

Hamiltonovské kružnice v bipartitných kubických planárných grafoch

Richard Bíró, 2mINF

Školiteľ: RNDr. Ing. František Kardoš, PhD.

9. 6. 2023

Téma

Hypotéza

(Barnette) Každý kubický planární bipartitný 3-súvislý graf je Hamiltonovský.

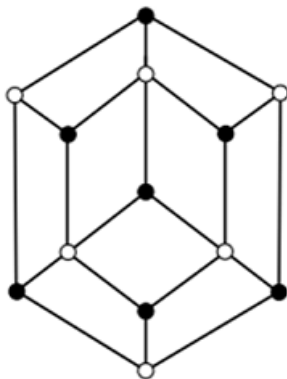
Hypotéza

(Barnette) Každý kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf je Hamiltonovský.

- ▶ Všetky štyri podmienky sú nutné
- ▶ Známe len čiastočné výsledky pre špecifické triedy grafov

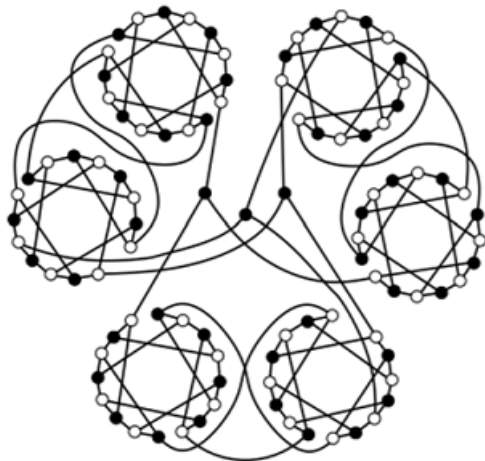
Téma

- ▶ Kirkmanov graf
- ▶ kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf
- ▶ nie je Hamiltonovský



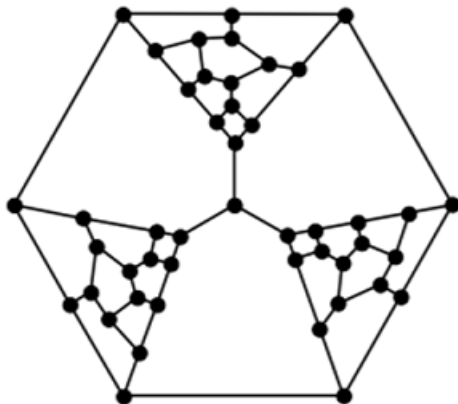
Téma

- ▶ Hortonov graf
- ▶ kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf
- ▶ nie je Hamiltonovský



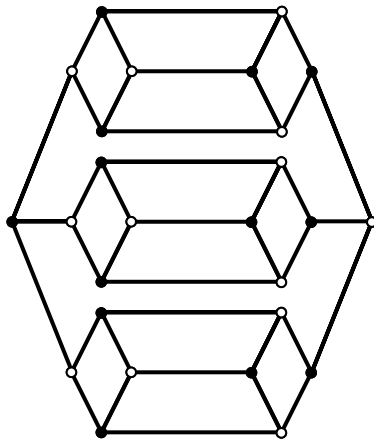
Téma

- ▶ Tuttov graf
- ▶ kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf
- ▶ nie je Hamiltonovský



Téma

- ▶ Asanov graf
- ▶ kubický planárny bipartitný 3-súvislý graf
- ▶ nie je Hamiltonovský



Redukovateľné konfigurácie

Definícia

Multipól je trojica (V, E, X) , kde V je konečná množina vrcholov, E je konečná množina hrán and X je konečná množina polhrán.

