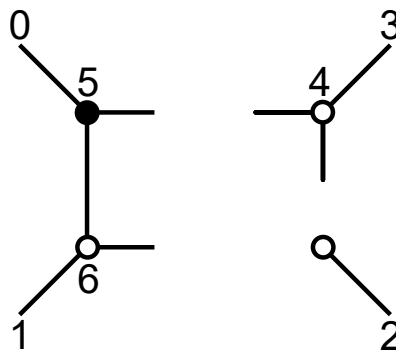
Dve bipartitné zafarbenia polhrán budeme považovať za ekvivalentné, ak sa jedno líši od druhého iba výmenou farieb, cyklickým posunom, zrkadlovým obrazom alebo ich kombináciou. Ľahko overíme, že nami zvolená relácia je reflexívna, symetrická aj tranzitívna, a teda ide o reláciu ekvivalencie. Preto stačí z každej triedy ekvivalencie uvažovať jedného jej reprezentanta.

Ako generovať KBP-multipóly s daným zafarbením  $B$ ? Využijeme, že máme dané polhrany  $X = (x_0, \dots, x_{p-1})$  s farbami  $B = (b_0, \dots, b_{p-1})$ . Usporiadané  $p$ -tice  $X$  a  $B$  môžeme považovať za postupnosti.

Na začiatku nemá žiadna polhrana určený incidentný vrchol. Hovoríme, že v aktuálnej postupnosti je  $p$  visiacych hrán. V každom kroku máme na výber z dvoch možností. Buď sa rozhodneme spojiť dve visiace polhrany s rôznym zafarbením (v takom prípade sa obe postupnosti rozpadnú na dve menšie súvislé podpostupnosti), alebo pridať nový vrchol k niektorej z visiacych polhrán (vtedy nahradíme visiacu polhranu  $u$  dvojicou nových visiacych polhrán  $v, v$  s opačným zafarbením).

Počas algoritmu si musíme udržiavať množinu už vytvorených hrán, aby sa nestalo, že dva vrcholy spojíme viackrát. Aby sme sa vyhli okrajovému prípadu, tak pre postupnosť dĺžky 2 zakážeme pridať nový vrchol. Pridať nový vrchol zakážeme aj vtedy, keď by novovzniknutý multipól mal veľkosť aspoň  $n$ .

Na obrázku 5.1 je znázornený nedokončený KBP-multipól  $M$  reprezentovaný postupnosťami  $X = (4, 4, 5, 6, 2)$  a  $B = (1, 1, 0, 1, 0)$ :



Obr. 5.1: Reprezentácia nedokončeného KBP-multipólu postupnosťami  $X, B$

Vygenerovaný multipól  $M$  je kubický, lebo všetky vzniknuté vrcholy majú stupeň 3. Keďže môžeme spájať iba vrcholy s rôznym bipartitným zafarbením,  $M$  má bipartitnú vlastnosť. Postupnosti určujú cyklické poradie visiacych polhrán a pri spájaní sa postupnosti delia na súvislé podpostupnosti, čím nemôže dôjsť k prekríženiu hrán, a teda  $M$  je určite planárny. Tým máme zaručené, že  $M$  je KBP-multipólom.

Algoritmus si teda pamätá aktuálnu postupnosť visiacych polhrán  $X$  a postupnosť ich bipartitných zafarbení  $B$ . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že prechádzame postupnosť sprava doľava (čiže v každom kroku spracovávame poslednú visiacu polhranu). Celý proces je znázornený v algoritme 5.1.1.

