

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA SNARKOV POMOCOU
SUPERPOZÍCIE
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2022

BC. JÚLIA FRONCOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA SNARKOV POMOCOU
SUPERPOZÍCIE
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2022
Bc. Júlia Froncová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Júlia Froncová
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Konštrukcia snarkov pomocou superpozície
Constructions of snarks by superposition

Anotácia: Snarky tvoria podtriedu kubických grafov, ktorá je významná vzhľadom na mnohé hypotézy a otvorené problémy v teórii grafov. Superpozícia je technika, ktorou sa pomocou vhodných podgrafov vytvárajú z menších snarkov väčšie. Úlohou študenta bude preskúmať možnosti aplikácie novoobjavenej dvojitej superpozície.

Vedúci: doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Dátum zadania: 18.02.2021

Dátum schválenia: 18.02.2021

prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĀkovanie: Táto práca by nevznikla bez pomoci a podpory mojej školiteľky doc. RNDr. Edity Mačajovej, za čo jej patrí úprimná vďaka.

Abstrakt

Snarky sú netriviálne kubické grafy, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Táto práca nadväzuje na výskum novoobjavenej metódy konštrukcie snarkov – dvojitej superpozície. V práci hľadáme grafy s párnou kružnicou s istou vlastnosťou, na základe ktorej vieme povedať, že po aplikovaní dvojitej superpozície správnym spôsobom na daný graf vznikne snark. Overíme prítomnosť žiadanej kružnice v známych nekonečných triedach snarkov, Blanušových a Isaacsových. Zároveň na základe výsledkov programu overujúceho prítomnosť danej kružnice v grafe vyslovíme hypotézu, že kružnica s danou vlastnosťou je prítomná v každom snarku. Dokážeme, že najmenší protipríklad pre hypotézu nemôže obsahovať malé rezy, ani malé cykly. Zároveň pravdivosť hypotézy podporíme výsledkami programu spustenom na všetkých netriviálnych snarkoch do 36 vrcholov (vrátane).

Kľúčové slová: snark, superpozícia, dvojitá superpozícia

Abstract

Snarks are nontrivial cubic graphs which are not 3-colorable. This thesis is a follow-up of a research of a new method for construction of snarks – double superposition. In the thesis, we search for graphs with an even cycle with a specific quality, based on which we can say that after applying the double superposition correctly on this graph we get a snark. We confirm the presence of this given cycle in known infinite families of snarks – Blanusa and Isaac's. At the same time, based on the results of our program which looks for even cycles with the given quality in graphs, we articulate a hypothesis that an even cycle with the given quality is present in all snarks. We prove that a counterexample for the hypothesis cannot contain small cuts, or small cycles. Furthermore, we verify the correctness of the hypothesis with our program on all nontrivial snarks with up to 36 vertices (included).

Keywords: snark, superposition, double superposition

Obsah

Úvod	1
1 Základné definície a pojmy	3
1.1 Zopár všeobecných pojmov	3
1.2 Snarky a ich konštrukcie	4
1.2.1 Multipóly	4
1.2.2 Tvorba snarkov	4
1.2.3 Dvojitá superpozícia	5
2 Známe triedy snarkov	9
2.1 Blanušové snarky	9
2.2 Isaacsove snarky	11
3 Hypotéza o rozpustnej kružnici	33
3.1 Malé rezy	34
3.2 Malé obvody	39
4 Program na hľadanie rozpustných kružníc	41
4.1 Popis programu	41
4.1.1 Hľadanie kružníc	41
4.1.2 Overovanie rozpustnosti	43
4.2 Výsledky z programu	44
Záver	47

Úvod

V teórii grafov je vyslovených mnoho hypotéz, ktoré čakajú na dokázanie, alebo vyvrátenie. Mnoho iných už však bolo vyvrátených a to pomocou skupiny grafov nazývaných snarky. Snarky sú kubické grafy, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Dnes sú už snarky predmetom viacerých výskumov. Existuje viacero nekonečných tried snarkov, napríklad Blanušové, alebo Isaacsove. Taktiež existujú rôzne metódy na konštrukciu väčších snarkov z menších.

Jednou z konštrukčných metód je superpozícia. Je to metóda akoby nafukovania základného snarku G na väčší graf. Hrany a vrcholy grafu G sa nahradia grafovitými štruktúrami, tzv. superhranami a supervrcholmi, ktoré sa na seba napoja tak, že pôvodný tvar grafu, aj jeho kubickosť, ostanú zachované. Táto metóda nie vždy vytvorí graf, ktorý je opäť snarkom. Ak sa však zvolia správne štruktúry, môže taký prípad nastať. A to je hlavným cieľom superpozície: z menších snarkov tvoriť nové väčšie snarky. Superpozícia je jednou z najsilnejších metód na konštrukciu snarkov.

V nadväznosti na superpozíciu prišli E. Máčajová a M. Škoviera v [11] na obdobnú metódu nazývanú dvojité superpozícia. Táto metóda, na rozdiel od klasickej superpozície, nevyžaduje, aby bol základný graf G snarkom, ale aby boli snarkami dva grafy odvodené z G pomocou operácie obojstranného rozpustenia párnej kružnice v G .

V našej práci nadväzujeme na spomínaný článok a skúmame, v ktorých grafoch sa nachádza kružnica, po ktorej rozpustení na obidve strany dostaneme grafy, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Na problém sa pozeráme z dvoch hľadísk, jednak z teoretického overovania a súčasne sme naprogramovali program, ktorý v grafe zo vstupu hľadá rozpustné kružnice. Na základe týchto dvoch hľadísk sme vyslovili nasledujúcu hypotézu:

Hypotéza 1. *Každý snark obsahuje rozpustnú kružnicu.*

V prvej kapitole sa podrobnejšie pozrieme na metódu superpozície a zavedieme základné pojmy. V druhej kapitole sa pozrieme na známe nekonečné triedy snarkov, Blanušové a Isaacsove. Dokážeme v nich existenciu teoreticky popísateľných typov rozpustných kružníc opakujúcich sa v celých triedach. V tretej kapitole sa venujeme hypotéze z hľadiska redukcie malých rezov a cyklov. Ukážeme, že najmenší protipríklad pre túto hypotézu nemôže obsahovať hranové 2-rezy a 3-rezy a jeho obvod musí byť

aspoň 5. V poslednej štvrtej kapitole sa venujeme výsledkom, ktoré sme získali pomocou nášho programu. Najvýznamnejším je overenie hypotézy na všetkých netriviálnych snarkoch do 36 vrcholov (vrátane) s obvodom aspoň 5.

Kapitola 1

Základné definície a pojmy

Predpokladáme, že čitateľ má základné znalosti v oblasti teórie grafov. Na týchto základoch v tejto kapitole vybudujeme aparát, ktorý nám bude nápomocný pri výskume v ďalších kapitolách. Ak by si čitateľ chcel základné znalosti doplniť, odporúčame siahnuť po tejto literatúre [3].

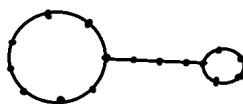
1.1 Zopár všeobecných pojmov

Definícia 1. *Snark je súvislý kubický graf, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný.*

Definícia 2. *Permutačné snarky sú snarky, ktoré majú $2n$ vrcholov. Skladajú sa z dvoch kružníc dĺžky n , ktoré sú medzi sebou poprepájané tak, aby výsledný graf bol kubický a ani jedna kružnica nemala chordu.*

Príklad permutačného snarku je napríklad Petersenov graf.

Definícia 3. *Subdivízia grafu činka je graf skladajúci sa z dvoch cyklov C_1 a C_2 a cesty P takých, že $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ a $|C_i \cap P| = 1$ pre $i = 1, 2$.*



Obr. 1.1: Subdivízia grafu činka

Pojem *vyhladenie vrchola* používame pri vrchole stupňa dva, kde tento vrchol aj s dvoma incidentnými hranami nahradíme jednou hranou.

Definícia 4. *Cykly separujúci k -rez je množina hrán, odstránením ktorej dostaneme aspoň dva komponenty osahujúce cykly.*

1.2 Snarky a ich konštrukcie

Na tvorbu snarkov sa časom vyvinuli viaceré techniky. V nasledujúcich riadkoch si po úvodnom predstavení pojmov niektoré techniky ukážeme. Definície čerpáme najmä z článku [11] od Máčajovej a Škovieru.

1.2.1 Multipóly

Multipól je grafovité štruktúra, ktorá okrem paralelných hrán a slučiek môže obsahovať visiace hrany (také, ktorých len jeden koniec je incidentný s nejakým vrcholom) a izolované hrany (také, ktoré nie sú incidentné so žiadnym vrcholom). Formálnejšie multiól popíšeme ako dvojicu $M = (V, E)$, kde V je konečná množina vrcholov a E je konečná množina hrán. Konce každej hrany môžu aj nemusia byť incidentné s vrcholmi. Koniec hrany, ktorý nie je incidentný so žiadnym vrcholom sa nazýva *polhrana*. *Visiaca* hrana takto má jednu polhranu zatiaľčo *izolovaná* hrana má dve polhrany. Multipól s k polhranami sa nazýva k -pól. V našej práci budeme pracovať s multipólmi, ktoré sú kubické, inak povedané každý vrchol v nich je incidentný práve s tromi koncami hrán.

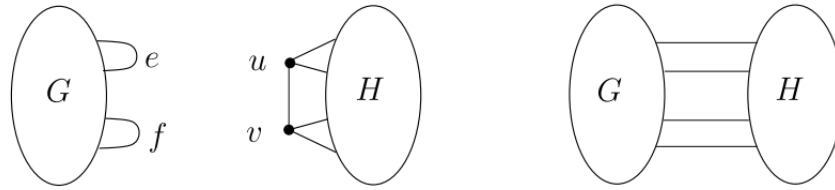
Polhrany multipólov sa zvyknú zoskupovať do disjunktých množín. Tieto nazývame *konektory*. Veľkosť konektora je počet jeho polhrán. Konektor veľkosti k budeme nazývať k -konektor. Multipól s dvoma konektormi budeme nazývať dipól (a niekedy píšate 2-pól) a multipól s tromi konektormi tripól (3-pól). V práci budeme používať aj označenie (n_1, n_2, \dots, n_k) -pól, čo je n -pól, kde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ a polhrany tohto n -pólu sú distribuované do k konektorov S_1, S_2, \dots, S_k , kde veľkosť konektora S_i je n_i . Polhrany v rámci konektorov, ako aj konektory v rámci multipólov sú usporiadané.

1.2.2 Tvorba snarkov

Jedným, už sa takmer dá povedať učebnicovým, príkladom tvorby nového snarku je *štvorsúčin*. Nech G a H sú kubické grafy. V G vyberieme dve hrany $e = ab$ a $f = cd$ a v H dva susedné vrcholy u a v . Nech a', b' sú ďalšie vrcholy z H susediace s u a c', d' ďalšie vrcholy z H susediace s v . Z G odoberieme hrany e a f a z H odoberieme vrcholy u a v . Následne spojíme hranou a s a' , b s b' , c s c' a d s d' . Výsledný graf nazývame *štvorsúčin* (dot product) $G.H$.

Štvorsúčin sa objavil nezávisle v dvoch článkoch: od Adelson-Velskiiho a Titova 1973 [1] a od Isaacs 1975 [5]. V oboch bolo ukázané, že ak urobíme štvorsúčin dvoch snarkov, tak výsledný graf je opäť snark.

Ďalšou technikou na tvorbu snarkov je *superpozícia*. Považuje sa za jednu z najmocnejších techník. Prvú formálnu definíciu superpozície priniesol v roku 1996 Kochol v [6] a neskôr sa jej venoval v [7, 8, 9]. Je to metóda, kde zoberieme graf G , ktorý je snarkom a nahradíme niektoré jeho hrany tzv. *superhranami* a vrcholy *supervrcholmi*.

Obr. 1.2: Štvorsúčin grafov $G.H$

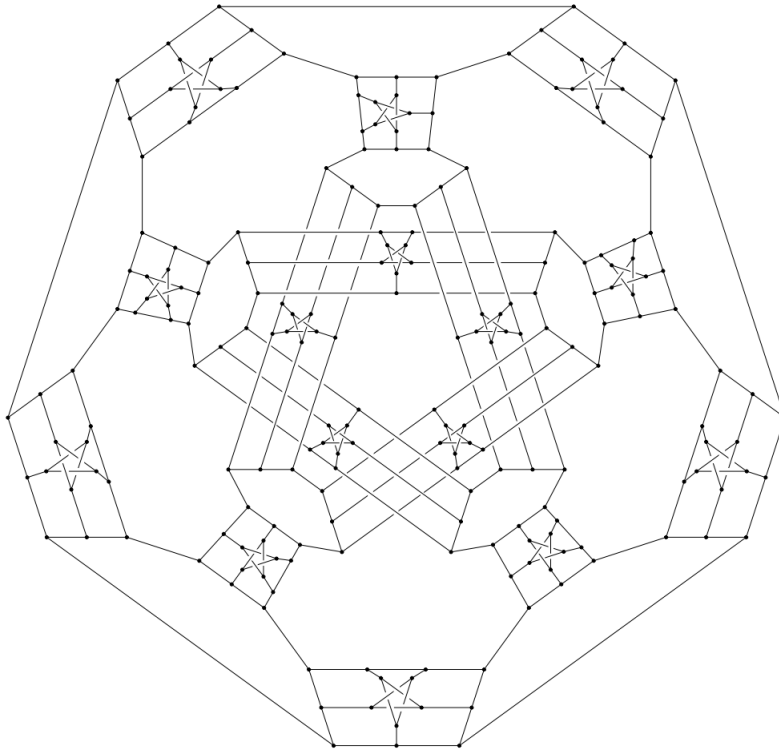
Superhrana je 2-pól a *supervrchol* 3-pól. Polhrany vychádzajúce z týchto multipólov pospájame tak, aby bol zachovaný pôvodný tvar grafu G a aby výsledný graf bol opäť kubický. Dostaneme tak akoby nafúknutý pôvodný graf G . Nie v každom prípade je tento nafúknutý graf opäť snarkom. Závisí to od vhodného výberu superhrán a supervrcholov, ako aj grafu G .

Klasickým príkladom superpozície je Descartov snark, ktorý bol objavený Tutteom vystupujúcim pod pseudonymom Blanche Descartes [2] dávno predtým, ako bola sformulovaná formálna definícia superpozície. Snark zostrojíme nasledovne. Za základ si zoberieme Petersenov graf. Každý vrchol nahradíme supervrcholom tvaru kružnice dĺžky deväť. Hrany následne nahradíme multipólmi, ktoré dostaneme odstránením dvoch vrcholov vo vzdialenosti dva z Petersenovho grafu. Tieto multipóly majú dva konektory veľkosti tri, kde každý konektor pozostáva z visiacich hrán pôvodne incidentných s jedným vrcholom. Nech $e = uv$ je hrana, ktorú práva nahradíme superhranou. Jeden konektor superhrany napojíme na tri susedné vrcholy supervrchola u reprezentovaného cyklom a druhý na tri susedné vrcholy supervrchola v . Výsledok bude kubický graf s 210 vrcholmi (pozri obrázok 1.3).

Bolo nahliadnuté v [7], že aj spomínaný štvorsúčin je v podstate superpozícia grafu H . Hranu $g = uv$ nahradíme superhranou Y_g , ktorú dostaneme z grafu G pretnutím hrán e a f , kde dve visiace hrany jednej pôvodnej hrany tvoria jeden konektor. Vrcholy u a v nahradíme supervrcholmi X_u a X_v , z ktorých každý pozostáva z dvoch izolovaných hrán h a k , kde jeden konektor supervrchola pozostáva z dvoch polhrán – po jednej z h aj z k – a zvyšné dva konektory obsahujú po jednej zvyšnej polhrane h a k . Ostatné hrany a vrcholy grafov G a H ostanú nezmenené. Spojenie konektorov multipólov Y_g , X_u a X_v následne urobíme tak, aby vznikli požadované hrany aa' , bb' , cc' a dd' .

1.2.3 Dvojitá superpozícia

V tejto časti detailnejšie popíšeme výskum, na ktorom staviame našu prácu. V článku [11] autori Máčajová a Škoviera zadefinovali nový typ superpozície. Jej hlavným rozdielom od štandardnej superpozície je, že namiesto požadovania nezafarbiteľnosti základného grafu G je postačujúce, aby nezafarbiteľné boli dva grafy odvodené z grafu G . Tento



Obr. 1.3: Descartov snark

typ superpozície nazvali *dvojitá superpozícia*.

V článku sa konkrétnejšie zaoberali dvojitou superpozíciou, kde odvodené grafy vytvorili tzv. rozpustením párnej kružnice grafu G . Následne, obdobne ako pri klasickej superpozícii, nahradili vrcholy kružnice v pôvodnom grafe G supervrcholmi-negátormi. O tom, ako tieto transformácie vyzerajú a k čomu slúžia povieme nižšie. Prvým krokom bude definícia negátora.

Definícia 5. *Nech H je snark. Keď odoberieme vrcholy cesty dĺžky 2 z H , ostane nám 5-pól N . Polhrany tohto 5-pólu rozdelíme do troch konektorov, kde v jednom konektore budú spolu vždy hrany pôvodne incidentné s jedným vrcholom. Multipól N tak má dva konektory S_1 a S_2 s dvoma polhranami a jeden s jednou polhranou. Multipól $(2, 2, 1)$ -pól nazývame negátor. Konektory S_1 a S_2 nazývame vstupný a výstupný.*

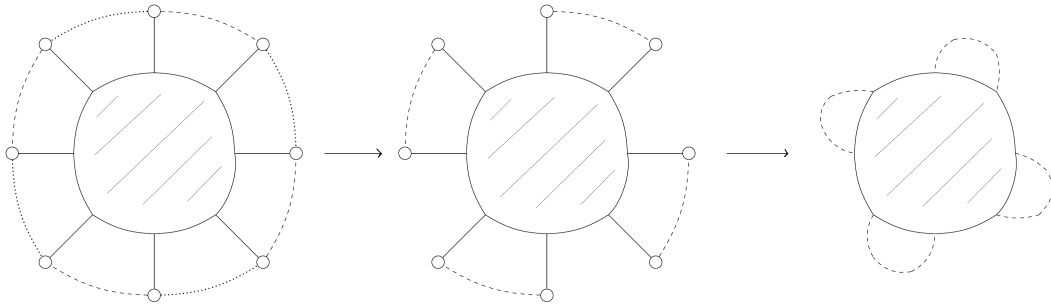
Na to, aby sme vysvetlili prečo tento multipól nesie meno negátor, by sme zašli do oblastí, ktoré nie sú pre našu prácu nevyhnutné. Preto toto meno iba neformálne zdôvodníme. Nech N je negátor a S_1 a S_2 sú konektory veľkosti dva v N . Predstavme si ľubovoľné ofarbenie negátora N tromi farbami. Je dokázateľné, že nemôže nastať prípad, kedy v oboch konektoroch S_1 a S_2 budú mať hrany jedného konektora rovnakú farbu. Takisto nemôže nastať prípad, že v oboch S_1 a S_2 budú mať hrany jedného konektora rôzne farby. Môže teda nastať iba prípad, že v S_1 budú farby hrán rovnaké a v S_2 rôzne, alebo naopak v S_1 rôzne a v S_2 rovnaké. Negátor N teda prepne

zhodné farby vstupného (resp. výstupného) konektora na nezhodné farby výstupného (resp. vstupného) konektora.