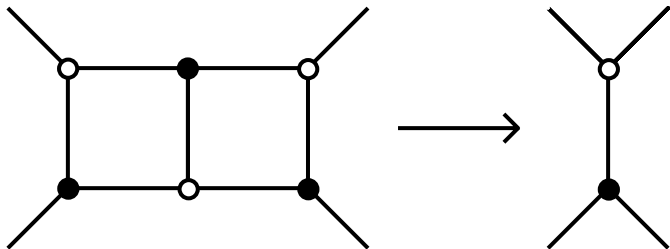
Redukovateľné konfigurácie

Definícia

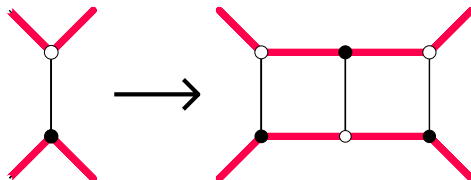
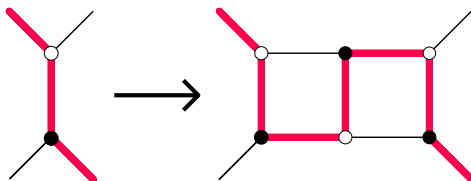
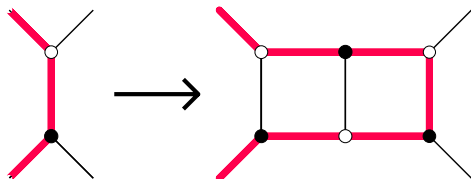
Multipól je trojica (V, E, X) , kde V je konečná množina vrcholov, E je konečná množina hrán and X je konečná množina polhrán.

- ▶ Multipól M_G je **redukovateľný** na multipól M_R ak každá možnosť akou môže Hamiltonovská kružnica prechádzať M_R je rozšíriteľná v M_G
- ▶ Ak M_G je redukovateľný na M_R , M_G nazývame **redukovateľnou konfiguráciou** a M_R nazývame **reduktorom**
- ▶ Ak pre každú štruktúru M_G existuje redukcia zachovávajúca 3-súvislosť, M_G nazývame **3-súvisle redukovateľnou konfiguráciou**

Príklad redukovateľnej konfigurácie



Príklad redukovateľnej konfigurácie



Redukovateľné konfigurácie

- ▶ Nemôžu byť v najmenšom protipríklade
- ▶ Často zložené zo stien malej veľkosti

Ciele práce

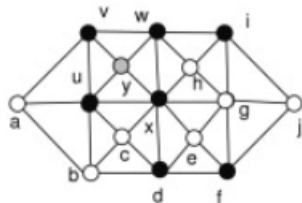
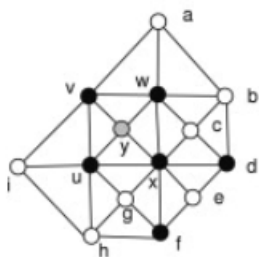
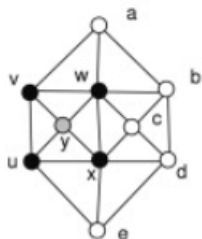
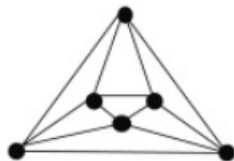
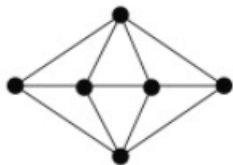
- ▶ Študovanie vlastností konfigurácií malých stien v bipartitných kubických planárnych grafoch
- ▶ Klasifikácia konfigurácií na redukovateľné a neredukovateľné s využitím počítačového programu
- ▶ Efektívne prehľadávanie priestoru potenciálnych riešení

Súčasný stav

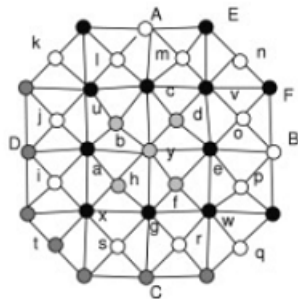
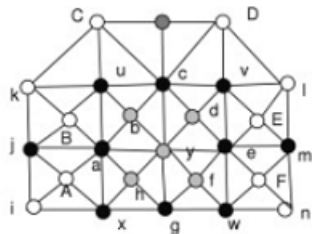
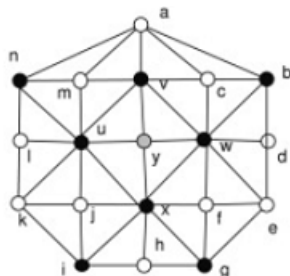
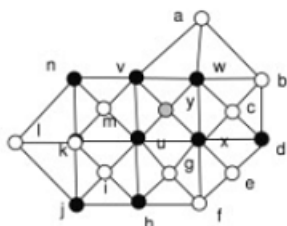
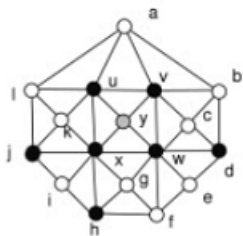
Xiaoyun Lu: A note on Barnette's conjecture (2011)