**Algoritmus 5.1.1.**

```

KBPMultipoles( $X, B, edges, newVertex, maxVertex$ ) :
 $p \leftarrow |X|$ 
if  $|X| = 0$  then
    yield  $edges$ 
else if  $|X| = 2$  then
    if  $X[0]X[1] \notin edges \wedge B[0] \neq B[1]$  then
        yield  $edges \cup X[0]X[1]$ 
else
    for  $index \in \{0, 1, \dots, p - 2\}$  do
        if  $X[index]X[p - 1] \notin edges \wedge B[index] \neq B[p - 1]$  then
            for all  $edges1 \in KBPMultipoles(X[: index], B[: index], edges \cup X[0]X[1],$ 
             $nextVertex, maxVertex)$  do
                for all  $edges2 \in KBPMultipoles(X[index + 1 : p - 1],$ 
                 $B[index + 1 : p - 1], edges \cup edges1, newVertex, maxVertex)$  do
                    yield  $edges2$ 
            if  $newVertex < maxVertex$  then
                 $last \leftarrow X.pop()$ 
                 $lastColor \leftarrow B.pop()$ 
                for all  $edges1 \in KBPMultipoles(X + [newVertex, newVertex],$ 
                 $B + [1 - lastColor, 1 - lastColor], edges \cup \{last, newVertex\},$ 
                 $nextVertex + 1, maxVertex)$  do
                    yield  $edges1$ 

```

Predchádzajúci algoritmus má niekoľko nevýhod. Jednou z nich je fakt, že algoritmus počíta viackrát to isté. Ak sme už raz pre postupnosť  $B$  vygenerovali multipóly, túto informáciu nijako nevyužívame. Tento problém vyriešime memoizáciou. V asociatívnom poli si pre reprezentanta  $B \in \{0, 1\}^k$ ,  $1 \leq k \leq p$  zapamätáme množinu KBP-multipólov, ktorých postupnosť zafarbení vrcholov visiach polhrán je  $B$ . Potom si stačí predpočítať každého reprezentanta  $B$  iba raz.

Ďalšie pozorovanie: ak má multipól  $n$  vrcholov a  $p$  polhrán, tak počet vrcholov a polhrán s rovnakým bipartitným zafarbením je presne  $\frac{p+n}{2}$ . Z toho vyplýva ďalšie vylepšenie: príslušnú vetvu algoritmu môžeme ukončiť, ak počet vrcholov a polhrán farby 0 alebo 1 vo vytvorenom KBP-multipóle je väčší ako  $\frac{p+n}{2}$ .

Náš vylepšený podprogram môžeme použiť aj na generovanie potenciálnych redukovateľných konfigurácií, aj na generovanie potenciálnych reduktorov. Utriedime si mul-

tipóly vzostupne podľa veľkosti. Nech  $M_{R_1}, \dots, M_{R_r}$  sú vygenerované multipóly. Ak vygenerujeme novú potenciálnu redukovateľnú konfiguráciu  $M_G$ , jej reduktormi môžu byť iba multipóly  $M_{R_1}, \dots, M_{R_r}$  (v opačnom prípade dostaneme spor s tým, že redukovateľnosť zachováva bipartitné zafarbenie). Teda pre vygenerovaný multipól stačí iba overiť, či je redukovateľný na niektorý z doteraz vygenerovaných multipólov.

Tento postup je pomerne málo efektívny. Ak v priebehu algoritmu zistíme, že multipól  $M_G$  je redukovateľný na  $M_R$ , tak je určite redukovateľný aj multipól  $M$ , ktorý obsahuje  $M_G$  ako podgraf. Preto zadefinujeme takú triedu KBP-multipólov, ktoré neobsahujú menšiu redukovateľnú konfiguráciu, a teda má zmysel ich generovať:

**Definícia 5.1.2.** *Nech  $M = (V, E, X)$  je KBP-multipól. Ak neexistuje súvislá redukovateľná konfigurácia  $M_G = (V_G, E_G, X_G)$  taká, že  $V_G \subset V, E_G \subset E$ , potom  $M$  nazývame minimálnym KBP-multipólom.*

Generovanie jedného konkrétneho multipólu  $M$  sa spomalí, pretože musíme dodatočne overiť, že  $M$  je minimálny. V praxi sa však ukáže, že redukovateľných konfigurácií je oveľa viac ako minimálnych redukovateľných konfigurácií. Z toho vyplýva, že množina minimálnych multipólov je výrazne menšia ako množina všetkých multipólov. Tým sme dosiahli ich efektívnejšie generovanie.