Nasleduje definícia rozpustnej kružnice. Túto kružnicu budeme používať pri odvodovaní menších grafov použitých pri dvojitej superpozícii negátorom, o ktorej hovorí článok. Za definíciou rozpustnosti kružnice bude nasledovať definícia samotnej superpozície negátorom. Nakoniec vyslovíme hlavné tvrdenie článku.

Nech G je súvislý kubický graf a $C = (v_0v_1\dots v_{2k-1})$ párna kružnica v grafe G . Označíme $E_0(C)$ množinu hrán kružnice C z v_{2i} do v_{2i+1} pre všetky $i = 0, \dots, k-1$ a $E_1(C)$ množinu hrán kružnice C z v_{2i+1} do v_{2i+2} pre všetky $i = 0, \dots, k-1$, kde indexy sú brané *mod* $2k$. Uvedomme si, že grafy $G - E_0(C)$ a $G - E_1(C)$ nemusia byť súvislé a všetky ich vrcholy sú stupňa dva alebo tri. Nech G_0^C je graf, ktorý vznikne z G odstránením hrán $E_0(C)$ a následným vyhladením vrcholov stupňa dva. Podobne nech G_1^C vznikne odstránením hrán $E_1(C)$ a vyhladením vrcholov stupňa dva. Grafy G_0^C a G_1^C nazveme odvodenými grafmi, ktoré vznikli rozpustením kružnice C v grafe G na jednu, alebo druhú stranu. Pokiaľ C nie je hamiltonovská, tak sú grafy G_0^C a G_1^C kubické, no nie nutne súvislé.

Aby čitateľ dostal lepší vhľad do toho, čo to znamená rozpustiť kružnicu, popíšeme tento priebeh aj menej formálne. Predstavme si, že hrany danej párnej kružnice C v kubickom grafe G striedavo ofarbíme na zeleno a červeno. Rozpustenie na jednu stranu znamená odstránenie hrán jednej farby (napr. zelenej) z grafu G a následné vyhladenie vrcholov stupňa dva. Názornú ukážku môžeme vidieť na obrázku 1.4.



Obr. 1.4: Rozpustenie kružnice na jednu stranu

Definícia 6. Nech G je súvislý kubický graf a C párna kružnica v grafe G . Ak platí, že odvodené grafy G_0^C a G_1^C , ktoré vznikli rozpustením kružnice C v G , nie sú 3-zafarbitelné, tak kružnicu C nazveme rozpustná. Pokiaľ je zafarbitelný práve jeden z grafov G_0^C , alebo G_1^C , hovoríme, že kružnica C je rozpustná na jednu stranu.

Definícia 7. Nech G je súvislý kubický graf a nech $C = (v_0v_1\dots v_{2k-1})$ je kružnica v grafe G s počtom vrcholov $2k$. Skonstruujeme graf G' tak, že každý vrchol kružnice C nahradíme $(2,2,1)$ -pólom tak, aby konektory veľkosti dva kopírovali pôvodné hrany kružnice a zvyšný konektor veľkosti jeden kopíroval hranu na jednej strane incidentnú s

vrcholom kružnice a na druhej strane smerujúcu mimo kružnice. Nahrádzanie urobíme nasledovne. Pre každé $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ nahradíme vrchol v_{2i} kružnice C negátorom N_{2i} a vrchol v_{2i+1} ľubovoľným $(2, 2, 1)$ -pólom M_{2i+1} . Následne spojíme výstupný konektor negátora N_{2i} so vstupným konektorom multipólu M_{2i+1} a výstupný konektor multipólu M_{2i+1} so vstupným konektorom negátora N_{2i+2} tak, aby bol výsledný graf G' kubický. Hovoríme, že G' vznikol z G párnou negátorovou superpozíciou vzhľadom na kružnicu C .

Už máme všetko pripravené na hlavný výsledok článku. Ten prezentujeme v nasledujúcej vete.

Veta 8. *Nech G je súvislý kubický graf a nech G' je graf, ktorý sme vytvorili z G dvojitou superpozíciou negátorom vzhľadom na kružnicu C v G . Ak sú oba grafy G_0^C a G_1^C nezafarbitelné, tak G' je nezafarbitelný.*

Dvojitá superpozícia negátorom teda umožňuje tvorbu snarkov nielen zo snarkov, ale aj z iných kubických grafov. Otvorenou otázkou na konci článku bolo, v akých všetkých grafoch sa nachádza rozpustná kružnica. V ďalších kapitolách sa zaoberáme práve hľadaním týchto rozpustných kružníc v grafoch.

Kapitola 2

Známe triedy snarkov

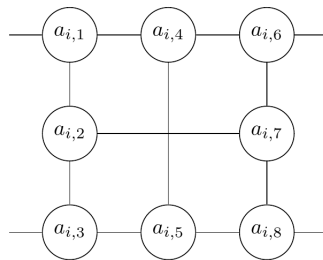
V tejto triede sa budeme venovať dvom známym triedam snarkov – Blanušovým a Isaacsovim. V oboch sme urobili pozorovania ohľadom prítomnosti rozpustných kružníc v grafoch týchto tried. Overili sme, že pre obidve triedy platí, že v každom grafe triedy existuje rozpustná kružnica. O Isaacsovych sme dokázali ešte niečo trochu viac.

2.1 Blanušové snarky

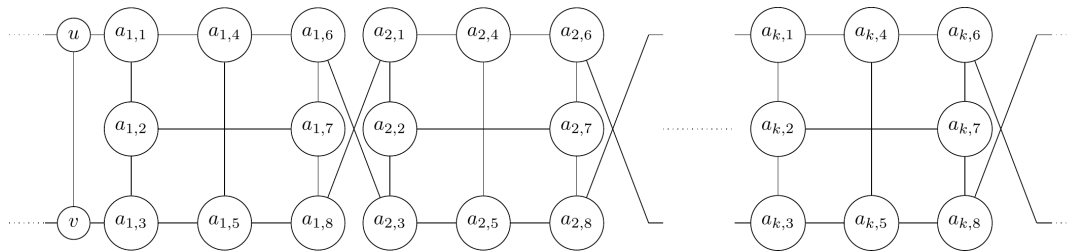
Trieda Blanušových snarkov je podtriedou permutačných snarkov. Prvýkrát sa im významnejšie venovali v [10]. Tieto snarky majú jednoducho opísateľný tvar utvorený z konečného počtu cyklicky zapojených rovnakých blokov. Nahliadli sme, že vďaka tejto cyklickej konštrukcii je v nich možné nájsť rozpustnú kružnicu dĺžky $n - 2$ v každom grafe tejto triedy. To znamená, že vždy keď do grafu zapojíme nový blok, vieme kružnicu cez blok previesť tak, aby si zachovala svoju rozpustnosť.

Definícia 9. *Blanušové snarky sa skladajú z dvoch úvodných vrcholov u a v a z konečného počtu cyklicky zapojených blokov s ôsmimi vrcholmi, kde i -ty blok má vrcholy $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,8}$ a hrany tvoriace mriežku: $a_{i,1}a_{i,2}, a_{i,1}a_{i,4}, a_{i,2}a_{i,3}, a_{i,2}a_{i,7}, a_{i,3}a_{i,5}, a_{i,4}a_{i,5}, a_{i,4}a_{i,6}, a_{i,5}a_{i,8}, a_{i,6}a_{i,7}, a_{i,7}a_{i,8}$ (pozri obrázok 2.1), hrany vedúce do predchádzajúceho bloku $a_{i,1}a_{i-1,8}, a_{i,3}a_{i-1,6}$ a hrany vedúce do nasledujúceho bloku $a_{i,6}a_{i+1,3}, a_{i,8}a_{i+1,1}$ (pozri obrázok 2.2). Označenie B_k budeme používať pre graf z Blanuša triedy s k za sebou idúcimi blokmi. Graf B_k je Petersenov graf.*

Blanušové snarky majú tvar, ktorý pozýva k nahliadnutiu, či sa v ňom nenachádza nejaká veľká kružnica, ktorá by postupne prechádzala cez zapojené bloky a po ktorej rozpustení by ostal malý graf, na ktorom by sa ľahko overila zafarbiteľnosť. Povzbudením na vydanie sa týmto smerom pre nás boli aj výstupy nášho programu, ktoré nám ukázali, že v Blanušových snarkoch sa nachádza pomerne veľa kružníc dĺžky $n - 2$, ktoré sú zároveň rozpustné. Konkrétne na vstupe so štyrmi najmenšími Blanušovými



Obr. 2.1: Blok použitý na konštrukciu Blanušových snarkov.

Obr. 2.2: Graf z Blanuša triedy s k blokmi

snarkami s počtami vrcholov 18 až 42 sme zistili, že zo všetkých kružníc dĺžky $n - 2$ sú vždy viac ako tri štvrtiny rozpustné. Pomocou výstupov popisujúcich tieto kružnice sme našli jeden typ, ktorý sa opakuje v celej triede Blanušových snarkov. To znamená, že v Blanušovom snarku s ľubovoľným počtom blokov vieme popísať kružnicu, po ktorej rozpustení na obidve strany dostaneme zaručene nezafarbiteľné grafy.

Veta 10. *Nech B_k je graf z nekonečnej rodiny Blanušových grafov s k blokmi. Potom kružnica*

$$u v a_{k,6} a_{k,7} a_{k,8} a_{k,5} a_{k,4} a_{k,1} a_{k,2} a_{k,3} a_{k-1,6} a_{k-1,7} a_{k-1,8} a_{k-1,5} \dots a_{1,6} a_{1,4} a_{1,5} a_{1,3} a_{1,2} a_{1,1}$$

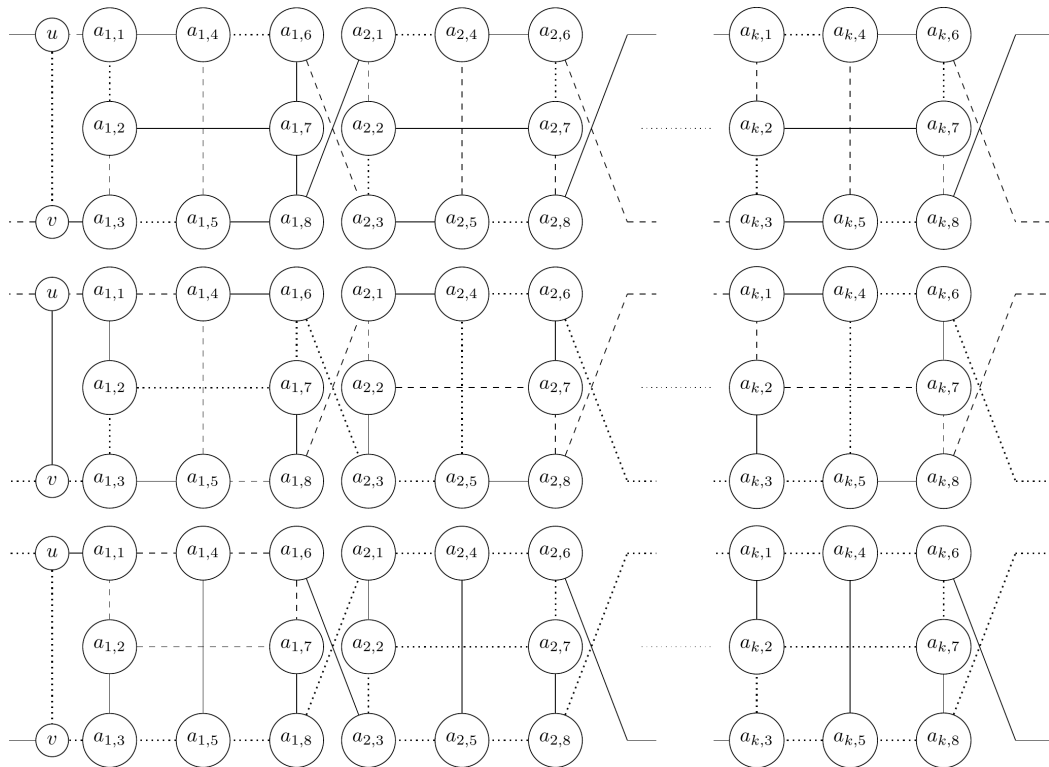
je rozpustná.

Dôkaz. Ukážeme, že rozpustenie kružnice na obidve strany vedie ku vzniku grafu činky, ktorá je hranovo nezafarbiteľná tromi farbami.

Hrany kružnice ofarbíme striedavo zelenou a červenou farbou tak, že hrana uv je červená hrana. Ak z grafu odstránime všetky červené hrany, výsledný graf bude subdivíziou činky pozostávajúcej z cesty P dĺžky 1 z vrcholu $a_{1,7}$ do $a_{1,8}$ a z dvoch kružníc C_1 a C_2 , kde $C_1 = a_{1,7} a_{1,6} a_{2,3} a_{2,5} a_{2,4} a_{2,6} a_{3,3} \dots a_{k,6} v a_{1,3} a_{1,2}$ a $C_2 = a_{1,8} a_{2,1} a_{2,2} a_{2,7} a_{2,8} a_{3,1} \dots a_{k,8} u a_{1,1} a_{1,4} a_{1,5}$. Kružnica C_1 pretína cestu P vo vrchole $a_{1,7}$ a kružnica C_2 pretína cestu P vo vrchole $a_{1,8}$.

Obdobne ak z grafu odstránime zelené hrany, výsledný graf bude opäť pozostávať z cesty P dĺžky 1 z vrcholu $a_{1,7}$ do $a_{1,8}$ a z dvoch kružníc C'_1 a C'_2 , kde $C'_1 = a_{1,7} a_{1,6} a_{1,4} a_{1,1} a_{1,2}$ a $C'_2 = a_{1,8} a_{2,1} a_{2,4} a_{2,6} a_{2,7} a_{2,2} a_{2,3} a_{2,5} a_{2,8} a_{3,1} \dots a_{k,8} u v a_{1,3} a_{1,5}$. Kružnica C'_1 pretína cestu P vo vrchole $a_{1,7}$ a kružnica C'_2 pretína cestu P vo vrchole $a_{1,8}$, čím je vytvorená subdivízia grafu činka.

Keď teraz v obidvoch odvodených grafoch vyhladáme vrcholy stupňa 2, tak dostaneme grafy činky, ktoré sú hranovo nezafarbiteľné tromi farbami. \square

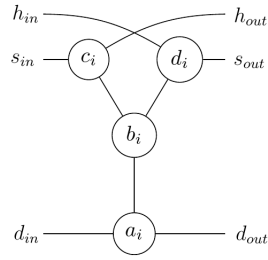
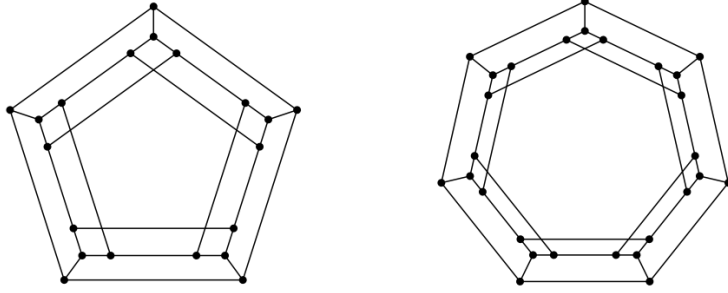


Obr. 2.3: Horný obrázok: rozpustná kružnica ofarbená striedavo na červeno a zeleno (čiarky a bodky). Stredný a dolný obrázok: subdivízie činky po pomyselnom odstránení hrán jednej a druhej farby. Jedna kružnica subdivízie je vždy znázornená bodkovanou čiarou a druhá prerušovanou čiarou.

Počítačové experimenty naznačujú, že podobných, v celej triede sa opakujúcich typov kružníc, existuje veľa. Ukázali, že približne trištvrté kružníc dĺžky $n - 2$, nachádzajúcich sa v jednotlivých Blanušových snarkoch, je rozpustných.

2.2 Isaacsove snarky

Trieda Isaacsových snarkov je jednou z prvých známych nekonečných tried snarkov [5]. Snark J_k pozostáva z k cyklicky zapojených (3,3)-pólov Y zobrazených na obrázku 2.4, kde k je nepárne prirodzené číslo. Na obrázku 2.5 môžeme vidieť snarky J_5 a J_7 . Isaacsove snarky majú výhodný tvar, hrany spájajúce koncové vrcholy ramien Y tvoria jednu súvislú kružnicu. Pomocou nášho programu sme zistili, že v Isaacsových snarkoch J_5 až J_9 existuje veľa kružníc dĺžky $n - 2$ a na týchto sme odpozorovali, že práve tie kružnice, pri ktorých sú chýbajúce vrcholy susedné, sú rozpustné. Podujali sme sa dokázať, že toto pozorovanie je rozšíriteľné na celú triedu Isaacsových snarkov.

Obr. 2.4: (3,3)-pól Y_i použitý na konštrukciu Isaacsovho snarkuObr. 2.5: Isaacsove snarky J_5 a J_7

Tvrdenie 1. *Všetky kružnice dĺžky $n - 2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.*

K dôkazu tvrdenia sa dostaneme postupne. Zavedieme si potrebné značenie. Vrcholy multipólu Y označíme symbolmi a, b, c a d , ako je zobrazené na obrázku 2.4. Pri práci s viacerými multipólmi Y budeme používať indexy: Y_1, Y_2, \dots, Y_k a takisto aj vrcholy príslušného Y_i budeme označovať a_i, b_i, c_i, d_i . Hrany vchádzajúce do Y označíme h_{in}, s_{in} a d_{in} (podľa pozície – horná, stredná a dolná). Obdobne hrany vychádzajúce z Y označíme h_{out}, s_{out} a d_{out} . Ak bude z kontextu jasné, či ide o vchádzajúce, alebo vychádzajúce hrany, indexovanie pomocou *in* a *out* budeme vynechávať.

Pozrime sa teraz, aké možnosti vynechaných susedných vrcholov môžu nastať. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že dvojica odobratých vrcholov patrí Y_1 až Y_3 . Túto postupnosť budeme v ďalšom texte označovať $Y_1 \dots Y_3$. V kružnici dĺžky $n - 2$ môžu chýbať nasledovné susedné vrcholy:

- A. b_2 a d_2
- B. a_2 a b_2
- C. d_2 a c_3
- D. a_2 a a_3
- E. d_2 a c_3

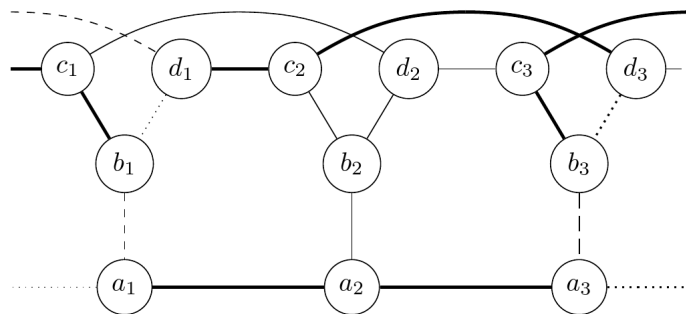
Možnosť b_2 , c_2 vynechávame, pretože je osovo symetrická k možnosti A a zo symetrickosti Isaacsových snarkov by sme pri nej dostali rovnaké výsledky ako pri možnosti A.

