Malé kritické snarky a ich zovšeobecnenia

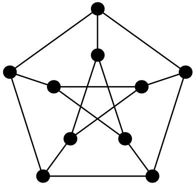
Jozef Rajník
Školiteľ: RNDr. Ján Mazák, PhD.

13. júna 2019

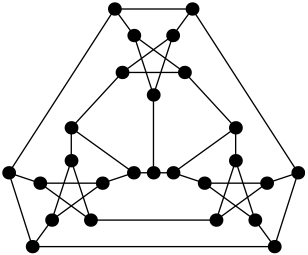
Snarky

Snark je:

- kubický graf,
- bez mostu,
- hrany nemožno zafarbiť 3-mi farbami.



Obr.: Petersenov graf



Obr.: Snark na 26 vrcholoch

Význam snarkov

Potenciálne protipríklady na známe hypotézy:

Hypotéza (Tutte, 1956)

Každý bezmostový graf má nikde nulový 5-tok.

Hypotéza (Szekeres a Seymour, 1973)

Pre každý bezmostový graf existuje taká množina cyklov, že každá hrana je obsiahnutá v práve dvoch cykloch.

Potrebné vlastnosti

Definícia

Graf G je *cyklicky k-súvislý*, ak nemá rez pozostávajúci s menej ako k hrán, ktorý ho rozdelí na dva komponenty, z ktorých každý obsahuje cyklus.
Cyklická súvislosť grafu $= \lambda_c(G)$.

Definícia

Obvod grafu $(g(G))$ je dĺžka najkratšej kružnice.

Snarky

Snark je:

- kubický graf,
- bez mostu,
- hrany nemožno zafarbiť 3-mi farbami,
- často sa vyžaduje $g \geq 5$ a $\lambda_c \geq 4$.

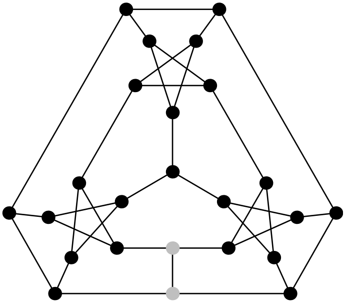
Súčasný stav snarkov

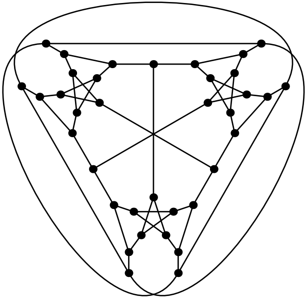
- Veľké množstvo známych snarkov.
- Niekoľko nekonečných tried snarkov.
- Vygenerovaný zoznam netriviálnych snarkov do 36 vrcholov (65 mil.) [Birkmann a kol.].
- Tento sme analyzovali (bakalárska práca).

Kritické a bikritické snarky

Koľko vrcholov možno odstrániť zo snarku?

- Jeden vrchol → vždy nezafarbiteľné.
- Ak je $S - \{u, v\}$ zafarbiteľný
  → *odstrániteľná dvojica vrcholov* $\{u, v\}$.





Kritické a bikritické snarky

Ktoré dvojice sú neodstrániteľné?

- *Kritický snark* = každá dvojica susedných vrch.
- *Bikritický snark* = každá dvojica vrcholov.
- *Striktne kritický snark*
  = kritický, ale nie bikritický.

Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.

Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.

Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.
- Nekonečné triedy snarkov:

Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.
- Nekonečné triedy snarkov:
- striktne kritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$;

Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.
- Nekonečné triedy snarkov:
- striktne kritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$;
- striktne kritické, $\lambda_c = 6$;

Výsledky práce

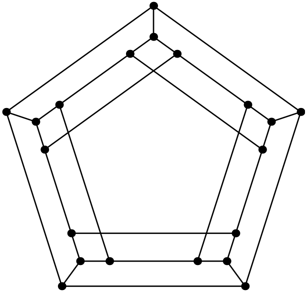
- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.
- Nekonečné triedy snarkov:
- striktne kritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$;
- striktne kritické, $\lambda_c = 6$;
- bikritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$.

