Minimalizácia protipríkladu vety o štyroch farbách pre signované planárne grafy.

Obhajoba diplomovej práce

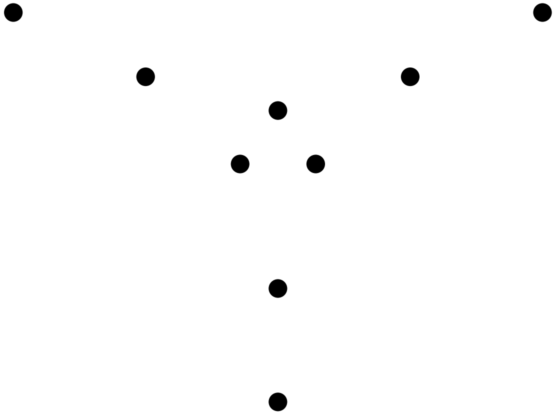
Matúš Matok

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského

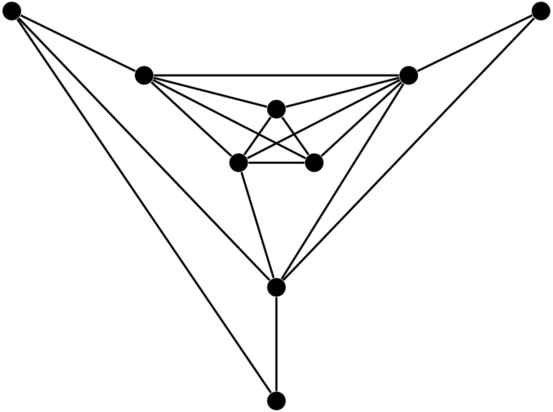
9. júna 2023

Školiteľ: RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.