Na nasledujúcich stranách ukážeme, že nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1. Ukážeme, že pre žiadnu z možností A, ..., E nie je možné skonštruovať v istom slova zmysle najmenší možný graf s nerozpustnou kružnicou dĺžky $n - 2$. Všetky pokusy totiž budú viesť ku kružnici, ktorá je rozpustná, po ktorej rozpustení ostane graf činka.

Pomocou možnosti A si dobudujeme aparát, ktorý budeme používať pri konštruovaní možných protipríkladov pre Tvrdenie 1 aj pri ostatných možnostiach chýbajúcich vrcholov. Všimnime si, že pri možnosti A existujú len štyri spôsoby, ako môže cez trojicu $Y_1 \dots Y_3$ prechádzať kružnica dĺžky $n - 2$.

Lema 11. *Existujú štyri spôsoby, akými môže kružnica dĺžky $n - 2$ prechádzať multipólmi $Y_1 \dots Y_3$, ak v nej chýbajú vrcholy b_2 a d_2 .*

Dôkaz. Kružnica musí vrcholy b_2 a d_2 obchádzať, tým pádom vieme s istotou povedať, že hrany d_1c_2 , c_2d_3 , a_1a_2 , a_2a_3 , d_kc_1 , c_1b_1 , b_3c_3 a c_3d_4 musia ležať na kružnici. Môžeme nahliadnuť, že aby v kružnici ležali všetky vrcholy Y_1 , potrebujeme do kružnice pridať buď hrany c_kd_1 a a_1b_1 , alebo hrany $a_k a_1$ a b_1d_1 . Podobne, aby v kružnici ležali všetky vrcholy Y_3 , potrebujeme do kružnice pridať buď hrany d_3c_4 a a_3b_3 , alebo hrany a_3a_4 a b_3d_3 (pozri obrázok 2.6). Iné kombinácie hrán by viedli k tomu, že buď by sme kružnicou nepokryli všetky vrcholy, alebo by kružnica nebola súvislá. Všetky kombinácie týchto dvojíc hrán sú štyri. \square



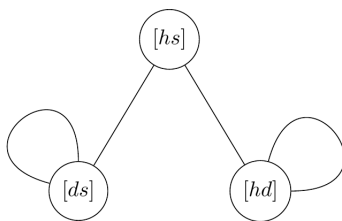
Obr. 2.6: Možnosť A: v kružnici chýbajú vrcholy b_2 a d_2 . Hrubou čiarou sú označené hrany, ktoré v kružnici musia byť na základe výberu chýbajúcich vrcholov. Čiarkami a bodkami sú označené dvojice hrán, z ktorých vždy jednu dvojicu treba vybrať do kružnice, aby boli všetky vrcholy Y_1 a Y_3 pokryté.

Podme sa pozrieť na to, akým spôsobom môže cez multipól Y prechádzať kružnica. Je ľahké nahliadnuť, že ak chceme zachovať súvislosť kružnice a pokrytie všetkých vrcholov, tak ak z jednej strany do Y kružnica vchádza cez ľubovoľné dve hrany, tak z nej na druhej strane nemôže vychádzať ani cez tri, ani cez jednu, ani cez žiadnu hranu.

Musí vychádzať cez dve. Keďže pri možnosti A do Y_1 vchádzajú aj z Y_3 vychádzajú dve hrany, budú aj do všetkých zvyšných Y grafu aj vchádzať aj z nich vychádzať dve hrany kružnice. Pozrime sa, ktoré kombinácie dvojíc vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán sú možné, aby kružnica prechádzala všetkými vrcholmi daného Y . Pre zjednodušenie si zavedieme značenie: multipól Y , do ktorého bude kružnica vchádzať cez hornú a strednú hranu a bude z neho vychádzať cez dolnú a strednú označíme ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$. Samotné kombinácie vchádzajúcich, alebo vychádzajúcich hrán budeme označovať $[hs]$, $[ds]$, $[hd]$. Nasledujúca lema hovorí o možných kombináciách dvojíc vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán multipólu Y .

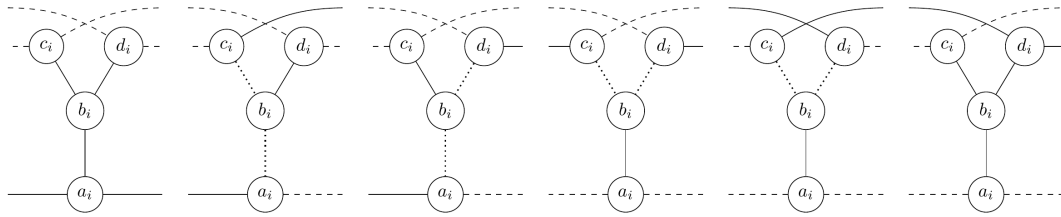
Lema 12. *Možnosti kombinácií dvojíc vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán Y ležiacich v kružnici tvoria neorientovaný graf G , kde $V = \{[hs], [ds], [hd]\}$ a $E = \{[hs][ds], [hs][hd], [ds][ds], [hd][hd]\}$.*

Dôkaz. Prejdeme si všetky možnosti, okrem tých, ktoré sú v podstate tie isté, len zrkadlové. Možnosť ${}_{[hs]}Y_{[hs]}$ plynulo prechádza cez Y iba hornými a strednými hranami a nemožno prechod doplniť tak, aby pokrýval vrcholy a a b . Možnosť ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$ je možné doplniť hranami cb a ba a vznikne tak prechod pokrývajúci všetky vrcholy Y . Takisto možnosť ${}_{[hs]}Y_{[hd]}$ je možné doplniť hranami bd a ba a vznikne tak prechod pokrývajúci všetky vrcholy Y . Obidve možnosti ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$ a ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$ je možné doplniť hranami cb a bd . Posledná možnosť ${}_{[ds]}Y_{[hd]}$ opäť tvorí plynulý prechod, ktorý nie je možné doplniť tak, aby pokrýval aj vrcholy b a d . Keďže zároveň platia aj zrkadlové verzie kombinácií, zo všetkých možností nám vznikol spomínaný neorientovaný graf, kde hrana reprezentuje možný korektný prechod kružnice cez multipól Y (pozri obrázok 2.7). \square



Obr. 2.7: Neorientovaný graf možných kombinácií dvojíc hrán, ktorými v rámci Y prechádza kružnica

Zistili sme, akým spôsobom musí kružnica prechádzať cez multipóly Y , ak na jednej strane do multipólu vchádzajú dve hrany kružnice, aby pokryla všetky okrem zvolených dvoch chýbajúcich vrcholov. Pozrime sa teraz, čo vieme povedať o jej striedavom zafarbení využívanom pri rozpúšťaní. Pri možnosti A, nech už zoberieme ktorúkoľvek kombináciu vchádzajúcich, alebo vychádzajúcich hrán, budú do Y_1 vždy vchádzať, aj z Y_3 vychádzať dve hrany. Sú dva spôsoby, ako môžeme v rámci $Y_1 \dots Y_3$ kružnicu ofarbiť:



Obr. 2.8: Kombinácie dvojíc hrán kružnice prechádzajúcich cez Y (čiarkovaná) a ich možné doplnenie (bodkovaná). Zľava-doprava: $_{[hs]}Y_{[hs]}$, $_{[hs]}Y_{[ds]}$, $_{[hs]}Y_{[hd]}$, $_{[hd]}Y_{[hd]}$, $_{[ds]}Y_{[ds]}$, $_{[ds]}Y_{[hd]}$.

- i) Obidve hrany vchádzajúce do Y_1 budú rovnakej farby (napr. červenej), tým pádom, keďže obe cesty patriace kružnici majú pri ľubovoľnej kombinácii v $Y_1 \dots Y_3$ nepárny počet vrcholov, obidve hrany vychádzajúce z Y_3 budú tiež rovnakej, no opačnej farby (v tomto prípade zelenej).
- ii) Jedna hrana vchádzajúca do Y_1 bude jednej farby (napr. zelenej) a druhá bude druhej farby (červenej). Tým pádom aj hrany vychádzajúce z Y_3 budú mať rozdielne farby.

Nahliadneme, že možnosť i) nemôže nastať.

Lema 13. *Nech C je kružnica dĺžky $n - 2$ s možnosťou chýbajúcich vrcholov A . Potom neexistuje korektné striedavé ofarbenie kružnice C , v ktorom by dve hrany vchádzajúce do Y_1 boli rovnakej farby.*

Dôkaz. Vieme, že medzi Y_3 a Y_1 musíme dosadiť páry počet Y . Pozrime sa ako funguje prepínanie farieb v rámci jedného Y . Každý možný ťah prechádzajúci cez Y obsahuje dve, alebo štyri hrany (ľahko odpozorovateľné na obrázku 2.8). Ak teda kružnica vchádza do Y hranou jednej farby, na konci ťahu bude vychádzať hranou druhej farby. Ak obidve vchádzajúce hrany sú rovnakej farby (napr. červenej), Y spôsobí, že obidve vychádzajúce hrany budú rovnakej, no opačnej farby (zelenej). Ak za seba postavíme páry počet Y , vychádzajúca farba posledného Y bude totožná s vchádzajúcou farbou prvého Y . Tu však nastáva problém pri zvolenej možnosti ofarbenia. Nech do Y_1 vchádzajú červené hrany. Z Y_3 teda budú vychádzať zelené. Na Y_3 napojíme páry počet Y . Z posledného budú opäť vychádzať zelené hrany. To však nie je napojiteľné na hrany červenej farby vchádzajúce do Y_1 . \square

Zistili sme, že dvojice hrán vchádzajúcich do Y_1 aj vychádzajúcich z Y_3 , ako aj dvojice hrán vchádzajúcich do a vychádzajúcich z každého Y , budú ofarbené dvoma rôznymi farbami. Pre ďalšiu prácu si nazveme doplnenie postupnosti multipólov Y , pri ktorom sa korektné napojí kružnica (korektné v zmysle napojenia hrán vzhľadom na pozíciu – horná, dolná, stredná – aj na farbu), *korektné doplnenie* postupnosti multipólov Y .

Ďalej pri napájaní postupnosti Y potrebujeme sledovať nielen to, či je korektné, ale aj to, či po odstránení hrán jednej farby vzniknú cesty z vrcholov stupňa dva, ktoré sú súčasťou subdivízie grafu činka, alebo subdivízia trojhrany spájajúcej dva vrcholy. Podobné odsledovanie tvorby ciest potrebujeme urobiť pri odstránení hrán druhej farby.

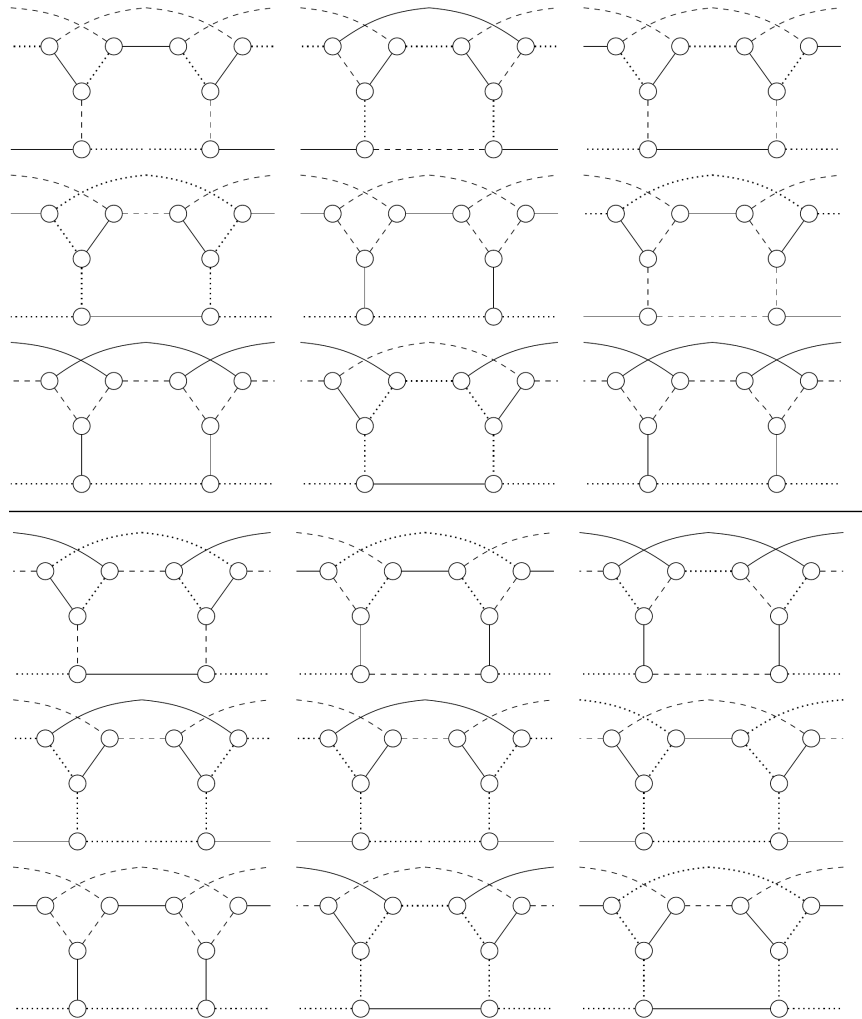
Pozrime sa teraz, ako môžu vyzeráť postupnosti Y napájané na trojicu $Y_1 \dots Y_3$. Vieme, že musia byť párnej dĺžky, aby dotvorili kompletný Isaacsov snark. V podstate to budú postupnosti Y vytvorené na základe sledov párnej dĺžky po grafe z Lemy 12. V nasledujúcich dvoch lemach ukážeme, že existujú krátke postupnosti Y s konkrétnymi kombináciami hrán, cez ktoré prechádza kružnica také, že na konci postupnosti sme tam, kde sme boli na začiatku a to jednak v napojení kružnice, čo sa týka farby a pozícií hrán, a tiež v napojení ciest z vrcholov stupňa dva vzniknutých po odstránení hrán jednej, aj druhej farby. O týchto postupnostiach vieme povedať, že s istotou nebudú v minimálnom protipríklade pre Tvrdenie 1.

Lema 14. *Ak sa minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1 skladá z aspoň piatich multipólov Y , tak neobsahuje postupnosti Y dĺžky dva ${}_{[hs]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$; ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[hs]}$; ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$, ${}_{[hs]}Y_{[hd]}$; ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$.*

Dôkaz. Rozoberieme prípad postupnosti ${}_{[hs]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$. Nech Y_i je prvý Y postupnosti. Je ľahké nahliadnuť, že vchádzajúca aj vychádzajúca dvojica hrán postupnosti sú totožné čo sa týka pozície aj farby. Pozrime sa, čo sa stane po odstránení červených hrán kružnice. Ostanú nám dve súvislé cesty z vrcholov stupňa dva: $p_1 = c_{i-1}d_i c_{i+1}d_{i+2}$ a $p_2 = a_{i-1}a_i b_i c_i d_{i+1} b_{i+1} a_{i+1} a_{i+2}$. Môžeme nahliadnuť, že vchádzajúca a vychádzajúca hrana cesty p_1 majú rovnakú pozíciu. Cesta p_1 je tak napojením na jednu kružnicu tvoriacej sa subdivízie grafu činka. To isté môžeme povedať aj o ceste p_2 , ktorá bude napojením na druhú kružnicu tvoriacej sa subdivízie grafu činka. Podobne po odstránení zelených hrán kružnice ostanú cesty: $p'_1 = d_{i-1}c_i b_i d_i c_{i+1} b_{i+1} d_{i+1} c_{i+2}$ a $p'_2 = a_{i-1}a_i a_{i+1} a_{i+2}$. Aj tu môžeme nahliadnuť, že vchádzajúce a vychádzajúce hrany týchto ciest sú čo sa týka pozície rovnaké a cesty p'_1 a p'_2 dopĺňajú kružnice tvoriacej sa subdivízie grafu činka. Pre lepšiu predstavivosť dávame do pozornosti obrázky 2.9, kde sú zobrazené aj ostatné prípady odstrániteľných postupností dĺžky dva. \square

Uvedomme si, že postupnosti dĺžky dva z predošlej lemy v podstate predstavujú sled dĺžky dva v grafe z Lemy 12 taký, že prejdeme hore-dole po tej istej hrane. Keď teda budeme tvoriť sledy v grafe z Lemy 12, na základe ktorých budeme tvoriť postupnosti multipólov Y , ktoré napojíme na $Y_1 \dots Y_3$, môžeme vynechať tie možnosti, kde prejdeme dvakrát za sebou po tej istej hrane.

Lema 15. *Ak sa minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1 skladá z aspoň deviatich multipólov Y , tak neobsahuje postupnosť multipólov $S = {}_{[hs]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$, ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[hs]}$, ani jej ľubovoľné cyklické posuny.*

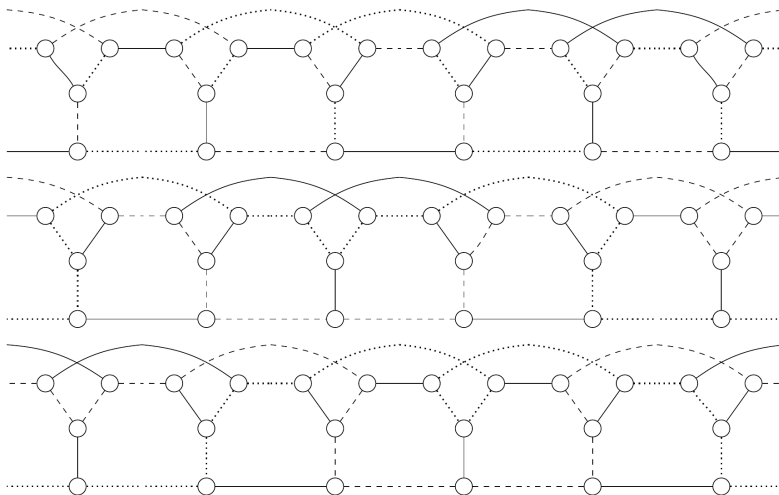


Obr. 2.9: Triviálne postupnosti dĺžky dva. V stĺpci vždy popísaná jedna postupnosť: hore ako vyzerá prechod kružnice cez postupnosť (čiarky = zelená, bodky = červená), v strede ako vyzerajú cesty z vrcholov stupňa dva po odstránení červených hrán kružnice, dole ako vyzerajú cesty z vrcholov stupňa dva po odstránení zelených hrán kružnice.

Dôkaz. Pomocou obrázka 2.10 môžeme nahliadnuť, že kružnica cez postupnosť prechádza korektne a vchádzajúca aj vychádzajúca dvojica postupnosti sú rovnaké čo sa týka pozície aj farby hrán. Takisto môžeme nahliadnuť, že po odstránení hrán jednej, alebo druhej farby nám ostanú dve súvislé cesty začínajúce a končiace vždy na tej istej pozícii. Nakoniec môžeme nahliadnuť, že podobné výsledky dostaneme pri ľubovoľnom cyklickom posune tejto postupnosti. \square

Postupnosti z Lemy 14 a Lemy 15 budeme nazývať *triviálne*. Aj vďaka vyššie uvedeným dvom leмам vieme o najmenšom protipríklade povedať ešte nasledovné tri lemy:

Lema 16. *Minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1 neobsahuje postupnosť vytvorenú na základe sledu $[hs]-[hs]$ kladnej párnej dĺžky.*



Obr. 2.10: Triviálna postupnosť $S = [hs]Y_{[hd]}, [hd]Y_{[hd]}, [hd]Y_{[hs]}, [hs]Y_{[ds]}, [ds]Y_{[ds]}, [ds]Y_{[hs]}$. Hore ako vyzerá prechod kružnice cez postupnosť (čiarky = zelená, bodky = červená), v strede ako vyzerajú cesty z vrcholov stupňa dva po odstránení červených hrán kružnice, dole ako vyzerajú cesty z vrcholov stupňa dva po odstránení zelených hrán kružnice.