- ▶ Opis Barnettovej hypotézy cez duálnu trianguláciu grafu
- ▶ Desať duálnych redukovateľných konfigurácií
- ▶ Algoritmus nepoužíval úplné prehľadávanie

Duálne redukovateľné konfigurácie



Duálne redukovateľné konfigurácie



Implementácia

- ▶ Programovací jazyk: Python
- ▶ Za konfigurácie považujeme kubické planárne bipartitné multipóly (KBP-multipóly), ktorých polhrany ležia na vonkajšej stene
- ▶ Reduktor má menší počet vrcholov ako pôvodná konfigurácia

Implementácia

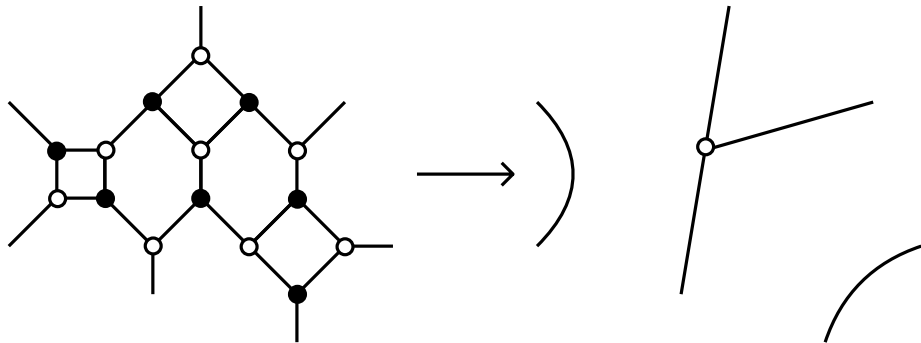
Program sme rozdelili na štyri časti:

1. Generovanie potenciálnych redukovateľných konfigurácií po určenú hranicu
2. Generovanie potenciálnych reduktorov k danej konfigurácii
3. Generovanie Hamiltonovských možností k danému reduktoru
4. Overenie, či sa Hamiltonovská možnosť dá rozšíriť v pôvodnej konfigurácii

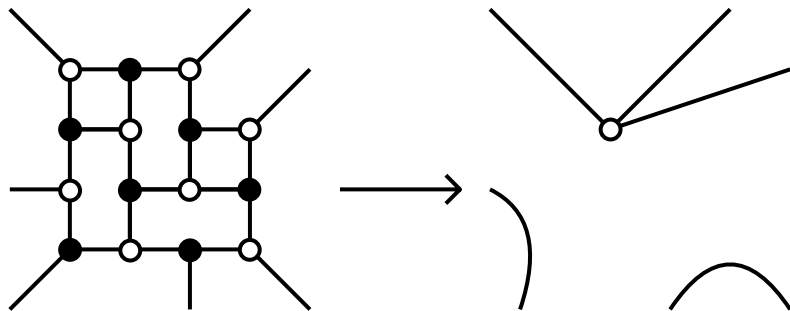
Implementácia

- ▶ Prehľadali sme všetky KBP-multipóly po veľkosť 21, ktoré mali nanajvýš 10 polhrán
- ▶ Boli nájdené štyri nové redukovateľné konfigurácie
- ▶ Program overil už známe redukovateľné konfigurácie