Tento algoritmus vieme ľahko modifikovať na generovanie lesových (acyklických) multipólov. Stačí si pre každý vrchol v postupnosti pamätať ešte číslo komponentu súvislosti, v ktorom sa nachádza. Potom pri spájaní dvoch vrcholov s rôznymi zafarbeniami dodatočne skontrolujeme, či nie sú v rovnakom komponente a ak nie sú, zlúčime dva komponenty súvislosti do jedného. Tento problém je všeobecne známy pod názvom *union-find*.

### 5.1.1 Generovanie stromových KBP-multipólov

Generovanie stromových KBP-multipólov je jednoduchšie. Podľa vety 4.3.3 vieme implementovať algoritmus 5.1.3, ktorý dostane na vstup bipartitné zafarbenie stromového KBP-multipólu  $B = \{b_0, \dots, b_{p-1}\}$ . Jeho výstupom je dvojrozmerné pole  $T$ , pričom hodnota  $T[i, j]$  reprezentuje počet stromových KBP-multipólov pokrývajúcich polhrany  $x_i, \dots, x_j$ .

**Algoritmus 5.1.3.**

```

 $T_2 \leftarrow [0]_{p \times p \times 2}$ 
for  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  do
     $T_2[i, i, b_i] \leftarrow 1$ 

```

```

for  $size \in \{1, \dots, p-1\}$  do
  for  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  do
     $j \leftarrow i + size$ 
    if  $j \geq p$  then
      break
    for  $k \in \{i, \dots, j-1\}$  do
      for  $c \in \{0, 1\}$  do
         $T_2[i, j, c] \leftarrow T_2[i, j, c] + T_2[i, k, 1-c] \cdot T_2[k+1, j, 1-c]$ 
 $T \leftarrow [0]_{p \times p}$ 
for  $size \in \{1, \dots, p-1\}$  do
  for  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  do
     $j \leftarrow i + size$ 
    if  $j \geq p$  then
      break
    for  $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$  do
       $T[i, j] \leftarrow T[i, j] + T_2[i+1, k, b_i] \cdot T_2[k+1, j, b_i]$ 
return  $T$ 

```

Tento algoritmus vieme jednoducho modifikovať na algoritmus 5.1.4, ktorý si do poľa  $T$  bude ukladať smerníky na všetky korene stromových KBP-multipólov pokrývajúcich polhrany  $x_0, \dots, x_{p-1}$ .

#### Algoritmus 5.1.4.

```

 $newVertices \leftarrow dict()$ 
 $newVertex \leftarrow p$ 
 $T_2 \leftarrow [\emptyset]_{p \times p \times 2}$ 
for  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  do
   $T_2[i, i, b_i] \leftarrow \{x_i\}$ 
for  $size \in \{1, \dots, p-1\}$  do
  for  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  do
     $j \leftarrow i + size$ 
    if  $j \geq p$  then
      break
    for  $k \in \{i, \dots, j-1\}$  do
      for  $c \in \{0, 1\}$  do
        for all  $u \in T_2[i, k, 1-c], v \in T_2[k+1, j, 1-c]$  do
           $newVertices[newVertex] \leftarrow (u, v)$ 
           $T_2[i, j, c] \leftarrow T_2[i, j, c] \cup \{newVertex\}$ 
           $newVertex \leftarrow newVertex + 1$ 

```



```

 $T \leftarrow \emptyset$ 
for  $k \in \{1, \dots, p-2\}$  do
  for all  $u \in T_2[1, k, b_0], v \in T_2[k+1, p-1, b_0]$  do
     $newVertexes[newVertex] \leftarrow (u, v)$ 
     $T \leftarrow T \cup \{newVertex\}$ 
     $newVertex \leftarrow newVertex + 1$ 
return  $T$ 

```

## 5.2 Generovanie Hamiltonovských možností

V podkapitole 4.3.2 sme dokázali, že už v stromových KBP-multipóloch rastie počet H-možností exponenciálne, čiže s rýchlym generovaním všetkých H-možností sa môžeme rozlúčiť. Ukážeme, že rozhodnúť pre daný KBP-multipól  $M$  a H-možnosť  $h$ , či  $h \in H(M)$ , je  $NP$ -úplný problém.