Dôkaz. Pozrime sa na to, aké možnosti tvorby sledu párnej dĺžky v grafe z Lemy 12 máme. Začneme vo vrchole $[hs]$. Prejdeme najprv do vrcholu $[hd]$. Aby sme neprešli opäť po tej istej hrane, ostaneme v $[hd]$ a otočíme sa vo vrchole. Druhý krát sa vo vrchole otočiť nemôžeme, preto sa vrátíme do $[hs]$ budeme mať sled dĺžky tri: $[hs][hd][hd][hs]$. Vieme že nemôžeme prejsť opäť do $[hd]$. Môžeme však prejsť do $[ds]$, otočiť sa v ňom a opäť sa vrátiť do $[hs]$. Dostaneme tak párny sled $[hs][hd][hd][hs][ds][ds][hs]$. Z toho ale dostaneme postupnosť z Lemy 15, o ktorej vieme, že sa v minimálnom protipríklade nachádzať nebude a zároveň sme v tej istej situácii ako na začiatku tvorby sledu. Podobný výsledok by sme dostali aj keby sme prvý krok urobili do vrcholu $[ds]$. Iné možnosti tvorby párneho sledu nie sú. \square

Lema 17. *Minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1 neobsahuje postupnosť vytvorenú na základe sledu $[hd]-[hd]$ kladnej párnej dĺžky.*

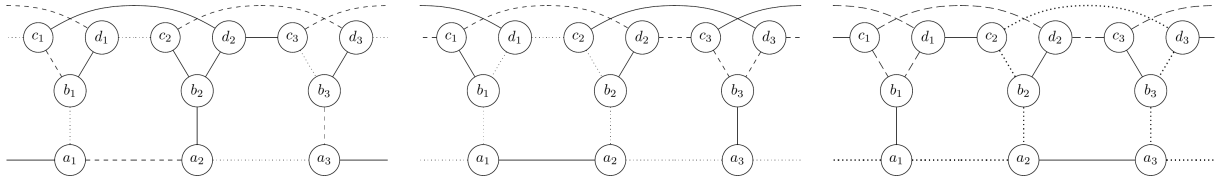
Dôkaz. Opäť tvoríme sled párnej dĺžky v grafe z Lemy 12. Začneme vo vrchole $[hd]$. Máme v dve možnosti: prejsť do vrcholu $[hs]$, alebo otočiť sa raz v sebe samom. Pri prvej možnosti je jedinou cestou ako sa vyhnúť prejdenu dvakrát po tej istej hrane, pokračovať do $[ds]$, raz sa v ňom otočiť, vrátiť sa do $[hs]$ a potom do $[hd]$. Máme sled dĺžky 5. Aby sme dostali sled párnej dĺžky, môžeme sa ešte raz otočiť vo vrchole $[hd]$. Tu však dostaneme sled, ktorý opäť vedie k postupnosti z Lemy 15. Podobný výsledok dostaneme aj pri druhej možnosti, keď sa na začiatku otočíme vo vrchole $[hd]$. Jediný rozdiel bude, že postupnosť párnej dĺžky dostaneme bez posledného otočenia sa vo vrchole. Iné možnosti tvorby párneho sledu, ktorý nevedie k triviálnej postupnostiam, nie sú. \square

Lema 18. *Minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1 neobsahuje postupnosť vytvorenú na základe sledu $[ds]$ – $[ds]$ kladnej párnej dĺžky.*

Dôkaz. Dôkaz je analogický k dôkazu Lemy 17. \square

Teraz už máme pripravené všetky stavebné bloky, aby sme sa mohli pozrieť na jednotlivé kombinácie vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán multipólov Y_1 a Y_3 pri možnosti A a následne aj pri ostatných možnostiach. Pozeráme sa, či vieme nájsť aspoň jednu kružnicu dĺžky $n - 2$, ktorú vieme dotvoriť a ktorá bude nerozpustná. Pozrime sa najprv na kombináciu, kde do Y_1 vchádzajú aj z Y_3 vychádzajú stredná a horná hrana. Túto kombináciu pre multipóly $Y_1 \dots Y_3$ označíme ${}_{[hs]}A_{[hs]}$ a obdobne označíme ostatné možné kombinácie.

Bez ujmy na všeobecnosti, nech je horná hrana vchádzajúca do Y_1 zelená. Keď odstránime červené hrany, ostanú nám, okrem hrany b_2d_2 , cesty $p_{z_1} = c_k d_1 b_1 c_1 d_2 c_3 d_4$ a $p_{z_2} = a_k a_1 a_2 b_2 c_2 d_3 b_3 a_3 a_4$. Keď odstránime zelené, ostanú nám, okrem hrany b_2d_2 , cesty $p_{c_1} = d_k c_1 d_2 c_3 b_3 d_3 c_4$ a $p_{c_2} = a_k a_1 b_1 d_1 c_2 b_2 a_2 a_3 a_4$ (pozri obrázok 2.11). Ukážeme, že napojením ľubovoľnej korektnej postupnosti multipólov Y , ktorá neobsahuje triviálne postupnosti, a odstránením hrán jednej farby a v ďalšom prípade aj druhej farby vzniknú cesty z vrcholov stupňa dva tvoriace spolu s hranou b_2d_2 subdivíziu grafu činka.



Obr. 2.11: Možnosť ${}_{[hs]}A_{[hs]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán p_{c_1} a p_{c_2} . Vpravo cesty po odstránení červených hrán p_{z_1} a p_{z_2} .

Lema 19. *Pri možnosti ${}_{[hs]}A_{[hs]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Uvedomme si, že v tomto prípade je aj prázdna postupnosť korektné doplnenie multipólov $Y_1 \dots Y_3$, ktoré vytvorí kružnicu dĺžky $n - 2$ v J_3 . Pozrime sa, čo vznikne po rozpustení na jednu a na druhú stranu. Pomôžeme si cestami p_{z_1} , p_{z_2} , p_{c_1} a p_{c_2} , kde položíme $k = 3$. Tým pádom $c_k \equiv c_3$, $d_4 \equiv d_1$, $a_k \equiv a_3$ a $a_4 \equiv a_1$ pre cesty p_{z_1} a p_{z_2} a $d_k \equiv d_3$, $c_4 \equiv c_1$, $a_k \equiv a_3$ a $a_4 \equiv a_1$ pre cesty p_{c_1} a p_{c_2} . Je ľahké nahliadnúť, že cesty p_{z_1} a p_{z_2} a obdobne aj p_{c_1} a p_{c_2} tvoria s hranou b_2d_2 subdivíziu grafu činka.

Prázdna postupnosť teda vedie k rozpustnej kružnici. V Leme 16 sme ukázali, že v minimálnom protipríkladne nemôže byť postupnosť vytvorená na základe sledu párnej

dĺžky z $[hs]$ do $[hs]$ v grafe z Lemy 12. Z toho vyplýva, že neexistuje postupnosť, ktorú by sme na $Y_1 \dots Y_3$ mohli korektne napojiť. \square

Overili sme tada kombináciu ${}_{[hs]}A_{[hs]}$. Pri možnosti A nám ešte ostávajú na overenie kombinácie ${}_{[hs]}A_{[hd]}$, ${}_{[ds]}A_{[hs]}$ a ${}_{[ds]}A_{[hd]}$. Pripomíname, že pre všetky, na základe Lemy 13 platí, že dvojica hrán vchádzajúca do Y_1 aj dvojica hrán vychádzajúca z Y_3 musia byť dvojfarebné. Pre každú kombináciu overíme, že s ňou nevieme vytvoriť protipríklad pre Tvrdenie 1.

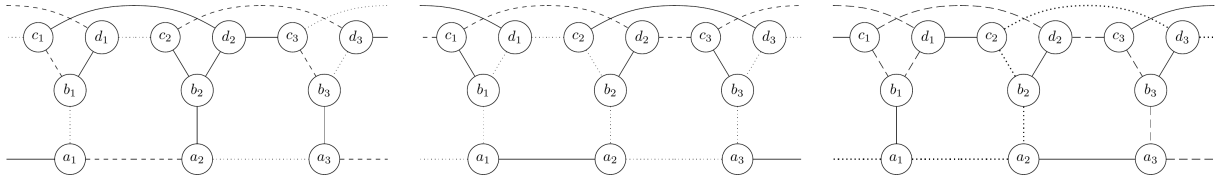
Lema 20. *Pri možnosti ${}_{[hs]}A_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. V tomto prípade už nie je možné len tak napojiť Y_3 na Y_1 . Budeme teda pomocou budovania sledov párnej dĺžky po grafe z Lemy 12 tvoriť čo najkratšie a netriviálne postupnosti, ktoré napojíme na $Y_1 \dots Y_3$. Začíname vo vrchole $[hd]$. Urobme najprv otočenie v sebe. Následne, aby sme sa vyhli triviálnej dvojici ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$, urobíme krok do $[hs]$. V tomto prípade máme sled dĺžky dva. Zapamätáme si ho a necháme jeho overenie na neskôr. Na základe Lemy 16 vieme, že z vrcholu $[hs]$ sa nedá vytvoriť uzavretý sledy párnej dĺžky, ktorý by nevedol k triviálnej postupnosti. Táto vetva je teda uzavretá.

Vráťme sa opäť na začiatok do $[hd]$ a vykročíme hneď do $[hs]$. Vrátiť sa po tej istej hrane nemôžeme. Pokračujeme teda do $[ds]$. Ak sa v $[ds]$ raz otočíme a vrátime sa do $[hs]$, máme ďalší párný sled na overenie. Z $[hs]$ už opäť ďalej nepokračujeme.

Na základe sledov teda máme dve postupnosti na overenie: ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$ a ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$, ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[hs]}$. Pozrime sa na prvú, pri ktorej sa nachádzame v J_5 . Pomocou obrázkov 2.10 a 2.12 ľahko nahliadneme, že kružnica sa, čo sa týka farieb a pozícií, napojí správne. Taktiež môžeme nahliadnuť, že po odstránení hrán červenej farby nám v doplnených Y vzniknú dve súvislé cesty, z ktorých sa každá napojí na jednu z ciest vzniknutých v $Y_1 \dots Y_3$ po odstránení červených hrán a vytvorí tak kružnice. Vznikne tak subdivízia grafu činky. Podobne sa stane po odstránení hrán zelenej farby, kde vzniknú dve súvislé cesty, tiež napojiteľné na cesty v $Y_1 \dots Y_3$ vzniknuté po odstránení zelených hrán. Napojenie opäť vytvorí kružnice. Rovnaké pozorovanie môžeme urobiť aj pri druhej postupnosti. Nachádzame sa teraz v J_7 . Pri odstránení hrán jednej aj druhej farby vzniknú napojiteľné cesty (pozri obrázky 2.10 a 2.12)¹. \square

¹Čitateľ sa môže začudovať, prečo ho odkazujeme na obrázok s triviálnou postupnosťou S . Na vysvetlenie by sme mu radi povedali, že kvôli šetreniu priestoru nebudeme prikladať obrázky každej overovanej postupnosti. Prezradíme mu však, že všetky overované postupnosti sú vlastne podpostupnosťami postupnosti S , alebo jej cyklických posunov z Lemy 15. Čitateľ si tak pri overovaní môže pomôcť týmto obrázkom, nakoľko je na ňom ukázaná jednak korektná napojiteľnosť kružnice a tiež tvorba kružníc subdivízie grafu činka po odstránení hrán jednej aj druhej farby.

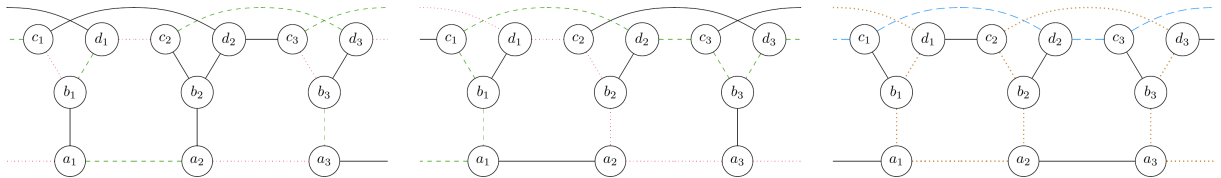


Obr. 2.12: Možnosť $_{[hs]}A_{[hd]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 21. *Pri možnosti $_{[ds]}A_{[hs]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Opäť robíme sledy párnej dĺžky po grafe z Lemy 12. Začíname v $[hs]$. Ak vykročíme do $[ds]$ a raz sa v ňom otočíme, máme rovno žiadaný sled párnej dĺžky. Jeho overenie necháme na neskôr. Na základe Lemy 18 vieme, že z vrcholu $[ds]$ nemá zmysel pokračovať. Druhá možnosť je na začiatku z $[hs]$ vykročiť do $[hd]$. Vrátiť sa nemôžeme, prejdeme teda po slučke a až potom sa vrátíme do $[hs]$. Pokračujeme do $[ds]$, kde tak dostaneme sled párnej dĺžky žiadaného tvaru. Predlžovanie ani tu nemá zmysel.

Na základe obrázkov 2.10 a 2.13 vieme odpozorovať, že napojenia postupností $_{[hs]}Y_{[ds]}$, $_{[ds]}Y_{[ds]}$ a $_{[hs]}Y_{[hd]}$, $_{[hd]}Y_{[hd]}$, $_{[hd]}Y_{[hs]}$, $_{[hs]}Y_{[ds]}$ sú korektné čo sa týka vytvorenia správne ofarbenej kružnice dĺžky $n - 2$ v grafoch J_5 a J_7 . Taktiež odstránenie hrán červenej, alebo zelenej farby vedie ku vzniku subdivízií grafu činka. \square

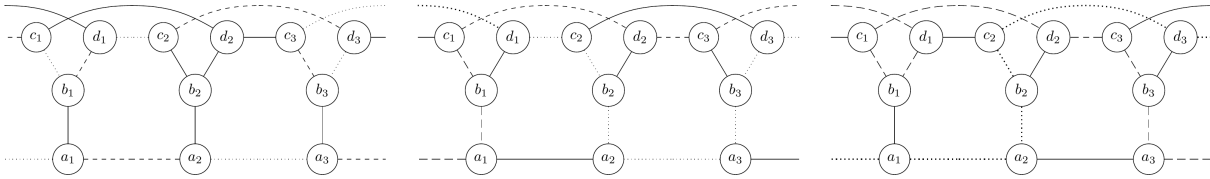


Obr. 2.13: Možnosť $_{[ds]}A_{[hs]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 22. *Pri možnosti $_{[ds]}A_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Opäť robíme sled po grafe z Lemy 12, tentokrát z vrcholu $[hd]$. Ak prejdeme do $[hs]$ a následne do $[ds]$, máme požadovaný párny sled. Ako sme ukázali v Leme 18, na vrchol $[ds]$ už nemá zmysel nadväzovať ďalšie sledy. Ak namiesto prvého vykročenia do $[hs]$ prejdeme po slučke v $[hd]$ a do $[hs]$ vykročíme až potom, môžeme párnou prechádzku zakončiť prechodom do ds a následným prejdením po slučke v $[ds]$. Rovnako ako pri predošlom slede nemá zmysel pokračovať. Nahliadnutím obrázkov 2.10 a 2.14

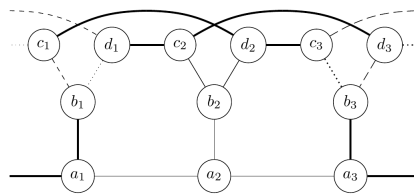
môžeme opäť vidieť, že napájané postupnosti korektné dotvárajú kružnicu dĺžky $n - 2$ a odstránenie hrán jednej aj druhej farby vedie ku vzniku subdivízií grafu činka. \square



Obr. 2.14: Možnosť ${}_{[ds]}A_{[hd]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Ukázali sme, že pri možnosti chýbajúcich vrcholov A vedú všetky netriviálne korektné doplnenia postupností multipólov Y k rozpustným kružniciam. Ďalej sa pozrieme na ostatné možnosti chýbajúcich susedných B, ..., E.

Pri možnosti B budeme postupovať podobne ako pri možnosti A. Keďže vieme, ktoré vrcholy chceme obchádzať, vieme určiť aj hrany, ktorými kružnica musí ísť, aby prešla všetkými ostatnými vrcholmi. Sú to: $a_k a_1$, $a_1 b_1$, $c_1 d_2$, $d_1 c_2$, $d_2 c_3$, $c_2 d_3$, $a_3 b_3$ a $a_3 a_4$. Ďalej na to, aby kružnica prešla všetkými ostatnými vrcholmi multipólu Y_1 , potrebujeme do kružnice pridať buď hrany $c_k d_1$ a $c_1 b_1$, alebo hrany $d_k c_1$ a $b_1 d_1$. Podobne aby kružnica prešla všetkými vrcholmi multipólu Y_3 , potrebujeme do nej pridať hrany $c_3 d_4$ a $d_3 b_3$, alebo hrany $d_3 c_4$ a $b_3 c_3$. Tentokrát do Y_1 vždy vchádza a z Y_3 vždy vychádza dolná hrana. Ak nerátame prípady, ktoré sú si navzájom symetrické, máme tri kombinácie vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán: ${}_{[ds]}B_{[ds]}$, ${}_{[ds]}B_{[hd]}$ a ${}_{[hd]}B_{[hd]}$. Ukážeme, že pri žiadnej kombinácii nie je možné nájsť protipríklad.

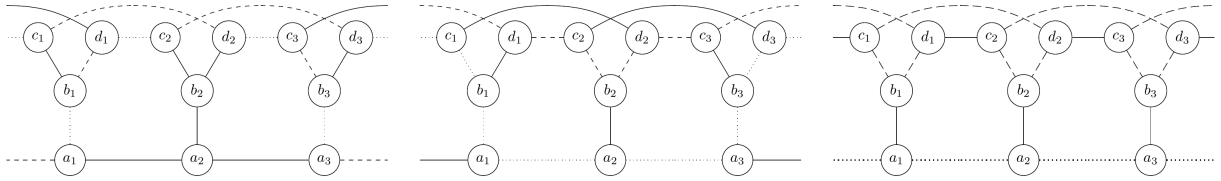


Obr. 2.15: Možnosť B: v kružnici chýbajú vrcholy a_2 a b_2 . Hrubou čiarou sú označené hrany, ktoré v kružnici musia byť na základe výberu chýbajúcich vrcholov. Čiarkami a bodkami sú označené dvojice hrán, z ktorých vždy jednu dvojicu treba vybrať do kružnice, aby boli všetky vrcholy Y_1 a Y_3 pokryté.

Lema 23. Pri možnosti ${}_{[ds]}B_{[ds]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.