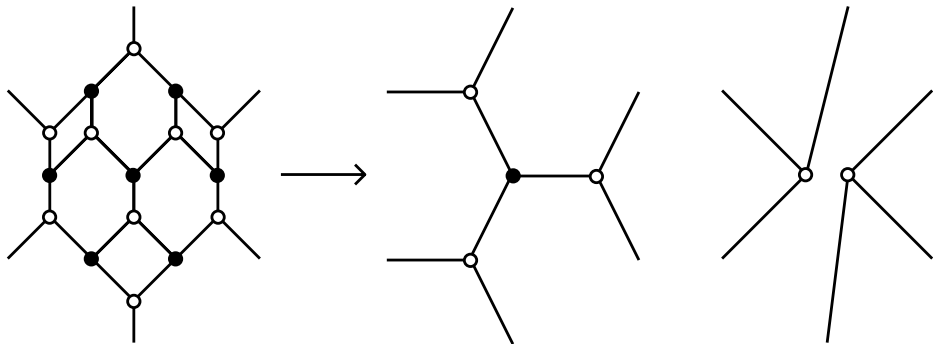
Nové redukovateľné konfigurácie



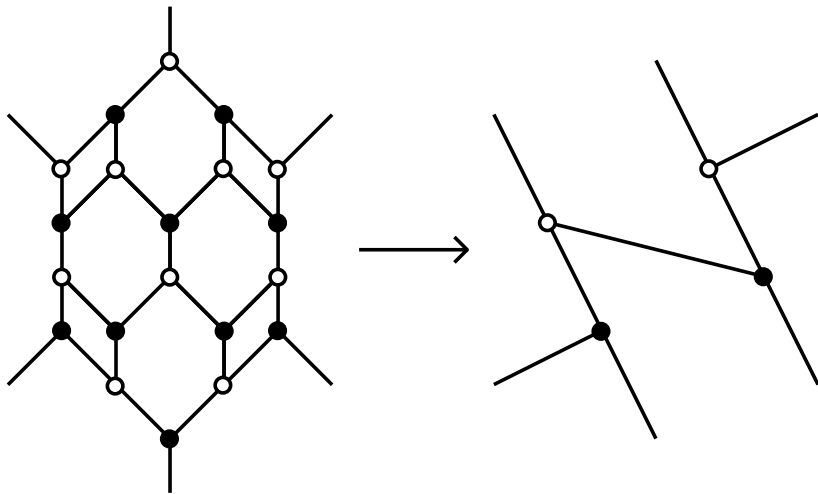
Nové redukovateľné konfigurácie



Nové redukovateľné konfigurácie



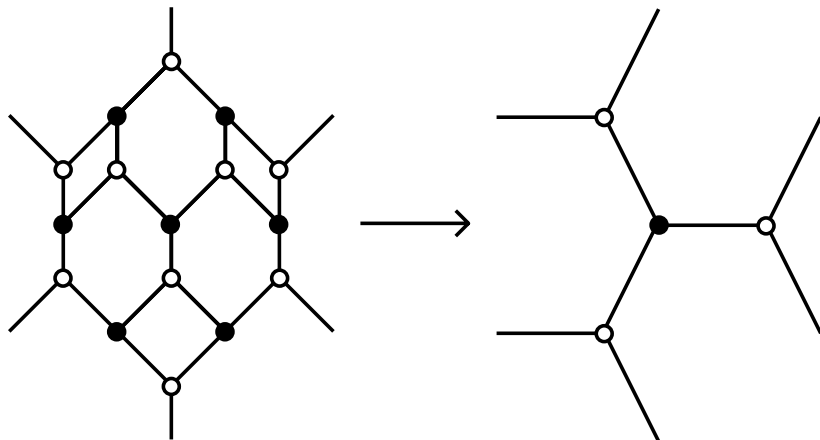
Nové redukovateľné konfigurácie



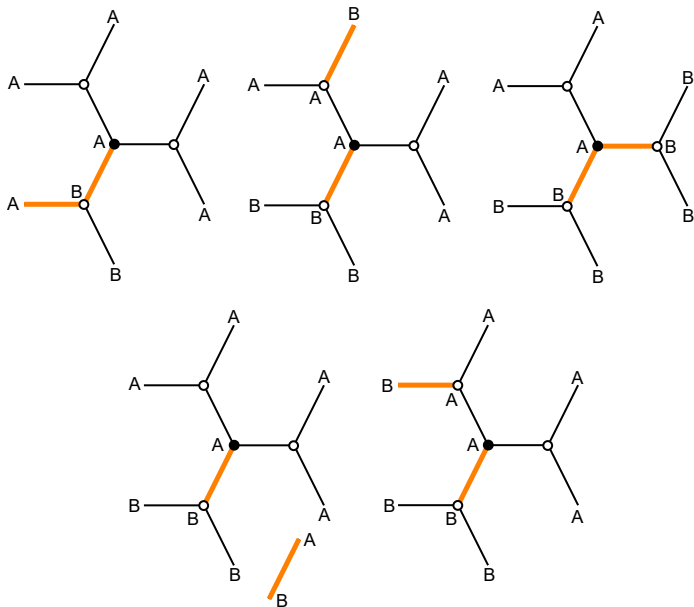
Nové 3-súvisle redukovateľné konfigurácie

- ▶ Dokázali sme, že tri redukovateľné konfigurácie sú zároveň aj 3-súvisle redukovateľnými