**Definícia 5.2.1.** *Nech  $M$  je KBP-multipól. Potom definujeme jazyky:*

$$\begin{aligned}
 HWAY &= \{h \mid h \in H(M)\} \\
 1HWAY &= \{h \mid h \in H(M), |h| = 1\}
 \end{aligned}$$

Ako sme spomenuli v podkapitole 2.1, problém hľadania Hamiltonovskej kružnice v kubickom planárnom bipartitnom grafe je  $NP$ -úplný. Z toho vyplýva, že tento problém je  $NP$ -úplný aj pre planárne bipartitné grafy s vrcholmi stupňa 2 alebo 3 (keďže ide o širšiu triedu grafov). To využijeme pri dôkaze nasledovnej vety:

**Veta 5.2.2.** *Jazyk  $1HWAY$  je  $NP$ -úplný.*

*Dôkaz.* Redukciou na problém hľadania Hamiltonovskej kružnice v planárnom bipartitnom grafe s vrcholmi stupňa 2 alebo 3. Nech  $M$  je KBP-multipól,  $x_0, \dots, x_{p-1}$  sú jeho polhrany v cyklickom poradí a  $h = \{x_i x_j\}$  je daná H-možnosť.

Z multipólu  $M$  odstránime všetky polhrany okrem  $x_i, x_j$ . Potom spojíme vrcholy  $v_i, v_j$  incidentné s  $x_i, x_j$  cestou  $P$  dĺžky 2 alebo 3 (podľa toho, či majú  $v_i, v_j$  rovnaké alebo rôzne bipartitné zafarbenie). Tým sme KBP-multipól  $M$  transformovali v polynomiálnom čase na planárny bipartitný graf  $G$ , ktorého každý vrchol má stupeň 2 alebo 3.

Ak  $h \in 1HWAY$ , tak z definície jazyka  $1HWAY$  musí existovať cesta  $P'$  medzi vrcholmi  $v_i$  a  $v_j$ , ktorá neprechádza cez  $P$ . Zjednotením ciest  $P$  a  $P'$  dostaneme Hamiltonovskú kružnicu v grafe  $G$ .

Každá Hamiltonovská kružnica v  $G$  musí prechádzať cez  $P$ . Z toho opäť vyplýva existencia cesty  $P'$  medzi vrcholmi  $v_i$  a  $v_j$ , ktorá neprechádza cez  $P$ , a teda  $h \in 1HWAY$ .  $\square$

**Dôsledok 5.2.3.** *Ak  $P \neq NP$ , tak neexistuje polynomiálny algoritmus pre jazyk  $HWAY$ .*

*Dôkaz.* Ak by sme vedeli riešiť problém pre jazyk  $HWAY$  v deterministickom polynomiálnom čase, potom by sme vedeli riešiť v deterministickom polynomiálnom čase aj problém pre jazyk  $1HWAY$ , čo je spor s vetou 5.2.2.  $\square$

Z dôsledku 5.2.3 vyplýva, že nemá zmysel hľadať efektívny algoritmus, a tak sa uspokojíme aj s obyčajným backtrackingom. Na vstupe máme daný KBP-multipól  $M = (V, E, X)$ . Každá hrana alebo polhrana  $e \in E \cup X$  bude v jednom z troch stavov: obsiahnutá v H-možnosti, neobsiahnutá v H-možnosti alebo nerozhodnutá (pričom na začiatku sú všetky nerozhodnuté).

Opakujeme nasledovný postup: zvolíme si nerozhodnutú hranu alebo polhranu  $e \in E \cup X$ . V jednej vetve algoritmu označíme  $e$  za obsiahnutú v Hamiltonovskej možnosti a v druhej za neobsiahnutú. Ak sa dopracujeme k vyhovujúcej H-možnosti, vypíšeme ju.