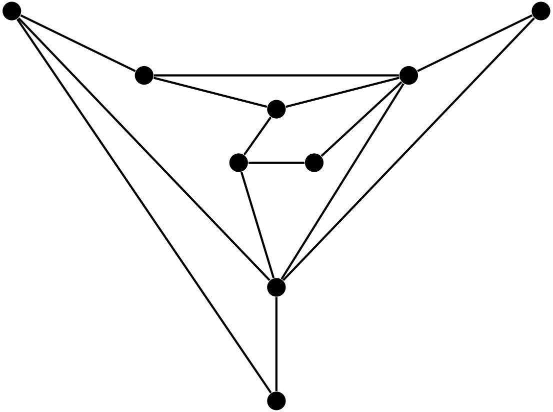
Graf: vrcholy a hrany



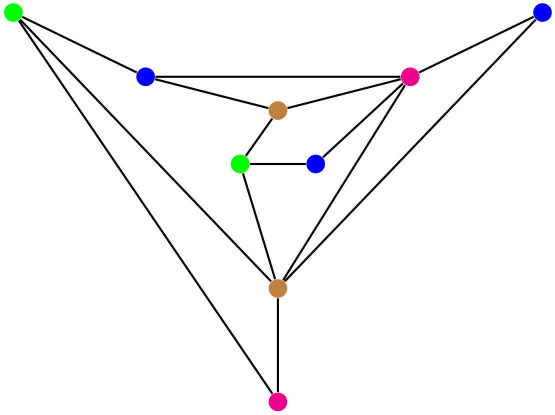
Graf: vrcholy a hrany



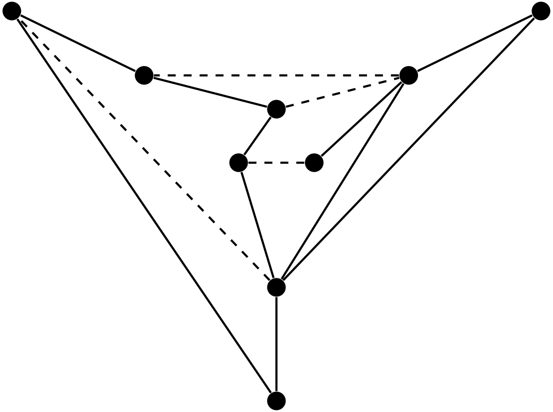
Planárne grafy a veta o 4 farbách



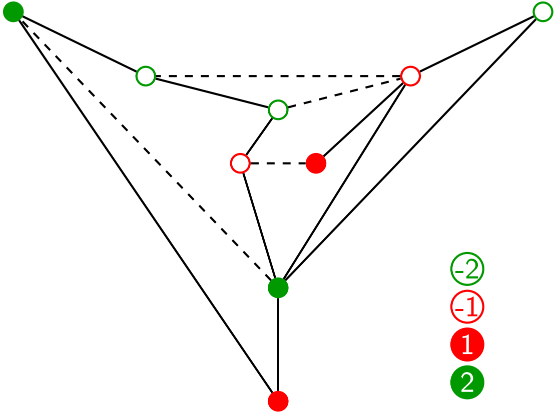
Planárne grafy a veta o 4 farbách



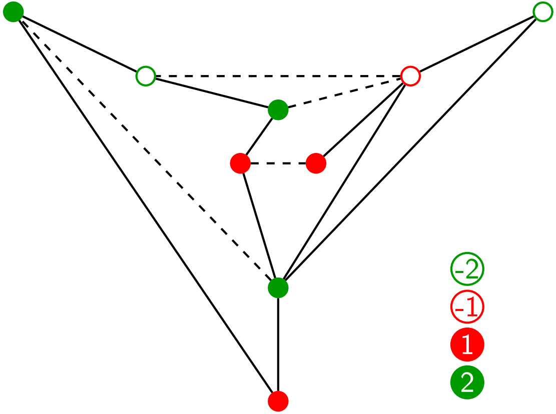
Signované grafy a ich farbenia



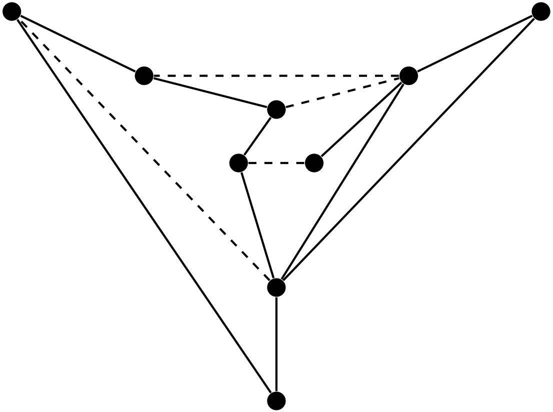
Signované grafy a ich farbenia



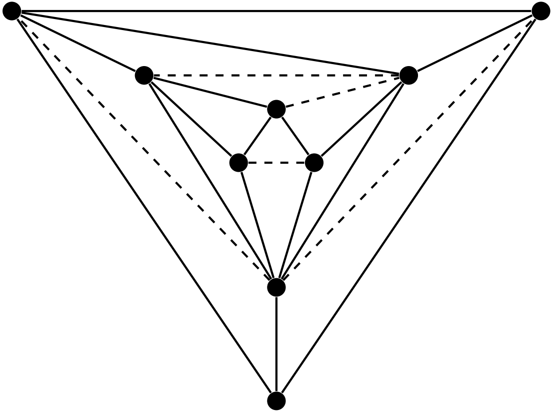
Signované grafy a ich farbenia



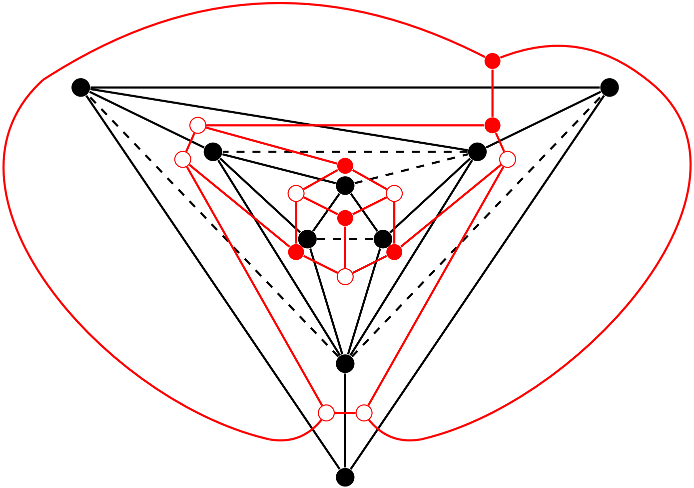
Signované grafy a ich farbenia



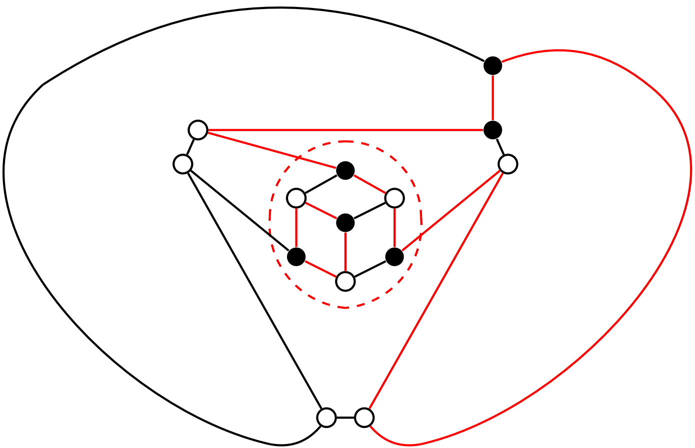