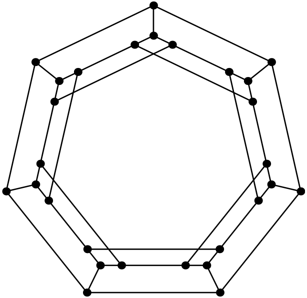
Výsledky práce

- Analyzované striktne kritické snarky do rádu 36.
- Nové techniky dokazovania (bi)kritickosti snarkov.
- Nekonečné triedy snarkov:
- striktne kritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$;
- striktne kritické, $\lambda_c = 6$;
- bikritické, $g = 6$, $\lambda_c = 5$.
- Konštrukcia všetkých netriviálnych snarkov rádu 40 s $g = 6$ a $\lambda_c \leq 5$.

Isaacsove snarky

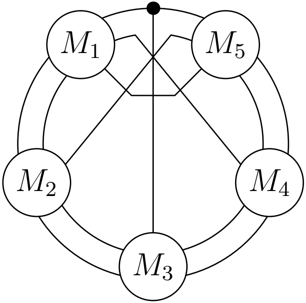
- Prvá nekonečná trieda snarkov $J_3, J_5, J_7, \ldots$
- Veľmi silné vlastnosti:
  bikritické, od J_7 6-súvislé, ...





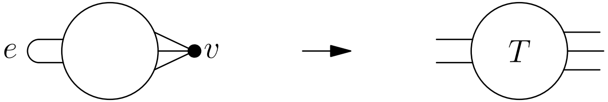
Stavebné bloky snarkov

- Graf s visiacimi polhranami – *multipól*.
- Snark – rozloženie na multipóly.
- Skúmanie vlastností multipólov.



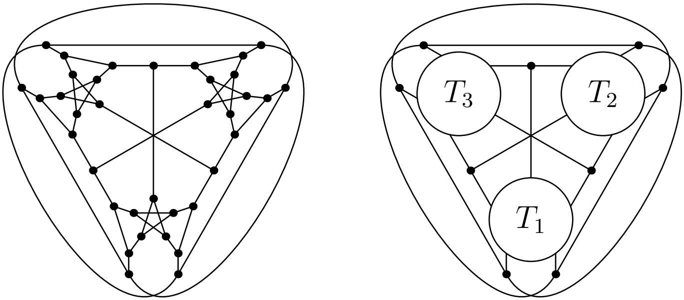
Vlastný (2,3)-pól

- Snark s odstráneným vrcholom a prerezanou hranou (5-pól).
- Dve visiace hrany – rôzne farby.
- Tri visiace hrany – nie tri rôzne farby.
- *Perfektný* = ak pripúšťa všetky takéto farbenia.



Trieda striktne kritických snarkov

- Inšpirovaná striktne kritickými snarkami rádu 36.
- Takéto snarky nikdy nie sú bikritické.



Idea dôkazu

- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.

Idea dôkazu

- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.
- Rozdelenie na 4 prípady – odkiaľ sú x, y.

Idea dôkazu

- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.
- Rozdelenie na 4 prípady – odkiaľ sú x, y.
- Opísanie zafarbenia pre každý prípad.

Idea dôkazu

- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.
- Rozdelenie na 4 prípady – odkiaľ sú x, y.
- Opísanie zafarbenia pre každý prípad.
- Vlastné $(2, 3)$-póly sú *perfektné*.

Idea dôkazu

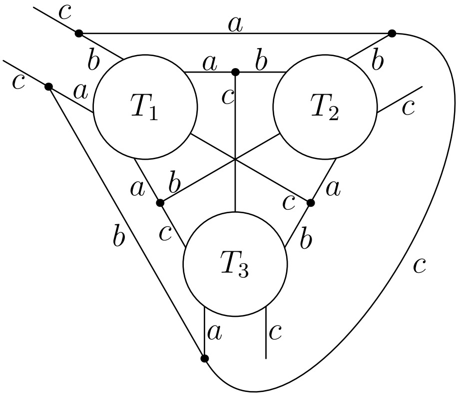
- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.
- Rozdelenie na 4 prípady – odkiaľ sú x, y.
- Opísanie zafarbenia pre každý prípad.
- Vlastné $(2, 3)$-póly sú *perfektné*.
- Sú zobrané s kritických snarkov $\rightarrow$ zafarbenia 4-pólov.