Uvedieme heuristiky, ktoré v praxi vedú k rýchlejšiemu algoritmu:

1. Každá H-možnosť pokrýva párny počet polhrán. Na začiatku si teda môžeme zvoliť  $2k \leq p$  polhrán, ktoré budú obsiahnuté v H-možnosti (zatiaľ čo ostatné nebudú). Tým máme istotu, že nebudeme prechádzať vetvu, ktorá pokrýva nepárny počet polhrán, a teda nemôže byť H-možnosťou.
2. Ak je KBP-multipól  $M$  zložený z komponentov súvislosti  $C_1, \dots, C_c$ , tak predchádzajúca heuristika sa vzťahuje na každý z nich.
3. Môže sa stať, že stavy troch hrán vychádzajúcich z daného vrcholu vieme rozhodnúť deterministicky. Ak sa dostaneme do situácie, že dve hrany incidentné s vrcholom  $v$  sú obsiahnuté, tak tretia incidentná hrana nemôže byť obsiahnutá. A platí to aj naopak: ak hrana incidentná s vrcholom  $v$  nie je obsiahnutá, tak zvyšné dve incidentné hrany musia byť obsiahnuté. Spracovanie vrcholu  $v$  môže spôsobiť kaskádu deterministických rozhodnutí pre ďalšie vrcholy. Tento proces nazývame *uzáverom* multipólu  $M$ .
4. Môžeme sa dostať aj do situácie, že množina hrán obsiahnutých v H-možnosti obsahuje cyklus alebo niektorý vrchol je incidentný s tromi obsiahnutými alebo dvomi neobsiahnutými hranami. Vtedy môžeme vetvu algoritmu ukončiť.

5. V prípade, že sa zameriame iba na 3-súvisle redukovateľné konfigurácie, vieme využiť ekvivalentné formulácie uvedené vo vete 2.3.1. Napríklad: na začiatku algoritmu si môžeme zvoliť jednu obsiahnutú a jednu neobsiahnutú hranu alebo polhranu, čím sa zredukuje počet vetiev.

### 5.3 Rozšírenie Hamiltonovskej možnosti

Štvrtý podprogram dostane na vstup H-možnosť  $h$  a potenciálnu redukovateľnú konfiguráciu  $M_G$  a vráti odpoveď na otázku  $h \stackrel{?}{\in} H(M_G)$ . Už sme dokázali, že hľadať efektívny algoritmus nemá zmysel.

Keďže H-možnosť  $h = \{h_{i_1}h_{j_1}, \dots, h_{i_k}h_{j_k}\}$  máme na vstupe, môžeme použiť nasledovnú heuristiku: každá hrana alebo polhrana  $e$  bude mať stav z množiny

$$\{-1, 0, 1, \dots, k, (?)\}$$

Stav  $-1$  reprezentuje nerozhodnutú hranu alebo polhranu, stav  $0$  neobsiahnutú a stav  $q \in \{1, \dots, k\}$  hranu alebo polhranu, ktorá je obsiahnutá v ceste z  $h$  pokrývajúcej polhrany  $h_{i_q}$  a  $h_{j_q}$ .

Môžeme sa dostať aj do situácie, že hrana incidentná s vrcholom  $v$  nie je obsiahnutá v Hamiltonovskej možnosti, a teda nevieme s istotou povedať na ktorej ceste z  $h$  ležia zvyšné dve incidentné hrany. V takom prípade im priradíme stav  $(?)$ . Stav  $(?)$  teda použijeme v takom prípade, keď  $e$  je obsiahnutá v H-možnosti, ale nevieme určiť jej cestu.

Keďže pracujeme s novou množinou stavov, vetvy algoritmu budú ukončené skôr. Stačí, ak budú dve hrany incidentné so spoločným vrcholom v dvoch rôznych stavoch  $q_1, q_2 \in \{1, \dots, k\}$ . Touto heuristikou sme teda dosiahli rýchlejší algoritmus.

### 5.4 Všeobecný algoritmus

Teraz sa zameriame na všeobecnú schému algoritmu, ktorý používa štyri spomenuté podprogramy.

Predpokladáme, že na vstupe máme už vygenerovanú potenciálnu redukovateľnú konfiguráciu  $M_G$ . Výstupom má byť odpoveď, či je  $M_G$  naozaj redukovateľnou konfiguráciou. V prípade odpovede „áno“ požadujeme, aby algoritmus vrátil aj príklad reduktora  $M_R$ , na ktorý je  $M_G$  redukovateľná.