- ▶ Tieto konfigurácie sa nemôžu vyskytnúť v najmenšom protipríklade Barnettovej hypotézy

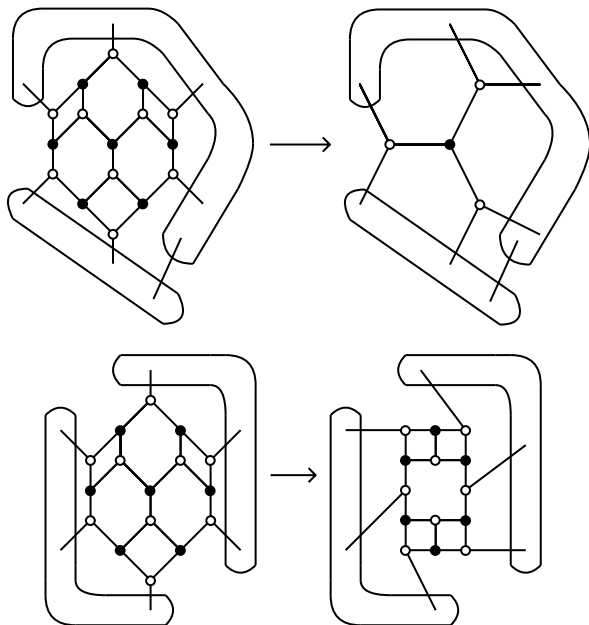
Nová 3-súvisle redukovateľná konfigurácia M_{464646}



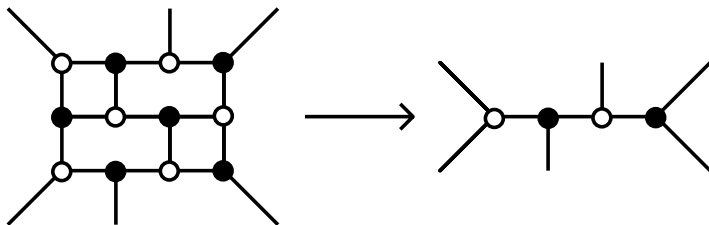
Nová 3-súvisle redukovateľná konfigurácia M_{464646}



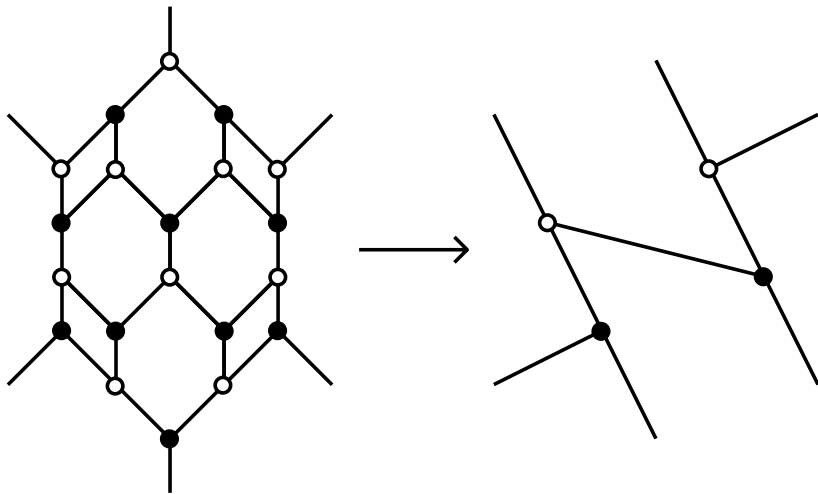
Nová 3-súvisle redukovateľná konfigurácia M_{464646}