Signované grafy a ich farbenia



Duálny graf k signovanému planárnemu grafu



Semi-2-factor



Semi-2-factor

Definícia

Semi-2-factor grafu G je množina kružníc pokrývajúca všetky pozitívne vrcholy v G, pričom každá kružnica obsahuje párny počet pozitívnych vrcholov.

Stav problematiky

Hypotéza (Máčajová, Raspaud, Škoviera 2016)

Každý signovaný planárny graf je 4-zafarbiteľný.

Stav problematiky

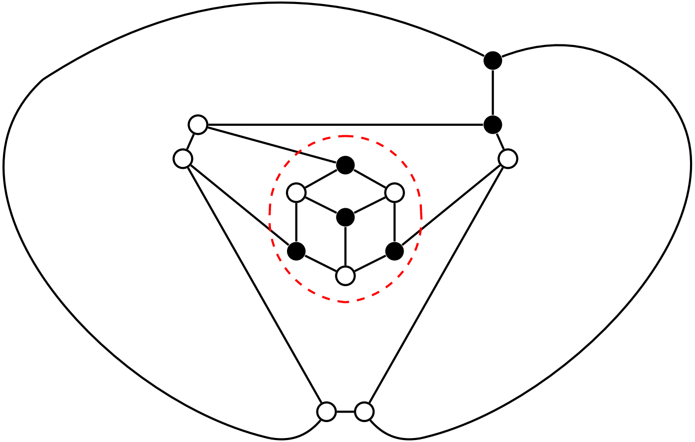
Hypotéza (Máčajová, Raspaud, Škoviera 2016)

Každý signovaný planárny graf je 4-zafarbiteľný.

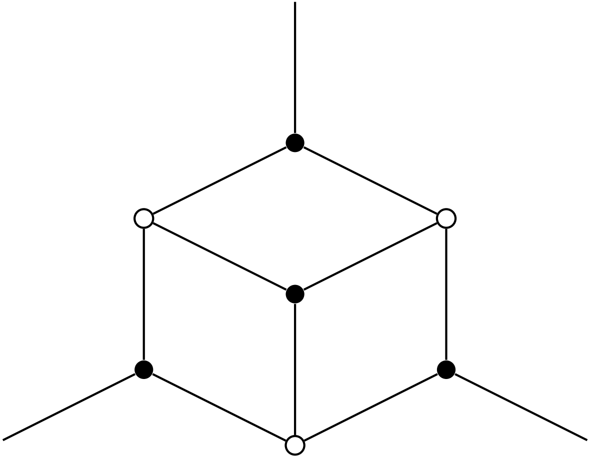
Veta (Kardoš, Narboni 2019)

Hypotéza neplatí.