Začneme s najprimitívnejším algoritmom 5.4.1, ktorý bude presnou kópiou postupu použitého pri teoretických pozorovaniach. Pre každý vygenerovaný potenciálny reduktor  $M_R$  prejdeme všetkými jeho H-možnosťami. Ak narazíme na H-možnosť  $h \in H(M_R)$  takú, že  $h \notin H(M_G)$ ,  $M_R$  nemôže byť reduktorom - vtedy vygenerujeme ďalší potenciálny reduktor  $M'_R$ . V prípade, že na takú možnosť nenarazíme, prehlásime  $M_R$  za reduktor a skončíme.

**Algoritmus 5.4.1.**

```

for all  $M_R$  do
   $reducible \leftarrow true$ 
  for all  $h \in H(M_R)$  do
    if  $h \notin H(M_G)$  then
       $reducible \leftarrow false$ 
      break
  if  $reducible$  then
    return " $M_G$  je redukovateľná na  $M_R$ "
  return " $M_G$  nie je redukovateľná"

```

Tento algoritmus je jednoduchý, ale neefektívny. Ak je nejaká H-možnosť  $h$  vo viacerých potenciálnych reduktoroch  $M_{R_1}, \dots, M_{R_k}$ , tak rovnaký test  $h \in H(M_G)$  sa vykoná  $k$ -krát. Problém vyriešime memoizáciou: pre každé  $h$  si do asociatívneho poľa uložíme informáciu, či  $h \in H(M_G)$ . Tým máme zaručené, že pre dané  $h$  sa test  $h \in H(M_G)$  vykoná iba raz, ako je znázorené v algoritme 5.4.2.

**Algoritmus 5.4.2.**

```

 $Hways \leftarrow dict()$ 
for all  $M_R$  do
   $reducible \leftarrow true$ 
  for all  $h \in H(M_R)$  do
    if  $h \in Hways$  then
      if not  $Hways[h]$  then
         $reducible \leftarrow false$ 
        break
    else
      if  $h \notin H(M_G)$  then
         $reducible \leftarrow false$ 
         $Hways[h] \leftarrow false$ 
        break
      else
         $Hways[h] \leftarrow true$ 

```

```

if reducible then
  return "  $M_G$  je redukovateľná na  $M_R$  "
return "  $M_G$  nie je redukovateľná "

```

Táto schéma sa dá ešte vylepšiť. Nech  $h$  je H-možnosť obsiahnutá v potenciálnych reduktoroch  $M_{R_1}, \dots, M_{R_k}$ . Ak program vráti, že  $h \notin H(M_G)$ , tak vieme povedať, že ani  $M_{R_2}, \dots, M_{R_k}$  nemôžu byť reduktormi (keďže obsahujú rovnakú H-možnosť  $h$ , ktorá sa nedá rozšíriť). Algoritmus 5.4.2 však zamietne len  $M_{R_1}$ , čím dochádza k zbytočným overovaniam potenciálnych reduktorov  $M_{R_2}, \dots, M_{R_k}$ .

Nech  $M_{R_1}, \dots, M_{R_k}$  je podmnožina všetkých potenciálnych reduktorov konfigurácie  $M_G$ . V prípade, že existuje H-možnosť  $h$  obsiahnutá práve v  $M_{R_1}, \dots, M_{R_k}$ , tak je ideálne vykonať test  $h \in H(M_G)$  hneď na začiatku algoritmu. Ak program zistí, že  $h \notin H(M_G)$ , zbavíme sa všetkých  $M_{R_1}, \dots, M_{R_k}$  naraz. Z predošlých úvah je zrejmé, že prechádzame Hamiltonovské možnosti zostupne podľa počtu reduktorov, v ktorých sú obsiahnuté.

Vytvoríme si dodatočné asociatívne pole. V ňom si pre každú H-možnosť predpočítame množinu potenciálnych reduktorov, ktoré ju obsahujú. Zároveň bude mať každý potenciálny reduktor  $M_R$  svoje počítadlo, ktoré vyjadruje koľko H-možností je ešte potrebné overiť testom  $h \in H(M_G)$  na to, aby sme mohli  $M_R$  naozaj prehlásiť za reduktor. Postup je znázornený v algoritme 5.4.3.