Nová 3-súvisle redukovateľná konfigurácia M_{4664}



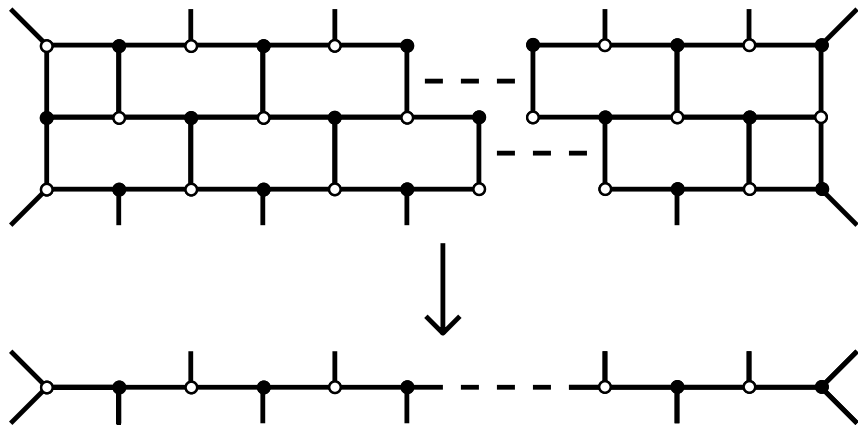
Nová 3-súvisle redukovateľná konfigurácia $M_{46464646}$



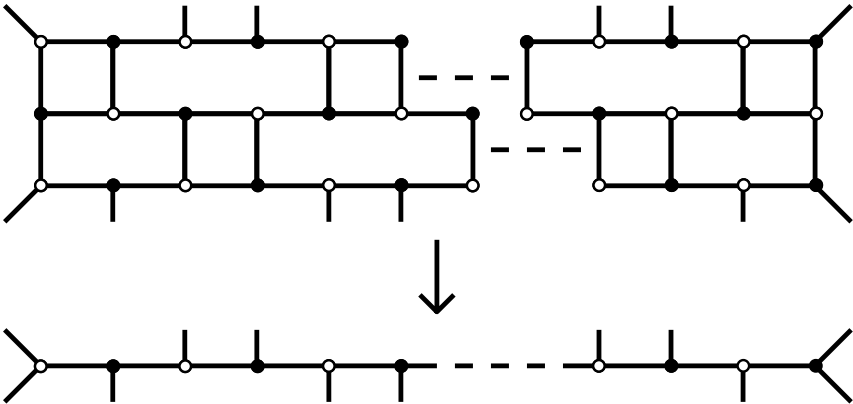
Nekonečné triedy redukovateľných konfigurácií