Idea dôkazu

- $S - \{x, y\}$ je zafarbiteľný pre $\forall$ susedné $x, y \in V(S)$.
- Rozdelenie na 4 prípady – odkiaľ sú x, y.
- Opísanie zafarbenia pre každý prípad.
- Vlastné $(2, 3)$-póly sú *perfektné*.
- Sú zobrané s kritických snarkov $\rightarrow$ zafarbenia 4-pólov.
- Jedna nová technická farebná vlastnosť.

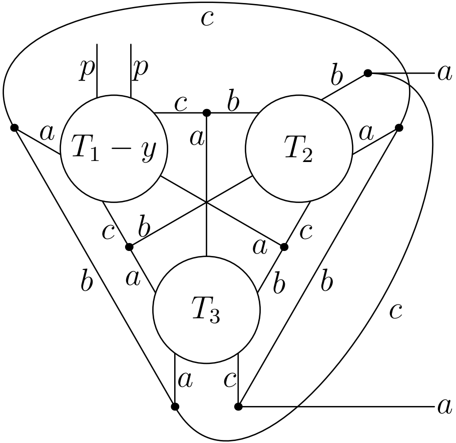
Idea dôkazu

Prípad i): $x, y \in C_6'$



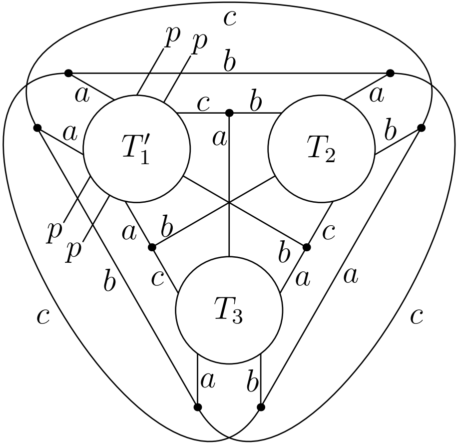
Idea dôkazu

Prípad ii): $x \in C_6'$, $y \in T_1$



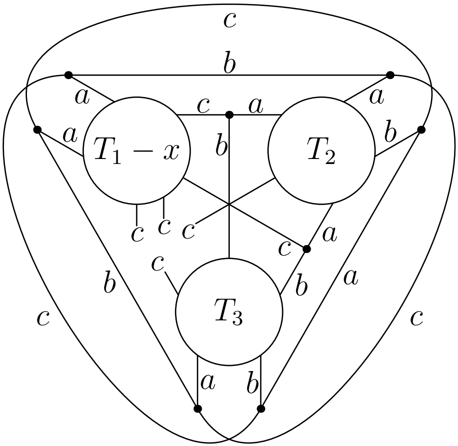
Idea dôkazu

Prípad iii): $x,\, y \in T_1$



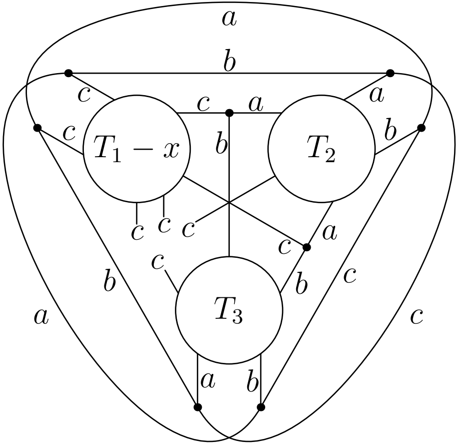
Idea dôkazu

Prípad iv): $x \in T_1$, y spája T_1 a T_3



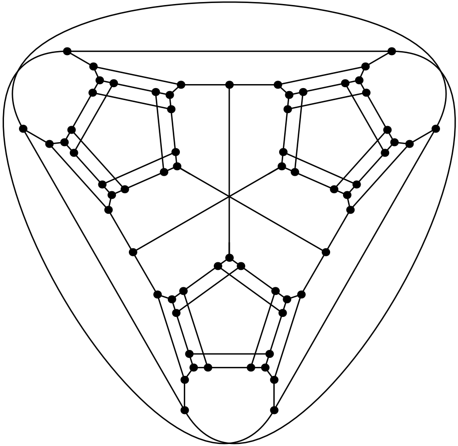
Idea dôkazu

Prípad iv): $x \in T_1$, y spája T_1 a T_3



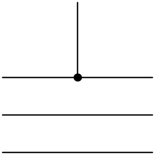
Trieda striktne kritických snarkov

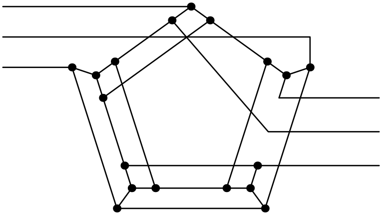
Pokiaľ zoberieme T_1, T_2, T_3 z Isaacsových snarkov $\rightarrow$ kritický snark, $g = 6$, $\lambda_c = 5$.



Superpozícia