### Algoritmus 5.4.3.

```

reductors  $\leftarrow$  dict()
counter  $\leftarrow$  dict()
possibleReductors  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
for all  $M_R$  do
  counter[ $M_R$ ]  $\leftarrow$   $|H(M_R)|$ 
  possibleReductors  $\leftarrow$  possibleReductors  $\cup$   $\{M_R\}$ 
  for all  $h \in H(M_R)$  do
    if  $h \notin$  reductors then
      reductors[ $h$ ]  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
      reductors[ $h$ ]  $\leftarrow$  reductors[ $h$ ]  $\cup$   $\{M_R\}$ 
    utrieď reductors zostupne podľa počtu reduktorov
  for all  $h \in$  reductors do
    if  $h \in H(M_G)$  then
      for all  $M_R \in$  reductors[ $h$ ] do

```

```
    counter[MR] ← counter[MR] - 1
if counter[R] = 0 then
    return "MG je redukovateľná na MR"
else
    possibleReductors ← possibleReductors - reductors[h]
    if |possibleReductors| = 0 then
    return "MG nie je redukovateľná"
```

Popísali sme implementáciu generovania a overovania redukovateľných konfigurácií v jazyku Python. Program sme použili na vygenerovanie nových redukovateľných konfigurácií po veľkosť 21 s nanajvýš 10 polhranami, ktoré sú uvedené v kapitole 3. Vylepšenia podprogramov ostávajú predmetom ďalšieho možného skúmania.

# Záver

V práci sme sa zaoberali Barnettovou hypotézou a študovaním redukovateľných konfigurácií. Výsledkom sú zistenia, ktoré prinášajú pokrok v tejto oblasti.

Implementovali sme program, ktorý generuje redukovateľné konfigurácie po zvolenú hranicu. Rozdelili sme ho na štyri podprogramy: generovanie potenciálnych redukovateľných konfigurácií, generovanie potenciálne reduktorov, generovanie Hamiltonovských možností a overenie Hamiltonovskej možnosti v pôvodnej konfigurácii.

Počítačovým prehľadávaním sme našli 4 nové redukovateľné konfigurácie. Všetky nájdené redukcie sme dodatočne skontrolovali ručným prehľadávaním.

Dokázali sme, že tri redukovateľné konfigurácie ( $M_{4664}$ ,  $M_{464646}$  a  $M_{46464646}$ ) sú zároveň aj 3-súvisle redukovateľnými, a teda sa určite nevyskytujú v najmenšom protipríklade Barnettovej hypotézy. Použili sme rovnakú metódu: rozobrali sme prípady, keď by sme aplikovaním pôvodnej redukcie dostali graf, ktorý nie je 3-súvislý. Vo všetkých prípadoch sme došli k sporu alebo našli novú redukciu, ktorá zachovala 3-súvislosť.

Objavili sme novú nekonečnú triedu redukovateľných konfigurácií ( $B$ -konfigurácií), ktoré začínajú dvojicou stien veľkosti 4 a 6, pokračujú ľubovoľnou kombináciou dvojíc stien typu  $B_{66}$  a  $B_{48}$  a končia dvojicou stien veľkosti 4 a 6. Použili sme netradičný dôkaz využívajúci konečné automaty, čím sme prepojili teóriu grafov s teóriou formálnych jazykov. Redukovateľnosť dvoch nekonečných podtried ( $B_{66}$ -konfigurácií a  $B_{48}$ -konfigurácií) sme dokázali opakovaným modifikovaním ciest danej Hamiltonovskej možnosti.

Odvodili sme vzorec, vďaka ktorému je možné iteratívnym spôsobom spočítať počet stromových KBP-multipólov s daným bipartitným zafarbením. Objavili sme elegantný spôsob, ako spočítať počet Hamiltonovských možností pomocou Hamiltonovských párov. Ukázali sme, že počet H-možností v stromovom KBP-multipóle s  $p$  polhranami je najviac  $F_{p+1}$ . Našli sme priamy súvis medzi Fibonacciho číslami a počtom Hamiltonovských možností v stromových KBP-multipóloch.