- ▶ B_{66} -konfigurácie
- ▶ B_{48} -konfigurácie
- ▶ B -konfigurácie

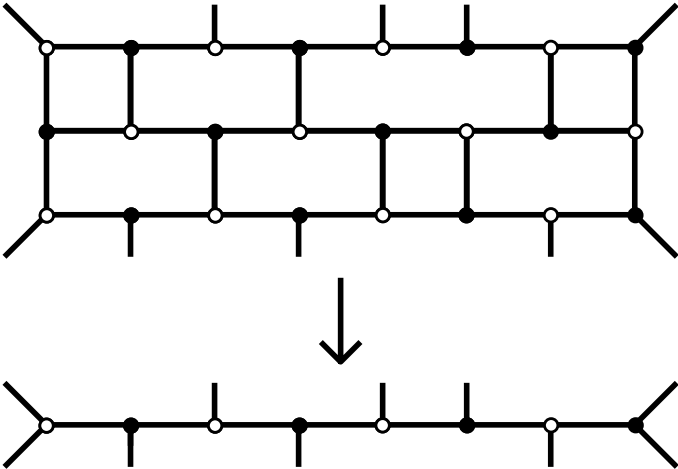
B_{66} -konfigurácie



B_{48} -konfigurácie



B-konfigurácie



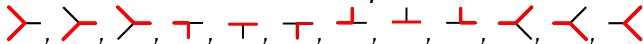
B-konfigurácie

Veta

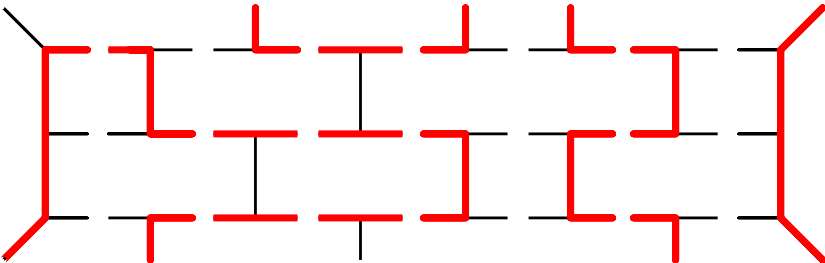
Každá B-konfigurácia je redukovateľná na svoj B-reduktor.

Dôkaz

- ▶ *Uvažujme ľubovoľnú Hamiltonovskú možnosť prechádzajúcu B-reduktorom*
- ▶ *Chceme zrekonštruovať rozšírenie tejto možnosti v B-konfigurácii*
- ▶ *Rozdelíme B-reduktor na niekoľko častí, každú z nich interpretujeme ako symbol*
- ▶ *Potom vieme B-reduktor zapísať ako slovo nad abecedou*