Dôkaz. Na základe Lemy 18 vieme povedať, že v tomto prípade nemá zmysel budovať sledy. Ostáva nám však ukázať, že ak napojíme hrany vchádzajúce do Y_1 na hrany vychádzajúce z Y_3 , dostaneme vo vzniknutom J_3 korektnú kružnicu, po ktorej rozpustení

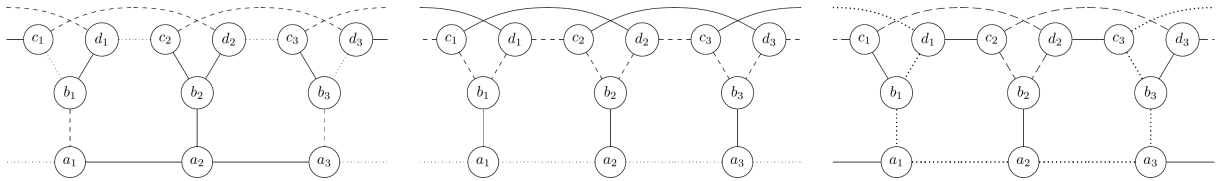
na obidve strany ostane graf činka. O korektnosti kružnice aj o správnom výsledku po rozpustení nás môže presvedčiť obrázok 2.16. \square



Obr. 2.16: Možnosť ${}_{[ds]}B_{[ds]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 24. *Pri možnosti ${}_{[hd]}B_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

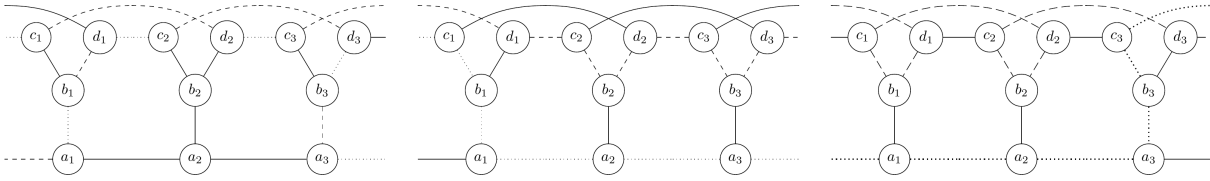
Dôkaz. Podobne ako v predošlej leme, no teraz na základe Lemy 17 vieme povedať, že nemá zmysel budovať sledy a ostáva nám ukázať, že napojenie hrán vchádzajúcich do Y_1 na hrany vychádzajúce z Y_3 , bude viesť vo vzniknutom J_3 ku korektnej kružnici, po ktorej rozpustení na obidve strany ostane graf činka. Na základe obrázka 2.17 ľahko vidíme, že bude. \square



Obr. 2.17: Možnosť ${}_{[hd]}B_{[hd]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

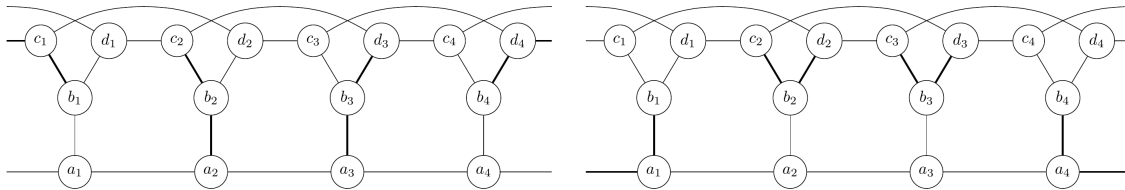
Lema 25. *Pri možnosti ${}_{[ds]}B_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Prípád s $[ds]$ a $[hd]$ sme mali aj pri možnosti A. Tu si však môžeme všimnúť, že po odobratí hrán jednej aj druhej farby nám vzniknú iné cesty z vrcholov stupňa dva. Potrebujeme teda aj pre túto kombináciu overiť, či naozaj všetky korektné doplnenia vedú k rozpustej kružnici. Možné korektné doplnenia budú rovnaké ako pri možnosti A: ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$, ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$ a ${}_{[hd]}Y_{[hd]}$, ${}_{[hd]}Y_{[hs]}$, ${}_{[hs]}Y_{[ds]}$, ${}_{[ds]}Y_{[ds]}$. Na základe obrázkov 2.10 a 2.18 môžeme nahliadnuť, že napojenie obidvoch postupností vytvorí korektnú kružnicu a taktiež odstránenie hrán jednej aj druhej farby vedie ku vzniku subdivízie grafu činka. \square

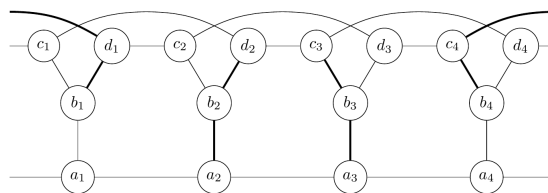


Obr. 2.18: Možnosť B s kombináciou $_{[ds]}B_{[hd]}$. Vľavo prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená). V strede cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Ukázali sme, že možnosť B vedie pri každej kombinácii vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán po korektnom doplnení Y k rozpustnej kružnici. Ďalšie možnosti na overenie sú spomínané C, D a E. V týchto sú chýbajúce vrcholy v dvoch susedných Y . Overovanie budeme tentokrát prevádzať na štvorici Y_1, \dots, Y_4 . Označíme hrany: $e_1 = c_2d_3$, $e_2 = d_2c_3$, $e_3 = a_2a_3$. Na obrázkoch 2.19 a 2.20 môžeme nahliadnuť kadiaľ jednotlivé možnosti posielajú kružnicu v rámci tejto štvorice. Ukážeme čo sa stane, ak by sme chceli do kružnice pri jednotlivých možnostiach pridať hrany e_1 , e_2 a e_3 .



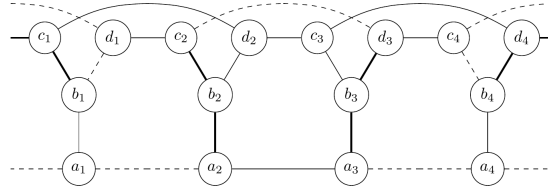
Obr. 2.19: Vľavo možnosť C: v kružnici chýbajú vrcholy d_2 a c_3 . Vpravo možnosť D: v kružnici chýbajú vrcholy a_2 a a_3 . Hrubou čiarou sú označené hrany, ktoré v kružnici musia byť na základe výberu chýbajúcich vrcholov.



Obr. 2.20: Možnosť E: v kružnici chýbajú vrcholy c_2 a d_3 . Hrubou čiarou sú označené hrany, ktoré v kružnici musia byť na základe výberu chýbajúcich vrcholov.

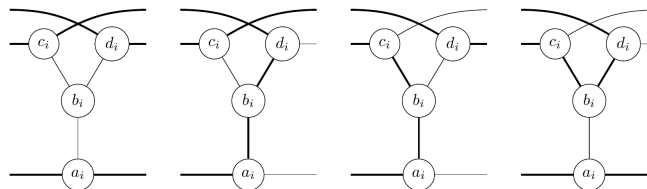
Nech e_1 leží v kružnici pri možnosti C. Potom, aby kružnica pokryla všetky vrcholy okrem vrcholov d_2 a c_3 , budú v kružnici ležať hrany c_kd_1 , b_1d_1 , $a_k a_1$, $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_4 a_5$, $c_4 d_5$ a $b_4 c_4$ (pozri obrázok 2.21). Nech však zvolíme ktorékoľvek striedavé ofarbenie kružnice, hrany $a_2 b_2$ a $a_3 b_3$ budú mať rovnakú farbu. Tým pádom po odobratí hrán tej druhej farby ostane cesta $d_2 b_2 a_2 a_3 b_3 c_3$, z čoho po vyhladení vrcholov stupňa dva ostane hrana $d_2 c_3$. Po rozpustení na túto stranu by sme teda dostali zafarbiteľnú trojhranu. Hranu e_2 do kružnice pridať nemôžeme. Nech teda v kružnici leží hrana e_3 . Aby sme

pokryli všetky vrcholy, musia v nej ležať aj hrany $c_k d_1$, $d_1 c_2$, $a_k a_1$, $a_1 b_1$, $a_4 b_4$, $a_4 a_5$, $d_3 c_4$ a $c_4 d_5$. Tu sa dostávame do podobnej situácie, no tentokrát hrany $b_2 c_2$ a $b_3 d_3$ budú mať rovnakú farbu. Po odobratí hrán druhej farby ostane cesta z vrcholov stupňa dva $d_2 b_2 c_2 d_3 b_3 c_3$, po ktorých vyhladení ostane hrana $d_2 c_3$, čo vedie k zafarbiteľnej trojhrane.



Obr. 2.21: Možnosť C a e_1 leží v kružnici. Čiarkované hrany sú hrany ležiace v kružnici na základe výberu možnosti C a pridaní hrany e_1

Podobné prípady dostaneme aj pri možnostiach D a E. Pridanie jednej z hrán e_1 , e_2 a e_3 spôsobí, že po rozpustení na jednu stranu zaručene ostane zafarbiteľná trojhrana. Všimnime si však, že vo všetkých týchto prípadoch do Y_1 vchádzajú a z Y_4 vychádzajú vždy tri hrany patriace kružnici. Pozrime sa aké možnosti prechodu kružnice multipólom Y máme, ak na jednej strane v nej ležia všetky tri hrany. Vyššie sme spomenuli, že ak na jednej strane Y v kružnici ležia tri hrany, tak na druhej strane v nej nemôžu ležať dve. Ľahko nahliadneme, že taktiež na druhej strane v nej nemôžu ležať tri. Vynechali by sme tak vrchol b (pozri obrázok 2.22). Jediným spôsobom prechodu kružnice teda je, že na druhej strane bude v kružnici ležať iba jedna hrana. Takéto spôsoby sú naozaj možné a vieme tak pokryť všetky vrcholy Y (pozri obrázok 2.22). Avšak na to, aby sme sa od troch vchádzajúcich hrán dostali k trom vychádzajúcim hranám potrebujeme postupnosť Y párnej dĺžky, kde sa vstupné tri hrany nepárneho Y prepnú vždy na jednu výstupnú a v párnom Y sa prepnú opäť naopak. Uvedomme si však, že k štvorici $Y_1 \dots Y_4$ prikladáme nepárny počet multipólov Y . K trojici hrán vychádzajúcej z Y_4 teda nevieme napojiť postupnosť Y takú, aby trojica hrán opäť vchádzala do Y_1 . Hrany e_1 , e_2 a e_3 teda nemôžu ležať v kružnici pri žiadnej z možností C, D, E.



Obr. 2.22: Prechody kružnice cez Y , ak do Y vchádzajú tri hrany. Vľavo: tri vchádzajú aj vychádzajú. Zvyšné: tri vchádzajú a jedna vychádza.

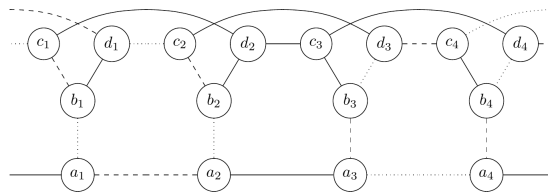
Z posledného vyplýva, že v kružnici musia pri možnosti C ležať hrany $d_1 c_2$, $a_1 a_2$, $d_3 c_4$ a $a_3 a_4$. Aj tu treba upozorniť, že existuje zafarbenie, ktoré by po rozpustení kružnice

viedlo k vytvoreniu zafarbiteľnej trojhrany. Je to zafarbenie, kde by hrany a_2b_2 a a_3b_3 mali rovnakú farbu. Jedna z hrán trojhrany by vznikla vyhladením cesty $d_2b_2a_2a_3b_3c_3$. Budeme zatiaľ rátať s ofarbením, kde hrany a_2b_2 a a_3b_3 budú mať rozdielne farby. Neskôr budeme argumentovať, prečo s prvým spomenutým ofarbením vôbec nemusíme rátať.

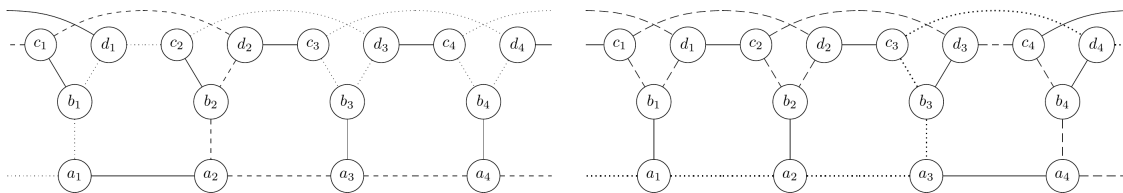
Ak chceme ešte pokryť zvyšné vrcholy štvorice $Y_1\dots Y_4$ pri možnosti C, do Y_1 potrebuje vchádzať a z Y_4 potrebuje vychádzať kombinácia hrán $[hs]$, alebo $[ds]$. Následne nám opäť ostáva overiť, či všetky korektné doplnenia multipólov Y vedú po rozpustení na obidve strany ku vzniku grafu činka a teda ani pri tejto možnosti nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad. Overenie urobíme pomocou nasledovných troch lemm. Opäť pripomíname, že tentokrát budeme dopĺňať postupnosti nepárnej dĺžky.

Lema 26. *Pri možnosti ${}_{[hs]}C_{[hs]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Opäť tvoríme prechádzku po grafe z Lemy 12. Môžeme nahliadnuť, že z vrcholu hs sa naspäť do vrcholu hs môžeme na najmenší nepárny počet krokov dostať dvoma spôsobmi a to sledom $[hs][ds][ds][hs]$, alebo $[hs][hd][hd][hs]$. Tieto prechádzky nemá zmysel predlžovať, pretože, ako sme si v Leme 16 ukázali, sledy párnej dĺžky z $[hs]$ do $[hs]$ vedú k triviálnym postupnostiam. Pomocou obrázkov 2.24 a 2.10, môžeme vidieť, že napojenie multipólov Y korešpondujúcich s vyššie uvedenými prechádzkami je korektné, čo sa týka tvorby kružnice dĺžky $n - 2$. Taktiež môžeme nahliadnuť, že odstránenie hrán jednej aj druhej farby vedie ku vzniku subdivízie grafu činka. \square



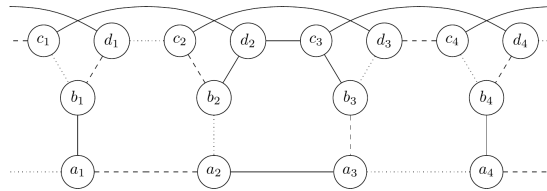
Obr. 2.23: Možnosť ${}_{[hs]}C_{[hs]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).



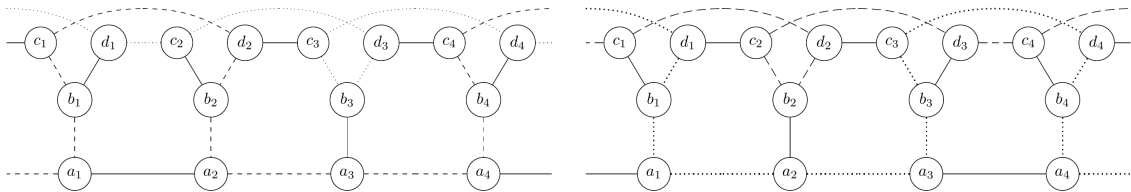
Obr. 2.24: Možnosť ${}_{[hs]}C_{[hs]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 27. *Pri možnosti ${}_{[ds]}C_{[ds]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Tvoríme sled po grafe z Lemy 12. Najkratší sled nepárnej dĺžky vytvoríme otočením sa v počiatočnom vrchole $[ds]$. Ďalšia možnosť by bola po otočení sa pokračovať, no ak si uvedomíme, že z tohto bodu vlastne chceme dostať uzavretý párný sled, tak sme opäť odvoláme na Lemu 18, kde sme ukázali, že takýto sled nemá zmysel tvoriť. Poslednou možnosťou je hneď v prvom kroku vykročiť do vrcholu $[hs]$ a následne vyhýbaním sa triviálnym dvojiciam dostať celkový sled $[ds][hs][hd][hd][hs][ds]$. Na základe obrázkov 2.26 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že obidva sledy vedú ku korektnému doplneniu kružnice a zároveň po odstránení hrán jednej aj druhej farby vedú ku vzniku subdivízie grafu činka. \square



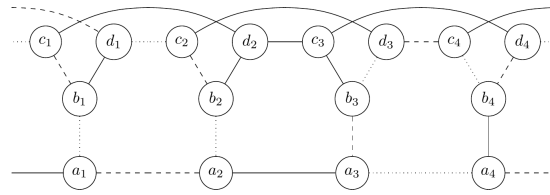
Obr. 2.25: Možnosť ${}_{[ds]}C_{[ds]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.



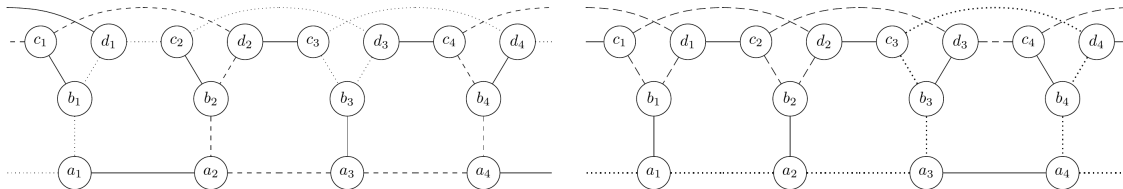
Obr. 2.26: Možnosť ${}_{[ds]}C_{[ds]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).

Lema 28. *Pri možnosti ${}_{[hs]}C_{[ds]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Opäť tvoríme sled po grafe z Lemy 12. Aj tu vieme urobiť sled dĺžky jeden z vrcholu $[ds]$ do $[hs]$. Ako sme ukázali v Leme 16, z vrcholu $[hs]$ do vrcholu $[hs]$ vieme urobiť iba taký sled párnnej dĺžky, ktorý vedie k triviálnym postupnostiam. Po tomto jednom kroku teda nemá zmysel pokračovať. Druhou možnosťou je začať prechádzku otočením sa vo vrchole $[ds]$ a následne vyhýbaním sa triviálnym dvojiciam dotvoriť celkovú postupnosť $[ds][ds][hs][hd][hd][hs]$. Môžeme nahliadnuť, že iné možnosti sledov nepárnej dĺžky nie sú a pomocou obrázkov 2.28 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že spomenuté dva sledy vedú ku korektnému doplneniu kružnice aj ku vznikom subdivízií grafu činka. \square



Obr. 2.27: Možnosť ${}_{[hs]}C_{[ds]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

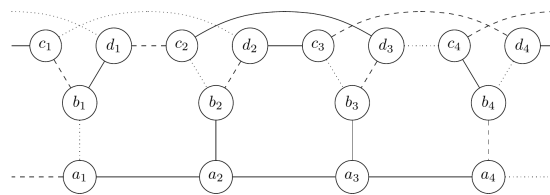


Obr. 2.28: Možnosť ${}_{[hs]}C_{[ds]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).