Tripóly



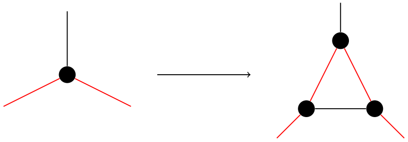
Tripóly

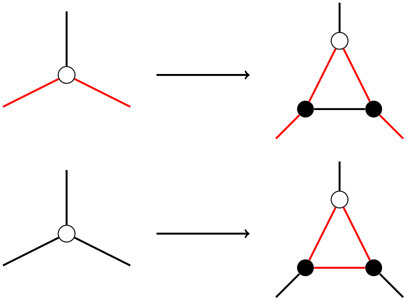


Tripóly

P_3	P_2	P_1	P_0
N_3^*	N_2^*	N_1^*	N_0^*
N_3	N_2	N_1	N_0

Redukovateľné konfigurácie





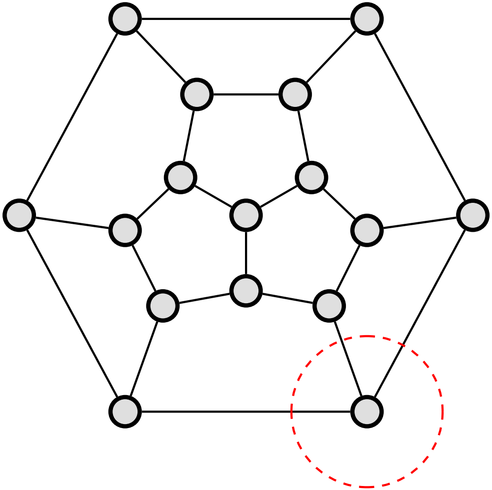
Ciele

- Nájsť najmenší tripól každého typu.

Ciele

- Nájsť najmenší tripól každého typu.
- Napísať program, ktorý takéto tripóly nájde.

Priamočiary prístup a odhad zložitosti



Priamočiary prístup a odhad zložitosti

- Vygenerovať všetky 3-súvislé kubické planárne grafy.

Priamočiary prístup a odhad zložitosti

- Vygenerovať všetky 3-súvislé kubické planárne grafy.
- Vyskúšať všetky signatúry.

Priamočiary prístup a odhad zložitosti

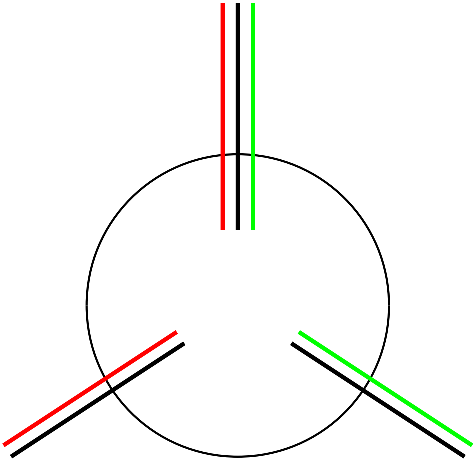
- Vygenerovať všetky 3-súvislé kubické planárne grafy.
- Vyskúšať všetky signatúry.
- Pre konkrétnu signatúru overiť, či po odobratí nejakého vrchola dostaneme tripól hľadaného typu.

Priamočiary prístup a odhad zložitosti

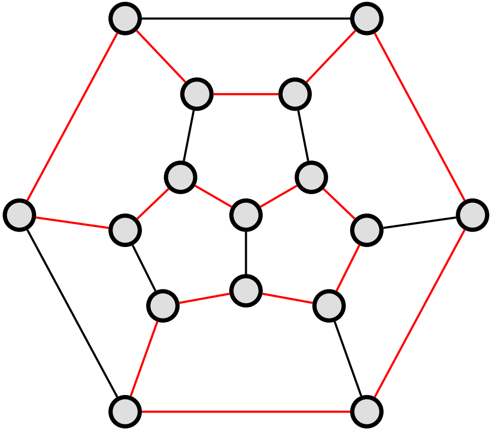
- Vygenerovať všetky 3-súvislé kubické planárne grafy.
- Vyskúšať všetky signatúry.
- Pre konkrétnu signatúru overiť, či po odobratí nejakého vrcholu dostaneme tripól hľadaného typu.