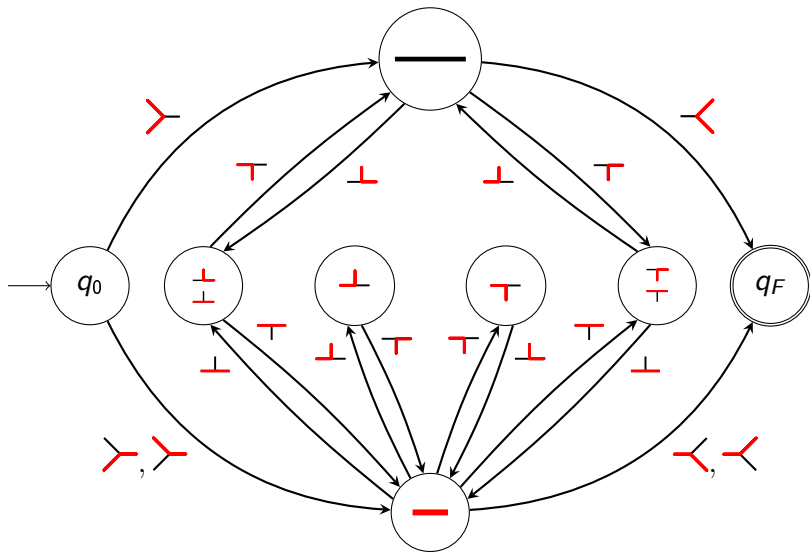
B-konfigurácie



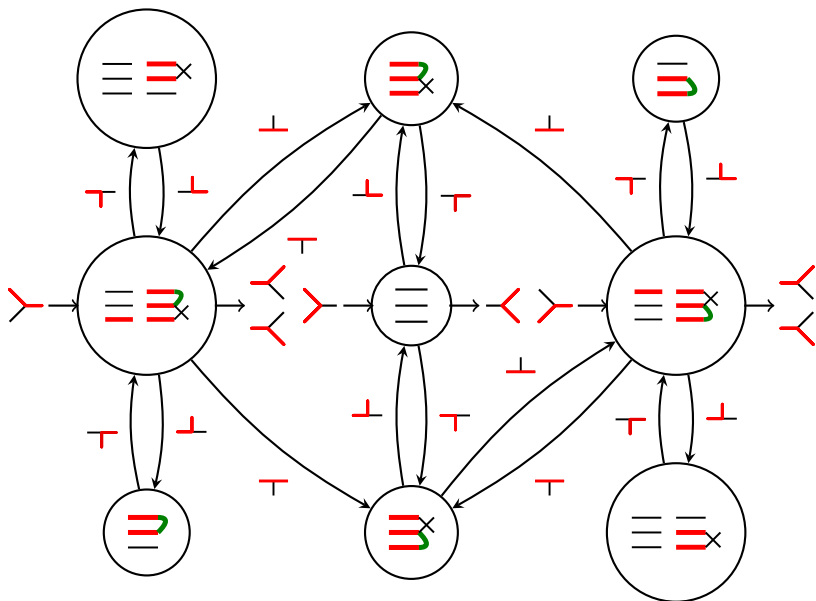
B-konfigurácie

- ▶ Skonstruujeme konečný automat A_R akceptujúci slová, ktoré zodpovedajú platným popisom *B*-reduktorov
- ▶ Skonstruujeme konečný automat A_G akceptujúci slová, ktoré zodpovedajú platným rekonštrukciám Hamiltonovskej možnosti v *B*-konfiguráciách
- ▶ Program overí platnosť inklúzie $L(A_R) \subseteq L(A_G)$

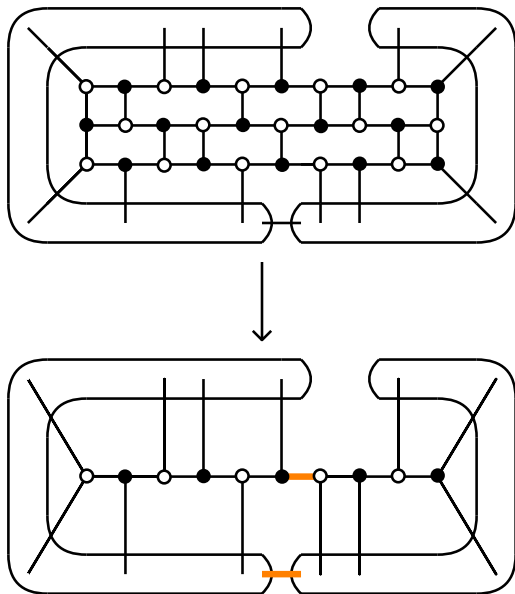
Konečný automat A_R pre reduktory



Konečný automat A_G pre konfigurácie



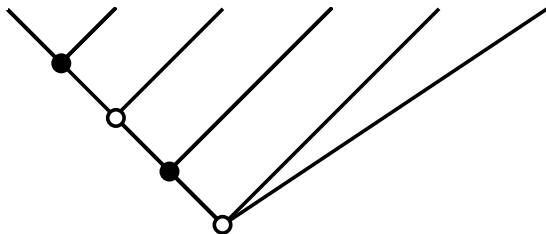
B-konfigurácie nie sú 3-súvisle redukovateľné



Stromové KBP-multipóly

Veta

Nech $M_T = (V, E, X)$ je stromový KBP-multipól, ktorý má p polhrán. Potom platí, že počet možností, akými môže Hamiltonovská kružnica prechádzať M_T , je nanajvýš F_{p+1} .



Ciele práce

- ▶ Študovanie vlastností konfigurácií malých stien v bipartitných kubických planárnych grafoch
- ▶ Klasifikácia konfigurácií na redukovateľné a neredukovateľné s využitím počítačového programu
- ▶ Efektívne prehľadávanie priestoru potenciálnych riešení

Všetky ciele práce boli splnené.

Ďakujem za pozornosť

Otázka

V práci (kapitole 3.2) je uvedená nová nekonečná trieda redukovateľných konfigurácií. Bolo testované, či tieto konfigurácie neobsahujú menšie redukovateľné konfigurácie?

- ▶ Overili sme, že B_{66} -konfigurácia s jednou dvojicou stien veľkosti 6 neobsahuje menšie redukovateľné konfigurácie
- ▶ Overili sme, že B_{48} -konfigurácia s jednou dvojicou stien veľkosti 4 a 8 neobsahuje menšie redukovateľné konfigurácie
- ▶ Väčšie konfigurácie neboli testované