Rozšírili sme poznatky týkajúce sa spomínanej problematiky. Študovali sme vlastnosti konfigurácií malých stien v bipartitných kubických grafoch a systematicky ich klasifikovali na redukovateľné a neredukovateľné vzhľadom na existenciu Hamiltonovskej kružnice. Podarilo sa nám nájsť nové redukovateľné konfigurácie. Všetky ciele práce boli splnené.



# Literatúra

- [1] T. Akiyama, Takao Nishizeki, Nobuji Saito. NP-Completeness of the Hamiltonian Cycle Problem for Bipartite Graphs, *Journal of Information Processing*, 3:73–76, 1980.
- [2] Helmut Alt, Michael S. Payne, Jens M. Schmidt, David R. Wood. Thoughts on Barnette’s Conjecture. *Australasian Journal of Combinatorics*, 64(2):354–365, 2016.
- [3] Takao Asano, Nobuji Saito, Geoffrey Exoo, Frank Harary. The smallest 2-connected cubic bipartite planar nonhamiltonian graph. *Discrete Mathematics*, 38(1):1–6, 1982.
- [4] David W. Barnette. Conjecture 5. In W. T. Tutte, editor, *Recent progress in Combinatorics*. Academic Press, New York, 1969.
- [5] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Macmillan, London, 1976.
- [7] Gunnar Brinkmann, Jan Goedgebeur, Brendan D. McKay. The minimality of the Georges–Kelmans graph. *Mathematics of Computation*, 91:1483–1500, 2022.
- [8] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2005.
- [9] Miquel Angel Fiol. A boolean algebra approach to the construction of snarks. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 1:493–524, 1991.
- [10] P. R. Goodey. Hamiltonian circuits in polytopes with even sided faces. *Israel Journal of Mathematics*, 22:52-56, 1975.
- [11] Aric Hagberg, Pieter Swart, Daniel S. Chult. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. 2008.
- [12] Alexander Hertel. A Survey and Strengthening of Barnette’s Conjecture. 2005.

- [13] Derek A. Holton, Bennet Manvel, Brendan D. McKay. Hamiltonian cycles in cubic 3-connected bipartite planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38(3):279–297, 1985.
- [14] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory. Languages and Computation*, Addison-Wesley, 1979.
- [15] František Kardoš. A computer-assisted proof of Barnette-Goodey conjecture: Not only fullerene graphs are Hamiltonian. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(1):62–100, 2020.
- [16] Xiaoyun Lu. A note on Barnette’s conjecture. *Discrete Mathematics*, 311(23-24):2711–2715, 2011.
- [17] Peter Guthrie Tait. Listing’s topologie. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 17(103):30–46, 1884.
- [18] C. Thomassen. A Theorem on Paths in Planar Graphs. *Journal of Graph Theory*, 7:169–176, 1983.
- [19] W. T. Tutte. A Theorem on Planar Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 82:99–116, 1956.
- [20] W. T. Tutte. On Hamiltonian Circuits. *Journal of the London Mathematical Society*, 21:98–101, 1946.
- [21] W. T. Tutte. On the 2-Factors of Bicubic Graphs. *Discrete Mathematics*, 1(2):203–208, 1971.
- [22] Steven Vajda. *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*. Courier Corporation, 2008.
- [23] Hassler Whitney. 2-Isomorphic graphs. *American Journal of Mathematics*, 55(1):245–254, 1933.
- [24] Eric W. Wiesstein. Stereographic Projection, 2002. [Citované 2023-05-05] Dostupné z <https://mathworld.wolfram.com/StereographicProjection.html>.

# Príloha

V elektronickej prílohe priloženej k práci sa nachádza zdrojový kód programu so základnými algoritmami. Zdrojový kód je zverejnený aj na [https://github.com/richardbiro/diplomova\\_praca](https://github.com/richardbiro/diplomova_praca).