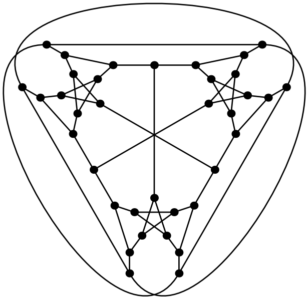
- Technika konštrukcie snarkov $\lambda_c = 6$ [Kochol].
- Niektoré vrcholy a hrany nahradíme *supervrcholmi* a *superhranami*.





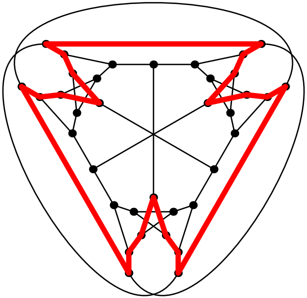
Príklad

- Nahradíme cyklus v snarku S supercyklom.



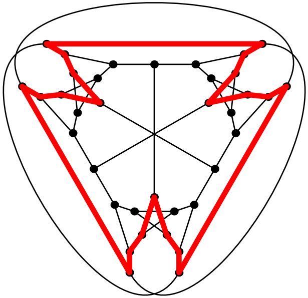
Príklad

- Nahradíme cyklus v snarku S supercyklom.



Príklad

- Nahradíme cyklus v snarku S supercyklom.



- Výsledný snark je 6-súvislý.

Zachovanie kritickosti

- Takáto superpozícia zachováva kritickosť.

Zachovanie kritickosti

- Takáto superpozícia zachováva kritickosť.
- Rozobratie prípadov,
  odkiaľ odstraňujeme vrcholy.

Zachovanie kritickosti

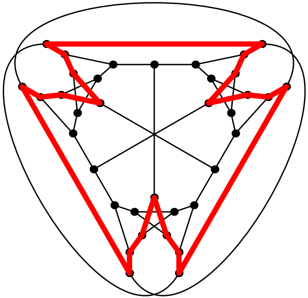
- Takáto superpozícia zachováva kritickosť.
- Rozobratie prípadov,
  odkiaľ odstraňujeme vrcholy.
- Nájdenie zafarbenie okolo porušenej časti.

Zachovanie kritickosti

- Takáto superpozícia zachováva kritickosť.
- Rozobratie prípadov,
  odkiaľ odstraňujeme vrcholy.
- Nájdenie zafarbenie okolo porušenej časti.
- Supercesta pripúšťa všetky zafarbenia cesty.