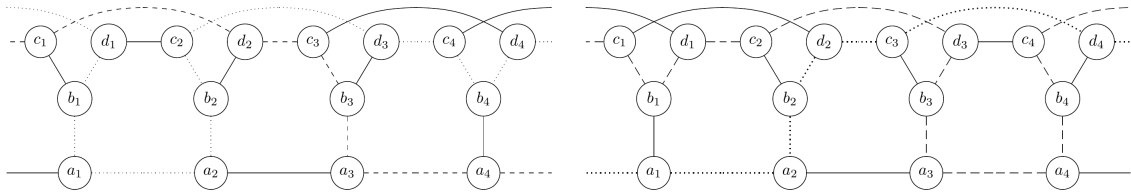
Podobne ako pri možnosti C budeme postupovať aj pri možnosti D. Keďže sme z kružnice vylúčili hrany e_1, e_2 a e_3 , musia v nej ležať hrany c_1d_2, d_1c_2, c_3d_4 a d_3c_4 . Takisto budeme rátať s ofarbením, kde tentokrát hrany b_2d_2 a b_3c_3 nebudú rovnakej farby. Ak chceme pokryť všetky vrcholy štvorice $Y_1 \dots Y_4$, do Y_1 potrebuje vchádzať a z Y_4 potrebuje vychádzať kombinácia vrcholov $[hd]$, alebo $[ds]$. Overíme, či všetky korektné doplnenia multipólov Y vedú po rozpustení na obidve strany ku vzniku grafu činka.

Lema 29. *Pri možnosti ${}_{[hd]}D_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Opäť tvoríme sled po grafe z Lemy 12. Môžeme nahliadnuť, že na základe symetrickosti grafu z Lemy 12 budeme mať typovo rovnaké sledy ako pri kombinácii ${}_{[ds]}C_{[ds]}$. Budú to sledy $[hd][hd]$ a $[hd][hs][ds][ds][hs][hd]$. Na základe obrázkov 2.30 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že obidva sledy vedú ku korektnému doplneniu kružnice a zároveň po odstránení hrán jednej aj druhej farby vedú ku vzniku subdivízie grafu činka. □



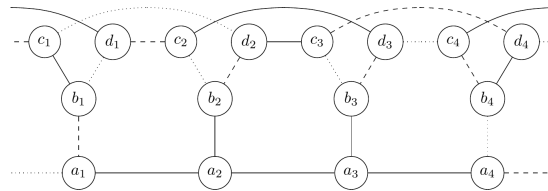
Obr. 2.29: Možnosť ${}_{[hd]}D_{[hd]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).



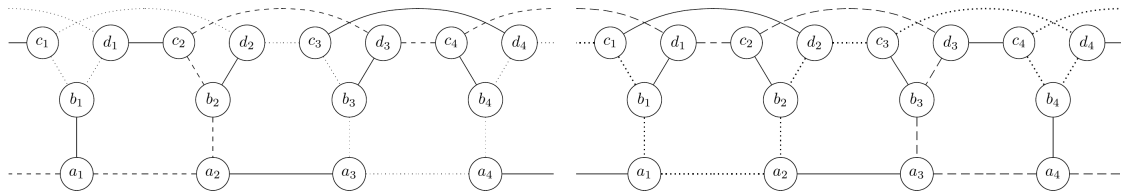
Obr. 2.30: Možnosť ${}_{[hd]}D_{[hd]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 30. *Pri možnosti ${}_{[ds]}D_{[ds]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Môžeme nahliadnuť, že tu máme rovnaké podmienky ako pri možnosti ${}_{[ds]}C_{[ds]}$. Na základe dôkazu Lemy 27 vieme povedať, že všetky korektné doplnenia vedú po odstránení hrán jednej aj druhej farby k vytvoreniu subdivízie grafu činka. \square



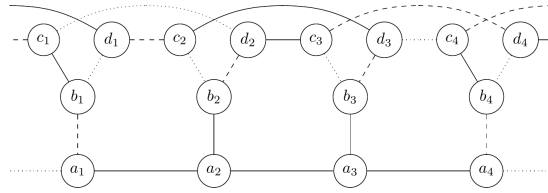
Obr. 2.31: Možnosť ${}_{[ds]}D_{[ds]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).



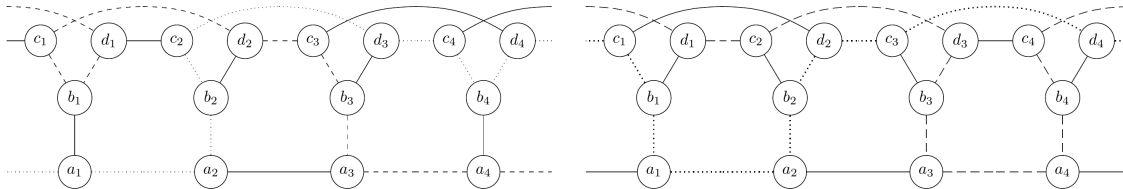
Obr. 2.32: Možnosť ${}_{[ds]}D_{[ds]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Lema 31. *Pri možnosti ${}_{[ds]}D_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Tvoríme sled po grafe z Lemy 12. Jedna možnosť je otočiť sa vo vrchole hd a následne prejsť do $[hs]$ a potom do $[ds]$. Druhá možnosť je hneď v prvom kroku prejsť do $[hs]$, potom do $[ds]$ a nakoniec sa v $[ds]$ otočiť. Obidve možnosti vytvoria sledy dĺžky tri. Kratšie sledy sa urobiť nedajú a keď si uvedomíme, že každé napojenie na tieto sledy by museli byť sledy párnej dĺžky z vrcholu $[ds]$ alebo $[hd]$, vieme na základe Lemy 18 a Lemy 17 povedať, že by to viedlo k triviálnym postupnostiam. Ostáva nám skontrolovať korektnosť napojenia postupností Y vytvorených na základe týchto sledov. Tú môžeme nahliadnuť pomocou obrázkov 2.34 a 2.10. \square



Obr. 2.33: Možnosť ${}_{[ds]}D_{[hd]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).

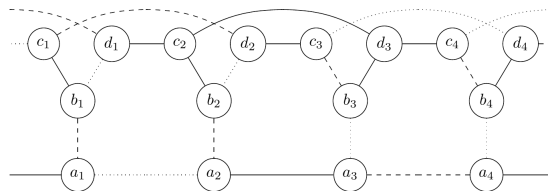


Obr. 2.34: Možnosť ${}_{[ds]}D_{[hd]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Poslednou možnosťou je možnosť E. Aj tu na základe vylúčenia hrán e_1, e_2 a e_3 musia v kružnici ležať hrany c_1d_2, a_1a_2, c_3d_4 a a_3a_4 . Aj tu budeme rátať s konkrétnym ofarbením, opäť takým ako pri možnosti C, kde hrany a_2b_2 a a_3b_3 budú mať rozličné farby. Ak chceme ďalej pokryť všetky vrcholy štvorice $Y_1\dots Y_4$, do Y_1 potrebuje vchádzať a z Y_4 potrebuje vychádzať kombinácia vrcholov hd , alebo hs . Pre tieto kombinácie overíme, či všetky korektné neodstrániteľné doplnenia multipólov Y vedú po rozpustení na obidve strany ku vzniku grafu činka.

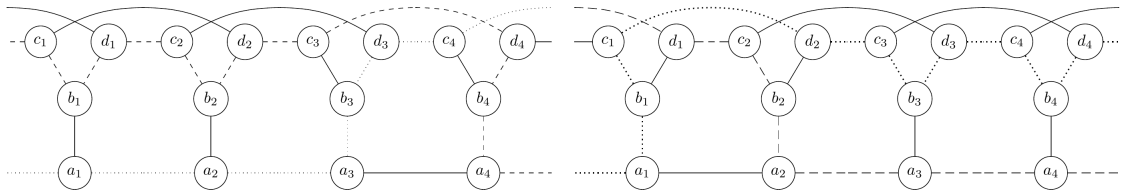
Lema 32. *Pri možnosti ${}_{[hs]}E_{[hs]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Môžeme nahliadnuť, že v tomto prípade sme na tom rovnako ako pri možnosti ${}_{[hs]}C_{[hs]}$. Pomocou obrázkov 2.36 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že doplnenia sledov z dôkazu Lemy 26 sú korektné a vedú k rozpustnej kružnici a po odstránení hrán jednej a j druhej farby ku vznikom subdivízií grafu činka. \square



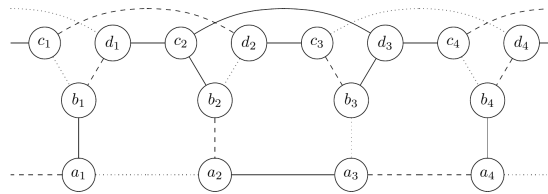
Obr. 2.35: Možnosť ${}_{[hs]}E_{[hs]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).

Lema 33. *Pri možnosti ${}_{[hd]}E_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

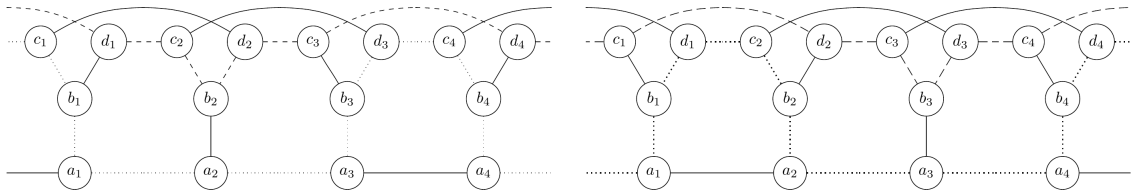


Obr. 2.36: Možnosť ${}_{[hs]}E_{[hs]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán.

Dôkaz. Môžeme nahliadnuť, že tento prípad vytvára rovnakú situáciu ako pri možnosti ${}_{[hd]}D_{[hd]}$. Pomocou obrázkov 2.38 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že doplnenia sledov s dôkazu Lemy 29 sú korektné a vedú k rozpustnej kružnici a po odstránení hrán jednej aj druhej farby ku vznikom subdivízií grafu činka. \square



Obr. 2.37: Možnosť ${}_{[hd]}E_{[hd]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).

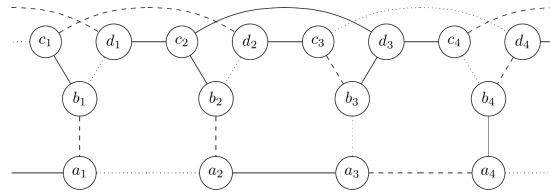


Obr. 2.38: Možnosť ${}_{[hd]}E_{[hd]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán

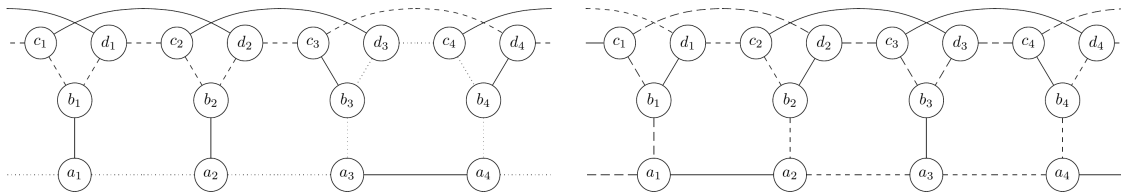
Lema 34. *Pri možnosti ${}_{[hs]}E_{[hd]}$ nie je možné skonštruovať minimálny protipríklad pre Tvrdenie 1.*

Dôkaz. Môžeme nahliadnuť, že tento prípad je, čo sa týka sledov po grafe z Lemy 12, zrkadlovou situáciou k možnosti ${}_{[hs]}C_{[ds]}$. Sú teda možné dva sledy: jeden krok do vrcholu $[hs]$ a sled $[hd][hd][hs][ds][ds][hs]$. Pomocou obrázkov 2.40 a 2.10 môžeme nahliadnuť, že doplnenia postupností sú korektné a po odstránení hrán jednej aj druhej farby vedú ku vznikom subdivízií grafu činka. \square

Ukázali sme, že pri možnostiach C, D, E pri správnom ofarbení hrán vedú korektné doplnenia postupností Y po odstránení hrán jednej aj druhej farby k subdivíziám grafu činka. Vrátime sa teraz k sľúbenej argumentácii, prečo s iným ofarbením nemusíme



Obr. 2.39: Možnosť ${}_{[hs]}E_{[hd]}$. Prechod striedavo ofarbenej kružnice (čiarky = zelená, bodky = červená).



Obr. 2.40: Možnosť ${}_{[hs]}E_{[hd]}$. Vľavo cesty po odstránení zelených hrán. Vpravo cesty po odstránení červených hrán

rátať. Uvedomme si, že všetky korektné doplnenia sedeli s nami zvoleným ofarbením. Keď si spomenieme, ako funguje prepínanie farieb v rámci jedného Y , tak na základe toho, že vždy budeme dopĺňať nepárny počet Y , vieme povedať, že korektné doplnenie postupnosti Y pre iné ofarbenie nie je možné.

Na základe overených prípadov v Lemách 19 až 34 môžeme povedať, že Tvrdenie 1 platí a teda všetky kružnice dĺžky $n - 2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.

Kapitola 3

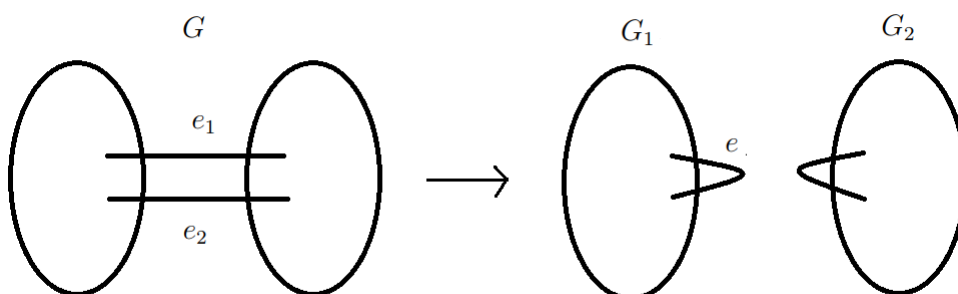
Hypotéza o rozpustnej kružnici

Na základe výstupov z programu, ktorý overuje existenciu rozpustnej kružnice v grafe zo vstupu, sme vyslovili nasledovnú hypotézu.

Hypotéza 2. *Každý snark obsahuje rozpustnú kružnicu.*

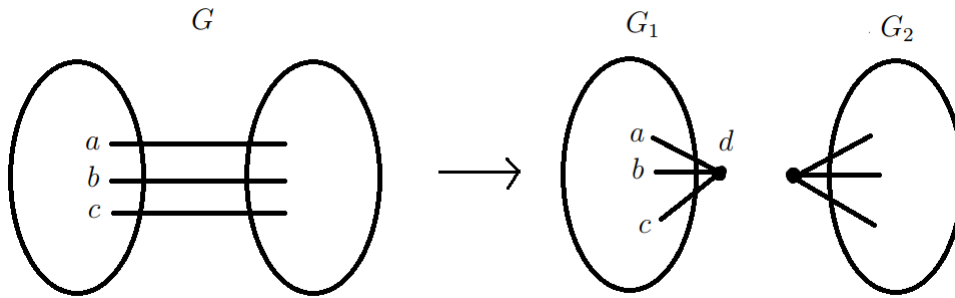
V tejto kapitole ukážeme, že najmenší protipríklad pre Hypotézu 2 neobsahuje cykly separujúci 2-rez ani 3-rez ani 4-cyklus. Nasledujúca séria viet a liem patrí k folklóru v oblasti hranových farbení kubických grafov. Budeme sa o ňu opierať v našom ďalšom výskume.

Lema 35. *Nech G je kubický graf s hranovým rezom veľkosti dva. Rez rozdeľuje graf G na dva dipóly. Nech G_1 je graf, ktorý vznikne spojením dvoch polhrán vychádzajúcich z jedného dipólu a obdobne G_2 spojením polhrán vychádzajúcich z druhého dipólu. Platí, že G je snark práve vtedy, ak G_1 alebo G_2 je snark.*



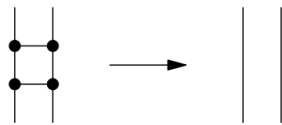
Obr. 3.1: Rozloženie grafu G s 2-rezom na grafy G_1 a G_2

Lema 36. *Nech G je kubický graf s hranovým rezom veľkosti tri. Rez rozdeľuje graf G na dva 3-póly. Nech G_1 je graf, ktorý vznikne spojením troch polhrán vychádzajúcich z jedného 3-pólu v jednom novom vrchole a obdobne G_2 spojením polhrán vychádzajúcich z druhého 3-pólu v druhom novom vrchole. Platí, že G je snark práve vtedy, ak G_1 alebo G_2 je snark.*

Obr. 3.2: Rozloženie grafu G s 3-rezom na grafy G_1 a G_2

Poznámka 37. Uvedomme si, že ak má graf G viacero 2-rezov (resp. 3-rezov), na základe Paritnej lemy môžeme zobrať taký, po ktorého odstránení bude jeho nezafarbitelná časť, nech je to G_1 , čo najväčšia a jeho druhá časť bude bez 2-rezu (resp. 3-rezu). V nasledujúcom výskume budeme predpokladať, že pracujeme s takýmto 2-rezom (resp. 3-rezom).

Lema 38. Nech G je kubický graf obsahujúci cyklus C dĺžky 4. Nech G_1 je graf, ktorý vznikne z G odobratím dvoch nesusedných hrán cyklu C a následným vyhladením vrcholov stupňa dva a G_2 analogicky odobratím druhých dvoch nesusedných hrán. Platí, že ak G je snark, tak aj G_1 a G_2 sú snarkami.



Obr. 3.3: Vyhladenie štvorca

Lema 39. Nech G je kubický graf a S je ľubovoľný hranový rez v G . Nech G_1 a G_2 sú komponenty, na ktoré rez S delí graf G . Platí, že parita rezu S a parity počtov vrcholov komponentov G_1 a G_2 sú zhodné.

Veta 40. Globálna verzia Mengerovej vety: Graf G je k -súvislý práve vtedy, keď G obsahuje k vnútorne disjunktných ciest medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi. [3](3.3.5)

Nasledujúce odseky tvoria naše pozorovania. Skúmali sme, čo vieme povedať o potenciálnom najmenšom protipríklade vyvracajúcom vyslovenú hypotézu. Zistili sme, že isto nemôže obsahovať 2-rezy ani 3-rezy a veľkosť jeho obvodu musí byť aspoň päť.

3.1 Malé rezy

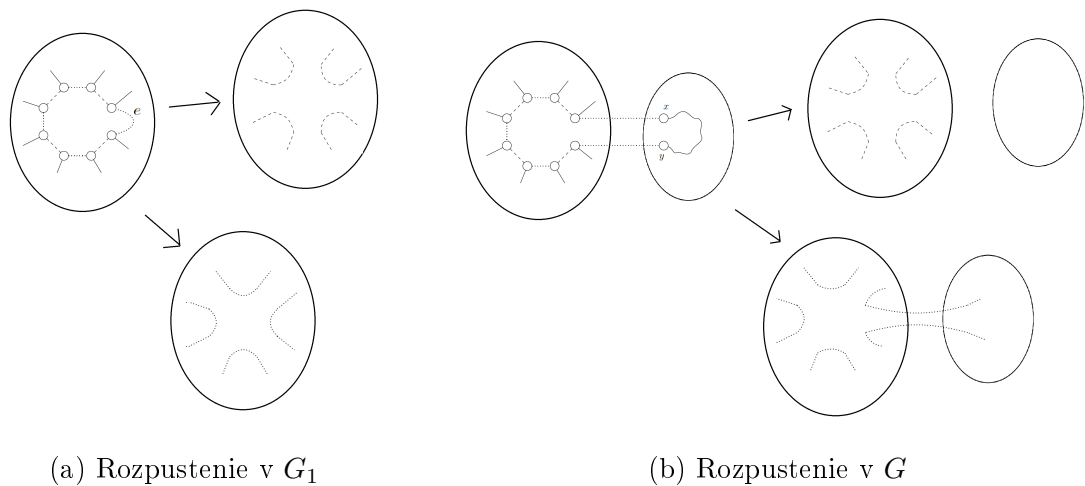
Lema 41. Najmenší protipríklad pre hypotézu neobsahuje 2-rezy.