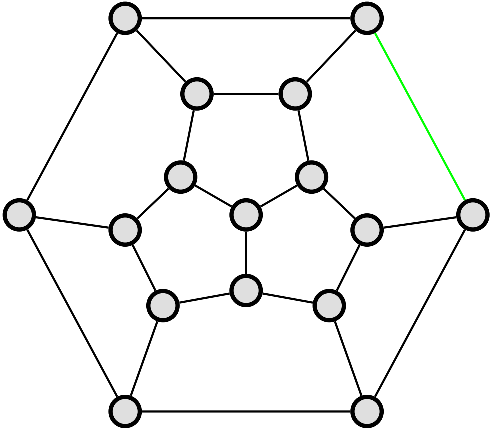
$$a^n.2^n.b^n$$

Hľadanie najmenšieho P_2 tripólu

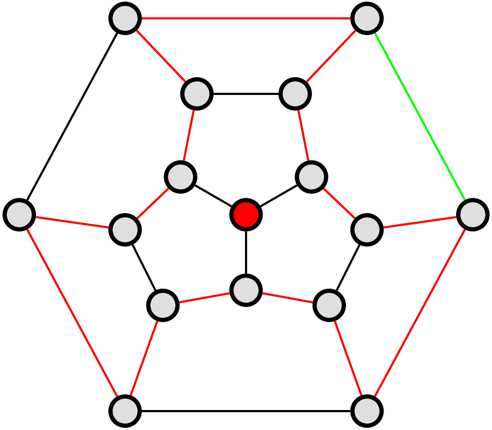


Hamiltonovsky nevyhnutná hrana





Nutne pozitívne vrcholy



Početnosť výskytov

Veľkosť	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Počet grafov	1	0	0	2	3	5	20	60	242	1088	5180
Počet hrán	0	0	0	0	3	2	1	12	45	168	713
Počet vrcholov	x	x	x	x	6	6	10	12.667	13.333	14.744	16.856

Náš postup

- Vygeneruj všetky grafy bez redukovateľných konfigurácií.
- Ignoruj tie, ktoré predsalen nejakú redukovateľnú konfiguráciu obsahujú.
- Pre daný graf nájdi všetky hamiltonovsky nevyhnutné hrany.
- Pre daný graf a hranu nájdi všetky nutne pozitívne vrcholy.
- Pre zvyšnú množinu vrcholov vyskúšaj všetky prípustné signatúry.
- Pre konkrétnu signatúru over, či daná hamiltonovsky nevyhnutná hrana je nevyhnutná.

Rýchlosť programu

Veľkosť	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Generovanie	31ms	47ms	73ms	132ms	355ms	1.03s	4.3s	23.2s	128.4s
S overovaním	31ms	51ms	105ms	165ms	428ms	1.16s	4.6s	25.2s	287.1s

Najmenšie tripóly

	3	2
P	1	27
N^*	1	27
N	7	29

Záver a možné pokračovania v práci

- Záver:
  - Podarilo sa nám overiť, že známy tripól typu P_2 je skutočne najmenší možný.
  - Našli sme predtým neznáme tripóly typu N_2^* a N_2, ktoré sú najmenšie svojho typu.
- Pokračovanie: - zmeniť paradigmu generovania tak, aby sme sa vedeli vyhnúť pri generovaní čo možno najviac grafom obsahujúcim redukovateľné konfigurácie.

Ďakujem za pozornosť.

Kedy je signovaný graf balancovaný?

Balance. Any path $P = e_1 e_2 \dots e_k$ has a *value*, obtained by multiplying the signs of its edges:

$$\sigma(P) = \sigma(e_1)\sigma(e_2)\dots\sigma(e_k).$$

A cycle whose value is positive is called *balanced*. An edge set is called balanced when every cycle in it is balanced.

Odpoveď:
Signovaný graf G je balancovaný ak jeho množina hrán $E(G)$ je balancovaná. Dá sa ukázať, že G je balancovaný práve vtedy keď vieme switch-núť vhodnú podmnožinu vrcholov G tak, že všetky hrany v $E(G)$ budú pozitívne.

Lemám 3.2 a 3.3 chýba koniec zadania

Lemma 3.2 Let R be the canonical reduction $G^* \to G$, where the origin face f of G^* is a square.

Lemma 3.3 Let R be the canonical reduction $G^* \to G$, where the origin face f of G^* is of size 5.

Lemma 3.2 Let R be the canonical reduction $G^* \to G$, where the origin face f of G^* is a square. Then G is a 3-connected cubic planar graph.

Lemma 3.3 Let R be the canonical reduction $G^* \to G$, where the origin face f of G^* is of size 5. Then G is a 3-connected cubic planar graph.