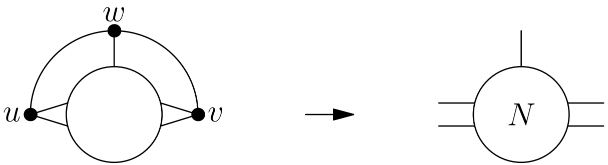
Trieda striktne kritických snarkov

- Superhrany z Issacsových snarkov.
- Striktne kritické cyklicky 6-súvislé snarky.
- Doteraz takéto snarky neboli známe.
- Rády $414 + 8k$.

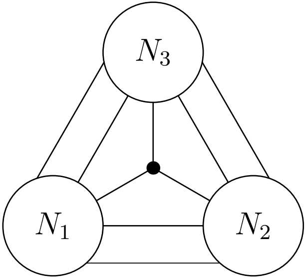


Negátor

- Snark s odstránenou cestou dĺžky 2.
- Práve na jednej strane dve rovnaké farby.
- Zvyšné tri polhrany – tri rôzne farby.
- *Perfektný* = ak pripúšťa všetky takéto farbenia.

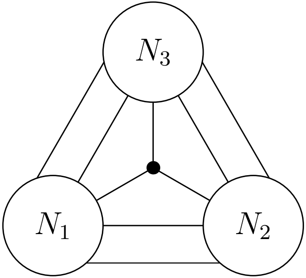


Trieda bikritických snarkov



- Formulované požiadavky na použité negátory:
- perfektné, z bikritických snarkov
  $+$ ďalšie špecifické.

Trieda bikritických snarkov



- Negátory z Isaacsových snarkov
  $\rightarrow g = 6$, $\lambda_c = 5$.

Trieda bikritických snarkov

- Pre rády ≥ 30 už boli skonštruované bikritické snarky s $\lambda_c = 5$ [Máčajová, Škoviera].
- Naša trieda je bohatšia.
- Asi 90 % negátorov z bikritických snarkov vyhovuje našim podmienkam.
- Nepoznáme prípad, kedy výsledný snark nie je bikritický.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.
- Ďalej nemožné ísť výpočtovo.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.
- Ďalej nemožné ísť výpočtovo.
- Nie sme schopní nájsť snarky s $\lambda_c \geq 6$: okrem J_k najmenší má rád 118.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.
- Ďalej nemožné ísť výpočtovo.
- Nie sme schopní nájsť snarky s $\lambda_c \geq 6$: okrem J_k najmenší má rád 118.
- Najmenší známy s $g = 6$ a $\lambda_c = 5$ má rád 52.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.
- Ďalej nemožné ísť výpočtovo.
- Nie sme schopní nájsť snarky s $\lambda_c \geq 6$: okrem J_k najmenší má rád 118.
- Najmenší známy s $g = 6$ a $\lambda_c = 5$ má rád 52.
- Pre $\lambda_c \leq 5$ známe dekompozičné vety.

Generovanie snarkov s obvodom 6

- Snarky s obvodom 6 do rádu 38 všetky.
- Ďalej nemožné ísť výpočtovo.
- Nie sme schopní nájsť snarky s $\lambda_c \geq 6$: okrem J_k najmenší má rád 118.
- Najmenší známy s $g = 6$ a $\lambda_c = 5$ má rád 52.
- Pre $\lambda_c \leq 5$ známe dekompozičné vety.
- Spätné zrekonštruovanie s využitím počítača.

Prekážky

- Pri niektorých konštrukciách sú použité triviálne snarky (dokonca násobné hrany).
- Malých cyklov je však len málo.
- Opis pomocou snarkov s $\lambda_c \geq 3$.
- Ich zoznam nie je dostupný.
- Vygenerovanie po rád 30.

Výsledok a ďalšie plány

- 270 netriviálnych snarkov s $g = 6$, $\lambda_c \leq 5$.
- Všetky majú $\lambda_c = 4$.
- Je možné posunúť sa na vyššie rády.
- Potrebná dôkladnejšia analýza.

Ďakujem za pozornosť.

Zabudnutý prípad

Čo ak $x \in T_1$, y spája T_2 a T_3?