Dôkaz. Budeme postupovať sporom. Nech najmenší protipríklad, nazveme ho G , obsahuje 2-rez $\{e_1, e_2\}$. Z G vieme na základe Lemy 35 odvodiť dva menšie grafy G_1 a G_2 , z ktorých aspoň jeden je snarkom. Nech je to G_1 . Na základe Poznámky 37 môžeme predpokladať, že G_1 je najväčší možný a G_2 je bez 2-rezu. Nech e je hrana v G_1 , ktorá vznikla spojením dvoch polhrán daného dipólu. Keďže G_1 je menší ako G , musí obsahovať rozpustnú kružnicu. Nazveme ju C . Môžu nastať dva prípady:

(i) $e \in C$.

(ii) $e \notin C$.

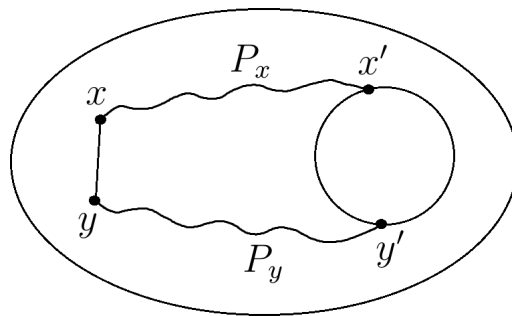
(i): Ukážeme, že ak e je súčasťou rozpustnej kružnice C v G_1 , tak aj pôvodný graf G obsahuje rozpustnú kružnicu. Za základ tejto kružnice si zoberieme kružnicu C a hranu e nahradíme pôvodnými hranami 2-rezu. To čo vzniklo zatiaľ nie je kružnica. Pozrime sa však, čo sa stane, keď v G túto časť kružnice rozpustíme. Ofarbíme hrany striedavo na červeno a zeleno. Keď ponecháme hrany, ktoré sú disjunktné s 2-rezom, nech sú zelené, graf sa nám rozbitie na dva komponenty. Jeden z týchto komponentov bude totožný s grafom G_1 po rozpustení tých istých hrán kružnice C . Tento komponent teda bude nezafarbiteľný a teda nezafarbiteľný po rozpustení na túto stranu bude aj celý graf G . Po rozpustení červených hrán v grafe G ostane 2-rez. Na základe Paritnej lemy vieme povedať, že obidve hrany 2-rezu musia mať rovnakú farbu. To je však rovnaká situácia, ako keď po rozpustení červených hrán v grafe G_1 ostala na tom istom mieste jedna hrana. Graf G je tým pádom aj po rozpustení červených hrán nezafarbiteľný.



Obr. 3.4: 2-rezy: e súčasťou rozpustnej kružnice

Keďže sme zatiaľ pracovali iba s neúplnou kružnicou, ostáva nám ešte ukázať, že túto kružnicu vieme dotvoriť. Nech x a y sú vrcholy grafu G_2 , ktoré boli pôvodne koncovými vrcholmi rezových hrán e_1 a e_2 v grafe G . Postačí ukázať, že medzi x a y existuje v G_2 , okrem hrany, ktorá ich spája, ešte jedna cesta nepárnej dĺžky. Vieme,

že graf G_2 je 2-súvislý a teda podľa Mengerovej vety existujú medzi jeho ľubovoľnými dvoma vrcholmi aspoň dve disjunktné cesty. Ak je G_2 bipartitný, x a y musia byť v rôznych partíciách, pretože sú v G_2 spojené hranou. Okrem tejto hrany musí medzi nimi v G_2 existovať ešte aspoň jedna cesta nepárnej dĺžky. Ak G_2 nie je bipartitný, obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky C' . Nech $x', y' \in C'$ a zároveň $x' \neq y'$. Nech P_x je najkratšia cesta z x do x' a P_y cesta z y do y' disjunktná s P_x . Medzi x' a y' existuje v rámci kružnice C' jedna cesta párnej a jedna nepárnej dĺžky. Podľa parity súčtu dĺžok ciest P_x a P_y si zvolíme, či k týmto cestám pripojíme párnú, alebo nepárnú cestu medzi x' a y' . Výsledok bude nepárna cesta medzi x a y v grafe G_2 (pozri obrázok 3.5), ktorou doplníme spomínanú rozpustnú časť kružnice v G .



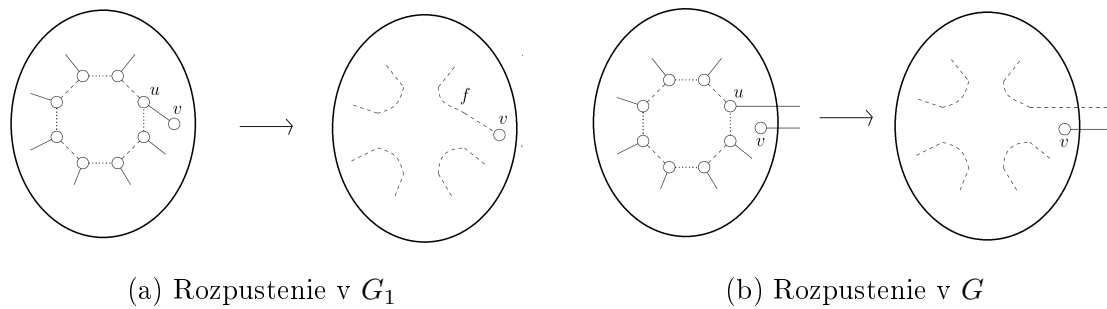
Obr. 3.5: Nepárna cesta medzi x a y ako doplnenie kružnice v G .

(ii): Nech u a v sú vrcholy grafu G_1 , ktoré boli pôvodne koncovými vrcholmi hrán e_1 a e_2 . Ak $u \notin C$ a zároveň $v \notin C$, môžeme nahliadnuť, že po rozpustení kružnice C v grafe G_1 ostane hrana e . Táto hrana je v grafe G reprezentovaná 2-rezom $\{e_1, e_2\}$. Tieto však na základe Paritnej lemy musia byť rovnakej farby. Tým pádom je graf G po rozpustení kružnice C na obidve strany taktiež nezafarbiteľný. V druhom prípade, ak $u \in C$ alebo $v \in C$ a zároveň $e \notin C$, bude jeden z vrcholov u, v , alebo aj obidva po rozpustení kružnice na niektorú stranu vyhladený a ostane po ňom hrana f . Ak zoberieme tú istú kružnicu v G a rozpustíme ju na tú istú stranu, komponent na tej strane rezu, v ktorom sa kružnica nachádzala, bude vyzeráť rovnako, ako graf G_1 po rozpustení s tým rozdielom, že namiesto hrany f bude 2-rez. Je ľahké nahliadnuť, že vďaka Paritnej leme ostane aj graf G po rozpustení na danú stranu nezafarbiteľný (pozri obrázok 3.6). Pri rozpustení na druhú stranu vieme použiť analogickú argumentáciu.

□

Lema 42. *Najmenší protipríklad pre hypotézu neobsahuje 3-rezy.*

Dôkaz. Budeme postupovať sporom. Nech najmenší protipríklad, nazveme ho G , obsahuje 3-rez. Z G vieme na základe Lemy 36 odvodiť dva menšie grafy G_1 a G_2 , z ktorých aspoň jeden je snarkom. Nech je to G_1 . Nový vrchol v ktorom sa spojili polhrany daného 3-pólu nazveme d a vrcholy susediace s vrcholom d nazveme a, b a c . Keďže G_1

Obr. 3.6: 2-rezy: e susedí s kružnicou

je menší ako G , musí obsahovať rozpustnú kružnicu. Nazveme ju C . Môžu nastať dva prípady:

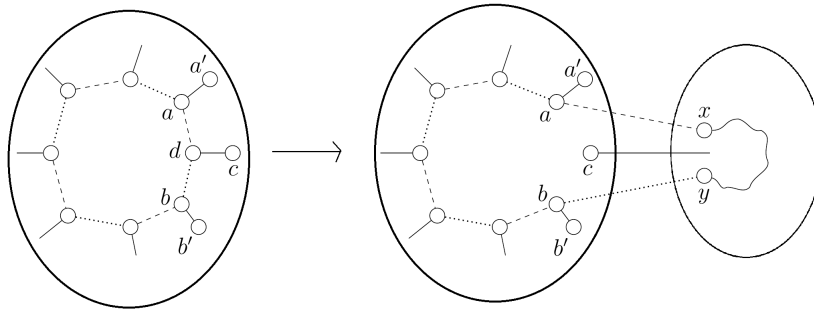
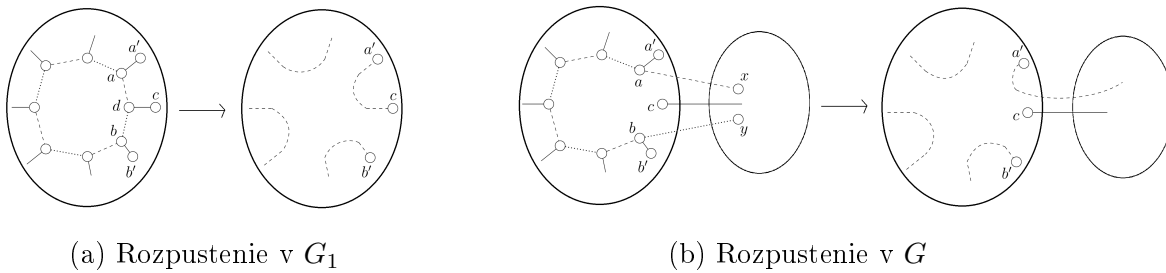
(i) $d \in C$.

(ii) $d \notin C$.

(i): Ak je d súčasťou kružnice C , musia byť jej súčasťou aj dva z vrcholov a, b, c . Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to a a b . Nech $a', b' \notin C$ sú vrcholy susediace s a, b . Ofarbíme kružnicu C striedavo červenou a zelenou tak, že hrana ad bude zelená a hrana bd červená. Po odobratí červených hrán a vyhladení vrcholov so stupňom dva nám ostane odvodený graf s hranou $a'c$. Po rozpustení kružnice na druhú stranu nám v odvodenom grafe ostane hrana $b'c$.

Pozrime sa teraz na graf G . Komponent na jednej strane rezu, z ktorého po spojení troch polhrán vo vrchole d vznikne graf G_1 nazveme ľavým a druhý komponent pravým. Nech x, y a z sú vrcholy z pravého komponentu susediace s vrcholmi a, b a c . V grafe G chceme nájsť rozpustnú kružnicu. Za jej základ zoberieme hrany kružnice C z ľavého komponentu a namiesto hrán ad a bd položíme hrany rezu ax a by . Túto časť kružnice rovnako striedavo farbíme zelenou a červenou. Následne po odobratí červených hrán a rozpustení vrcholov stupňa dva bude ľavý komponent grafu G vyzeráť rovnako ako G_1 po rozpustení kružnice C na rovnakú stranu s jedným rozdielom, že namiesto hrany $a'c$ bude z komponentu vychádzať 2-rez $\{a'x, cz\}$. Na základe Paritnej lemy vieme povedať, že tento 2-rez musí byť ofarbený jednou farbou a tým pádom ľavý komponent po rozpustení na túto stranu bude nezafarbiteľný. Analogický postup vieme použiť pri rozpustení na druhú stranu, kde namiesto hrany $b'c$ dostaneme 2-rez $\{b'y, cz\}$. Ľavý komponent grafu G bude teda po rozpustení tohto základu kružnice na obidve strany nezafarbiteľný.

Ostáva ukázať, že vieme nájsť doplnenie kružnice v pravom komponente grafu G , čo je ekvivalentné s nájdením cesty párnej dĺžky medzi x a y v grafe G_2 . Nech d' je vrchol, v ktorom sa spoja tri polhrany pri odvodení z G . Na základe lemy 39 vieme povedať, že s vrcholom d' má G_2 párny počet vrcholov. Môžu nastať dve možnosti:

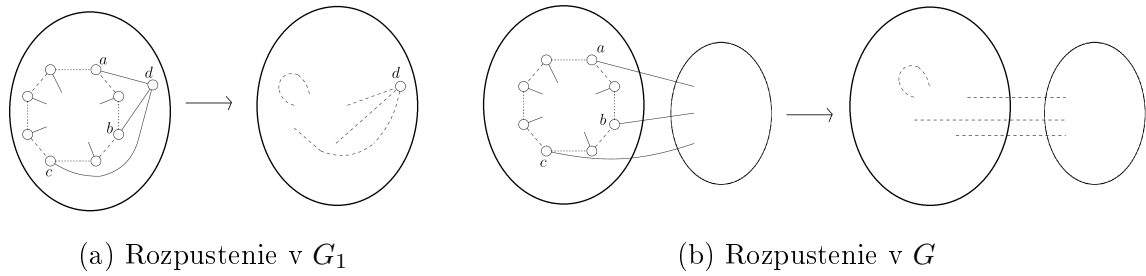
Obr. 3.7: 3-rez: d súčasťou kružnice(a) Rozpustenie v G_1 (b) Rozpustenie v G Obr. 3.8: 3-rez: d súčasťou kružnice

- a) G_2 je bipartitný a x a y sú v rovnakej partícii. Keďže G_2 je dvojsúvislý, na základe Mengerovej vety existuje medzi x a y ešte jedna cesta okrem cesty $xd'y$. Táto cesta musí byť kvôli bipartitnosti grafu párna.
- b) G_2 nie je bipartitný a teda obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Odtiaľto vieme pomocou Mengerovej vety argumentovať obdobne ako v dôkaze predošlej lemy, kde sme pomocou nepárnej kružnice hľadali cestu nepárnej dĺžky.

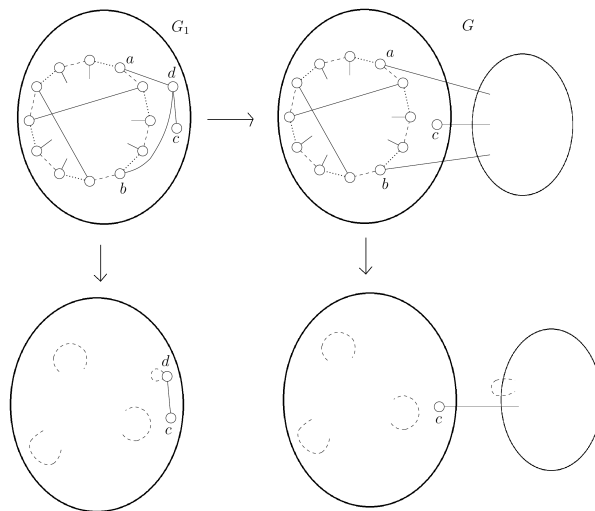
V oboch prípadoch vieme kružnicu doplniť. Tým pádom sme našli rozpustnú kružnicu v grafe G , čo je spor.

(ii): Ak d neleží na rozpustnej kružnici C , môžu nastať dva prípady:

- a) Po rozpustení kružnice C v grafe G_1 budú do vrchola d vchádzať tri rôzne hrany. Tento prípad nastane, ak na kružnici C neleží žiaden, alebo leží práve jeden z vrcholov a, b, c , alebo ak na kružnici ležia dva, alebo tri z týchto vrcholov, no nie sú susedné v rámci kružnice, ani neexistujú v kružnici také chordy, ktoré by po rozpustení vytvorili pri vrchole d slučku. V tomto prípade, ak rozpustíme kružnicu C v grafe G , namiesto troch rôznych hrán vchádzajúcich do d budeme mať 3-rez. Na základe Paritnej lemy vieme povedať, že ľavý komponent grafu G ostane po rozpusteniach rovnako nezafarbiteľný ako po rozpusteniach ostal graf G_1 .
- b) Po rozpustení kružnice C v grafe G_1 bude pri vrchole d jedna slučka. Tento prípad nastane, ak na kružnici C ležia dva, alebo tri z vrcholov a, b, c a niektoré z nich

Obr. 3.9: 3-rez: $a, b, c \in C$

sú susedné, alebo existujú v kružnici chordy, ktoré po rozpustení na jednu, alebo druhú stranu vytvoria slučku. V tomto prípade, ak rozpustíme kružnicu C v grafe G , namiesto slučky budeme mať jednu novú hranu v pravom komponente spájajúcu dva koncové vrcholy pôvodného 3-rezu a namiesto zvyšnej hrany vchádzajúcej do vrchola d budeme mať medzi pravým a ľavým komponentom most. Na základe Paritnej lemy vieme povedať, že kubické grafy s mostom nie sú 3-zafarbiteľné a teda aj v tomto prípade sme v grafe G našli rozpustnú kružnicu.

Obr. 3.10: 3-rez: po rozpustení slučka v G_1 a most v G

□

3.2 Malé obvody

Lema 43. *Najmenší protipríklad pre hypotézu neobsahuje 4-cykly.*

Dôkaz. V tomto prípade je jednoduché nahliadnuť, že na základe Lemy 38 vieme povedať, že ak je kubický graf G snarkom obsahujúcim 4-cyklus, tak samotný 4-cyklus je rozpustnou kružnicou v grafe G . □

Dôsledok 44. *Najmenší protipríklad má obvod aspoň 5. Neprítomnosť dvojhrán vyplýva z Lemy 41, pretože z prítomnosti dvojhrany v kubickom grafe vyplýva aj prítomnosť 2-rezu (môžeme nahliadnuť pomocou obrázka 3.11). Neprítomnosť trojuholníkov vyplýva z Lemy 42, kde obdobne z prítomnosti trojuholníka v kubickom grafe vyplýva aj prítomnosť 3-rezu (obrázok 3.11). Neprítomnosť 4-rezu sme ukázali v Leme 43.*



Obr. 3.11: Z existencie 2-hrany vyplýva existencia 2-rezu a z existencie trojuholníka vyplýva existencia 3-rezu.

Ukázali sme, že najmenší protipríklad pre našu hypotézu s istotou nebude obsahovať 2-rezy ani 3-rezy a jeho obvod bude aspoň 5. V nasledovnej kapitole našu hypotézu podporíme výsledkami, ktoré sme dostali na základe výstupov z programu overujúceho prítomnosť rozpustných kružníc v kubických grafoch.

Kapitola 4

Program na hľadanie rozpustných kružníc

V počiatkoch nášho výskumu sme vytvorili program, ktorého hlavnou úlohou bolo hľadať rozpustné kružnice v grafe zo vstupu. Neskôr sme k programu pridali ďalšie funkcionality, ktoré nám pomáhali vo výskume. Medzi ne patrí napríklad triedenie kružníc zo vstupu, hľadanie a následné vypísanie chýbajúcich vrcholov v kružniciach zo vstupu, následné odstránenie duplikátov v zozname týchto chýbajúcich vrcholov. Posledné funkcionality sme využívali napríklad pri hľadaní možného teoretického popisu rozpustných kružníc v Blanušových a Isacsových snarkoch. Tieto funkcionality v zdrojových súboroch prikladáme, no bližšie ich, keďže nie sú algoritmicky zaujímavé, nepopisujeme.

V tejto kapitole v prvej časti popíšeme na čom stojí a ako funguje náš algoritmus na hľadanie rozpustných kružníc. V druhej časti uvedieme, na ktorých všetkých grafoch sme náš program spustili a aké výsledky sme dostali.

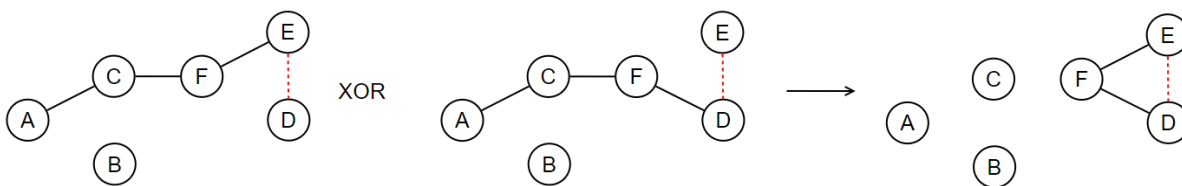
4.1 Popis programu

Program sa skladá z používateľského rozhrania, kde používateľ zadá počet vrcholov a či chce v grafe nájsť všetky rozpustné kružnice, alebo len zistiť, či v grafe existuje aspoň jedna rozpustná kružnica. V prvom prípade program vypíše všetky rozpustné kružnice plus pomer rozpustných kružníc ku všetkým párnym kružniciam. V druhom prípade, ak existuje, vypíše len jednu, ktorej overil rozpustnosť.

4.1.1 Hľadanie kružníc

Prvou časťou algoritmu je hľadanie kružníc v grafe. Pri implementácii sme sa inšpirovali blogom [14]. Graf v tomto algoritme reprezentujeme maticou susednosti. Na začiatku pomocou prehľadávania do hĺbky z vybraného vrcholu v tvoríme kosť. Keď narazíme

na vrchol, ktorý už je v kostre, nazveme ho i a vrchol, ktorý ho v rámci prehľadávania predchádza nazveme j , vykonáme nad cestou z i do v v kostre a nad cestou z j do v v kostre operáciu XOR. Operácia XOR nad hranami dvoch ciest zoberie do výsledku tie hrany, ktoré sa nachádzajú práve v jednej z ciest. Touto operáciou sa odstráni spoločný úsek ciest $i-v$ a $j-v$. Spolu s hranou ij tak ostane cyklus (pozri obrázok 4.1), ktorý si uložíme do zoznamu tzv. základných cyklov. Tieto základné cykly je možné vytvoriť aj z inej kostry. Vznikne tak iná množina cyklov, no vo výsledku pri hľadaní všetkých cyklov v grafe, poslúži rovnako a je ľahké nahliadnuť, že počet základných cyklov vytvorených z ktorejkoľvek kostry je vždy rovnaký: $|E| - |V| + 1$.

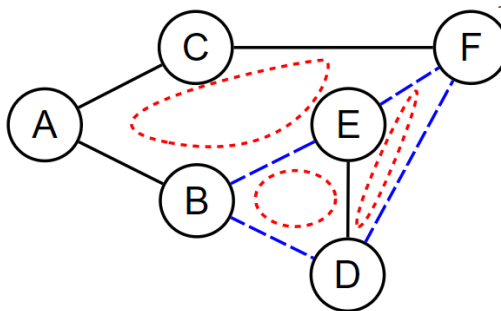


Obr. 4.1: Operácia XOR: hranu ED sme našli počas tvorby kostry. Aplikujeme XOR operáciu na cesty EA a DA . Ostanú nám hrany EF a DF . Pridaním objavenej hranu dostaneme základný cyklus EFD .

V ďalšej časti algoritmu kombinujeme základné cykly. Robíme tak tiež pomocou XOR operácie, teraz nad hranami základných cyklov. Aby sme s istotou našli všetky cykly v grafe (okrem základných, ktoré sme už našli), potrebujeme takto skombinovať všetky k -tice základných kružníc pre $k = 2..N$, kde $N = |E| - |V| + 1$ (pozri obrázok 4.2). Na postupné prechádzanie všetkými k -ticami sme si zvolili postupné generovanie permutácií bitových reťazcov dĺžky N s počtami jednotiek $k = 2..N$, kde pozícia jednotky v bitovom reťazci reprezentuje prítomnosť daného základného cyklu v kombinácii. Pre graf s počtom základných cyklov 4 by to znamenalo postupné generovanie permutácií pre bitové reťazce 1100, 1110 a 1111. Implementácia operácie XOR je jednoduchá. Na maticiach susednosti reprezentujúcich dané cykly vykonáme pre každý bit sčítanie modulo 2.

Pri kombinovaní základných cyklov ešte potrebujeme skontrolovať, či nám vznikla súvislá kružnica. To urobíme jednoducho tak, že vzniknutú štruktúru z niektorého vrcholu začneme prehľadávať do hĺbky. Ak pri návrate do pôvodného vrcholu budeme mať prejdený rovnaký počet hrán, ako je v celej štruktúre, vieme, že štruktúru tvorí jedna súvislá kružnica.

Na záver je dôležité uvedomiť si, aká je zložitosť nášho programu. Najväčšiu prácu, čo náš algoritmus zatiaľ robí, je kombinovanie základných cyklov. Všetkých permutácií dĺžky N s počtom jednotiek rovným k je $\binom{N}{k}$. Ak urobíme súčet cez všetky $k = 2..N$,



Obr. 4.2: Kombinovanie základných cyklov: predpokladajme, že máme tri základné cykly $ABEFC$, BDE a FED (bodkovaná čiara). Kombináciou druhých dvoch dostaneme cyklus vyznačený prerušovanou čiarou. Až kombináciou všetkých troch dostaneme cyklus, ktorý ide po celom obvode.

dostaneme:

$$\sum_{k=2}^N \binom{N}{k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} - \binom{N}{1} - \binom{N}{0} = 2^N - N - 1$$

Dĺžka trvania programu, ak chceme nájsť všetky kružnice v grafe, teda závisí od počtu základných kružníc a rastie exponenciálne, čiže veľmi rýchlo. Ako sme spomínali vyššie, počet základných kružníc v grafe je vždy $|E| - |V| + 1$. Pri kubickom grafe to vychádza na $\frac{|V|}{2} + 1$. Časová zložitosť teda aj pri kubických grafoch rastie exponenciálne vzhľadom na počet vrcholov v grafe.

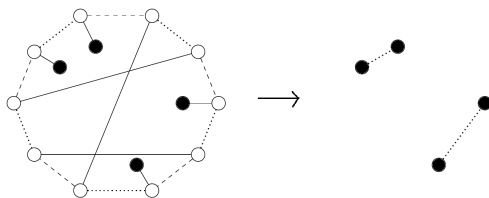
4.1.2 Overovanie rozpustnosti

Druhou veľkou časťou programu je overovanie rozpustnosti nájdených cyklov. Či je cyklus základný, alebo vytvorený kombináciou základných cyklov, v prvom rade overíme jeho paritu. Následne vytvoríme inštanciu grafu, na ktorej budeme skúšať rozpustenie cyklu. Tentokrát na jednoduchšiu manipuláciu použijeme ako reprezentáciu grafu zoznamy susedov. Začneme rozpúšťaním na jednu stranu. Odstránime každú párnú hranu cyklu. Následne vyhladzujeme vrcholy stupňa dva. Tieto majú za susedov vždy isto jeden vrchol z cyklu, ktorý s nimi v cykle susedí a druhý vrchol, ktorý je buď mimo cyklu, alebo v cykle, no nie susedný v rámci cyklu, ale tvoriaci chordu. Pri rozpúšťaní teda môžu nastať tri prípady, ktoré treba overiť:

- Rozpúšťaný vrchol v susedí s vrcholom v' , ktorý leží mimo cyklu. Tak isto vrchol w , s ktorým v susedí v rámci cyklu, má druhého suseda w' mimo cyklu. Po rozpustení v a w vznikne hrana $v'w'$.
- Rozpúšťaný vrchol v má okrem svojho suseda v rámci cyklu aj druhého suseda v cykle, s ktorým tvorí chordu. Touto chordou sa akoby predĺži cesta vrcholov stupňa dva, ktoré treba rozpustiť. Náš algoritmus predlžuje túto cestu, kým nenarazí na

jednom aj druhom konci cesty na vrcholy mimo cyklu. Tieto spojí do jednej hrany (obrázok 4.3).

- c) Posledná možnosť je podobná predošlej. Taktiež sa cez chordy predlžuje cesta vrcholov stupňa dva. V tomto prípade sa však môže stať, že sa táto cesta zacyklí a ostane nám kružnica disjunktná so zvyškom grafu, ktorú môžeme celú odstrániť.



Obr. 4.3: Rozpustenie cyklu po odstránení zelených (čiarkovaných) hrán. Kvôli chordám vzniká dlhšia cesta na rozpustenie. Vpravo vidno hrany, ktoré ostanú po rozpustení.

Po vyhladení vrcholov stupňa dva nám ostane štruktúra s menším počtom vrcholov ako v pôvodnom grafe. Niektoré zoznamy susedov ostanú prázdne. Vytvoríme preto novú inštanciu grafu, kde vrcholy, ktoré ostali, preindexujeme tak, aby nový graf bol opäť indexovaný od nuly po aktuálny počet vrcholov. O takto pripravenom grafe chceme zistiť, či je 3-zafarbiteľný. Vieme, že platí nasledovné tvrdenie:

Veta 45. (*Petersen*) *Každý bezmostový kubický graf obsahuje 1-faktor.*[12]

Náš algoritmus najprv overí, či graf neobsahuje slučku, čo by automaticky znamenalo nezafarbiteľnosť. Následne v grafe rekurzívne nájde všetky perfektné párenia a pre každé overí, či po jeho odstránení ostanú len párne kružnice, ktoré sú zafarbiteľné dvoma farbami. Ak také nájde, prehlási graf za zafarbiteľný. V opačnom prípade po odstránení párenia v grafe ostanú aspoň dve nepárne kružnice (musí ich byť párny počet kvôli párnemu počtu vrcholov v kubických grafoch). Nepárne kružnice sa nedajú zafarbiť dvoma farbami. Algoritmus teda v tomto prípade vyhlási graf za nezafarbiteľný.

Analogický postup od rozpúšťania vrcholov zopakujeme pre graf, ktorý vznikne po odstránení nepárnych hrán pôvodného cyklu.

4.2 Výsledky z programu

V nasledujúcej sekcii popíšeme, na ktorých všetkých grafoch sme náš program spustili a aké zaujímavé výsledky sme dostali.

Úplne prvý pokus boli všetky kubické grafy od osem do šestnásť vrcholov. O týchto sme zistili, že pre každý počet vrcholov existujú grafy s daným počtom vrcholov, ktoré obsahujú rozpustné cykly, no aj také grafy, v ktorých nie je ani jeden rozpustný cyklus.

Ďalej sme sa pozreli na permutačné snarky. Tu sme program spustili na 35 grafoch od 18 do 42 vrcholov, medzi inými aj napríklad na spomínaných Blanušových snarkoch. Zistili sme, že v každom permutačnom snarku sa nachádza viac ako jedna rozpustná kružnica. Dokonca vždy viac ako polovica kružníc dĺžky $n - 2$ v danom snarku je rozpustná, kde počty kružníc dĺžky $n - 2$ sa pohybujú okolo stoviek a nad 26 vrcholov okolo tisícok. Na druhej strane sa ukázalo, že v permutačných snarkoch sú všetky kružnice dĺžky 6 nerozpustné. Program sme potom spustili ešte na vyše 10 000 permutačných snarkoch do 34 vrcholov a na 104 permutačných snarkoch s väčším počtom vrcholov (50-74). Tam už program bežal pomalšie, preto sme už iba overovali existenciu aspoň jednej rozpustnej kružnice v grafe. Tá sa nám vo všetkých prípadoch potvrdila.

Špeciálnymi triedami snarkov boli už v kapitole 2 spomínané Blanušové a Isaacsove snarky. V Blanušových sme pomocou programu odhalili a následne teoreticky popísali rozpustnú kružnicu dĺžky $n - 2$ nachádzajúcu sa v každom grafe z tejto triedy. Na základe výsledkov tiež predpokladáme, že podobných kružníc je viac. V Isaacsovych sme tiež odhalili prítomnosť opakujúcich sa rozpustných kružníc. Navyše sme vďaka programu zistili, že pre túto triedu platí nasledovné:

- (i) Všetky kružnice dĺžky menšej ako $n - 4$ sú nerozpustné.
- (ii) Všetky rozpustné kružnice sú dĺžky $n - 2$, alebo $n - 4$.
- (iii) Vždy presne $1/3$ kružníc dĺžky $n - 4$ je rozpustná.
- (iv) Vždy presne $3/5$ kružníc dĺžky $n - 2$ sú rozpustné.

V Isaacsovych snarkoch sme si tiež vďaka výstupom z programu všimli, že kružnice dĺžky $n - 2$, ktorých chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné. V kapitole 2 sme toto pozorovanie dokázali.

Ďalšou skupinou grafov, na ktorej sme spustili program, je zbierka snarkov s obvodom aspoň 4, ktoré sa osvedčili ako prítipríklady na niektoré hypotézy. Grafov v tejto zbierke bolo rádovo 330 000, s počtom vrcholov 28 až 100. Aj v týchto grafoch sme skúmali už len existenciu rozpustnej kružnice, ktorá sa vo všetkých prípadoch potvrdila. Keďže väčšina z týchto grafov mala 48 a viac vrcholov, zbehnutie experimentu trvalo netriviálne dlho. Zabralo takmer tri mesiace takmer neustáleho bežania programu na jednom notebooku.

Keďže výsledky už počas posledného spomenutého experimentu začali vyzeráť sľubne, vyslovili sme hypotézu spomínanú v kapitole 3. Hypotézu sa nám pomocou nášho programu zatiaľ podarilo overiť na všetkých snarkoch do 36 vrcholov, ktoré majú obvod aspoň 5. Všetkých snarkov s týmto obvodom a s 34 vrcholmi sú 3 833 587 a všetkých

takých snarkov s 36 vrcholmi je 60 167 732¹. Grafy do 34 vrcholov zbehli relatívne rýchlo, no grafy na 36 vrcholoch bežali približne dva mesiace.

¹O vygenerovanie všetkých snarkov do 36 vrcholov sa zaslúžili v práci [4]. Konkrétne súbory s grafmi máme zo zdroja: House of Graphs - Snarks (<https://hog.grinvin.org/Snarks#snarks>)

Záver

V práci sme sa venovali dvojitej superpozícii a hľadaniu rozpustných kružníc v kubických grafoch. Ako pomôcku pri hľadaní sme vytvorili program, ktorý v grafe zo vstupu hľadá rozpustné kružnice. Tento program sme spustili na viacerých grafoch a snarkoch a na základe výsledkov sme vyvodili pozorovania, ktoré sme následne dokázali.

V kapitole 2 sme sa venovali známym triedam snarkov. Ukázali sme, že v Blanušových snarkoch existuje typ kružnice, ktorý sa opakuje v celej triede. To znamená, že v Blanušovom grafe s ľubovoľným počtom blokov vieme túto kružnicu popísať. Na základe výsledkov nášho programu hľadajúceho rozpustné kružnice sme vyslovili predpoklad, že takýchto typov kružníc sa v triede Blanušových snarkov nachádza viac. Druhou pozorovanou triedou boli Isaacsove snarky. V nich sme na základe programu odpozorovali, že každá kružnica dĺžky $n - 2$, v ktorej chýbajú práve dva susedné vrcholy, je rozpustná. Skúmali sme teda, akými spôsobmi môže cez jednotlivé ramená Isaacsových snarkov prechádzať kružnica dĺžky $n - 2$. Overili sme, že naozaj všetky korektné možnosti tvorby kružnice dĺžky $n - 2$, v ktorej chýbajú susedné vrcholy, vedú k vytvoreniu rozpustnej kružnice.

Na základe výsledkov programu, ktoré bežali, okrem iného, na rôznych sadách snarkov, sme vyslovili hypotézu, že každý snark obsahuje rozpustnú kružnicu. Túto hypotézu sme za pomoci Paritnej lemy a liem o malých rezoch a obvodoch dokázali pre triviálne snarky s malými obvodmi (do veľkosti 5) a s malými rezmi (do veľkosti 4). Taktiež sme platnosť hypotézy potvrdili pre všetky snarky do 36 vrcholov pomocou nášho programu.

Vo výskume by sa dalo pokračovať najmä čo sa týka vyslovenej hypotézy hovoriacej o prítomnosti rozpustnej kružnice v každom snarku. Dalo by sa pozrieť, či by nebolo možné dokázať jej prítomnosť vo všetkých permutačných snarkoch. Z opačnej strany, ak by sme chceli hľadať protipríklad na hypotézu, mohli by sme sa pozrieť na snarky s väčšími obvodmi (7 a viac). Na týchto ako na prvých narazili niektoré teórie v oblasti snarkov.

Na záver nám už ostáva len povedať, že ak by sa podarilo potvrdiť hypotézu o prítomnosti rozpustnej kružnice v každom snarku, mali by sme v rukách ďalší zaujímavý a silný nástroj na konštrukciu snarkov.

Literatúra

- [1] G.M. Adelson-Velskii and V.K. Titov. Polyhedral embeddings of snarks in orientable surfaces. *Vopr. Kibern. (Russian)*, (1):5–14, 1973.
- [2] B. Descartes. Network-colourings. *Math. Gaz.*, 32(299):67–69, 1948.
- [3] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2006.
- [4] J. Hägglund G. Brinkmann, J. Goedgebeur and K. Markström. Generation and properties of snarks. *J. Combin. Theory Ser. B*, 103(4):468–488, 2013.
- [5] R. Isaacs. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. *Amer. Math. Monthly*, 82(3):221–239, 1975.
- [6] M. Kochol. Snarks without small cycles. *J. Combin. Theory Ser. B*, 67(1):34–47, 1996.
- [7] M. Kochol. Superposition and constructions of graphs without nowhere-zero k -flows. *European J. Combin.*, 23(3):281–306, 2002.
- [8] M. Kochol. Snarks and flow-snarks constructed from coloring-snarks. *Discrete Math.*, 278(1):165–174, 2004.
- [9] M. Kochol. Polyhedral embeddings of snarks in orientable surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(5):1613–1619, 2009.
- [10] J. Mazák. Circular chromatic index of type 1 blanuša snarks. *J. Graph Theory*, 59(2):89–96, 2008.
- [11] E. Máčajová and M. Škoviera. Superposition of snarks revisited. *European J. Combin.*, 91:103220, 2021.
- [12] J. Petersen. Die theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica*, 15:193 – 220, 1900.
- [13] J. Rajník. Small critical snarks and their generalizations. master thesis, 2019.

- [14] Philipp Sch. Enumerating all cycles in an undirected graph. <https://www.codeproject.com/articles/1158232/enumerating-all-cycles-in-an-undirected-graph>, Sep 2018.

Zdroje obrázkov

1. Obrázok 1.2 zdroj: [11]
2. Obrázok 1.3 zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes_snark/
3. Obrázok 2.5 zdroj: [13]
4. Obrázky 4.1 a 4.2 zdroj: [14]