

Konštrukcia snarkov pomocou superpozície

9.6.2022

Bc. Júlia Froncová

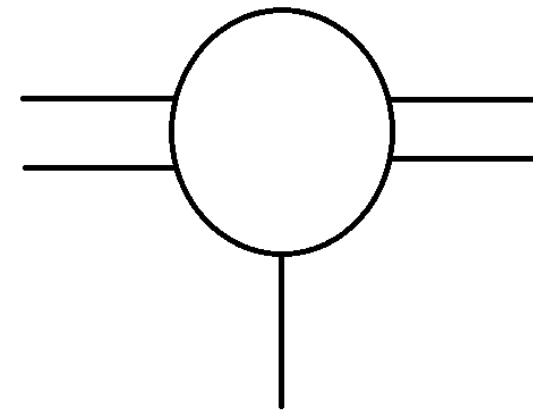
doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Motivácia

- **Snark** – kubický graf, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný
- Hľadanie snarkov – protipríklady na hypotézy
- Nadväznosť na článok *Superposition of snarks revisited*

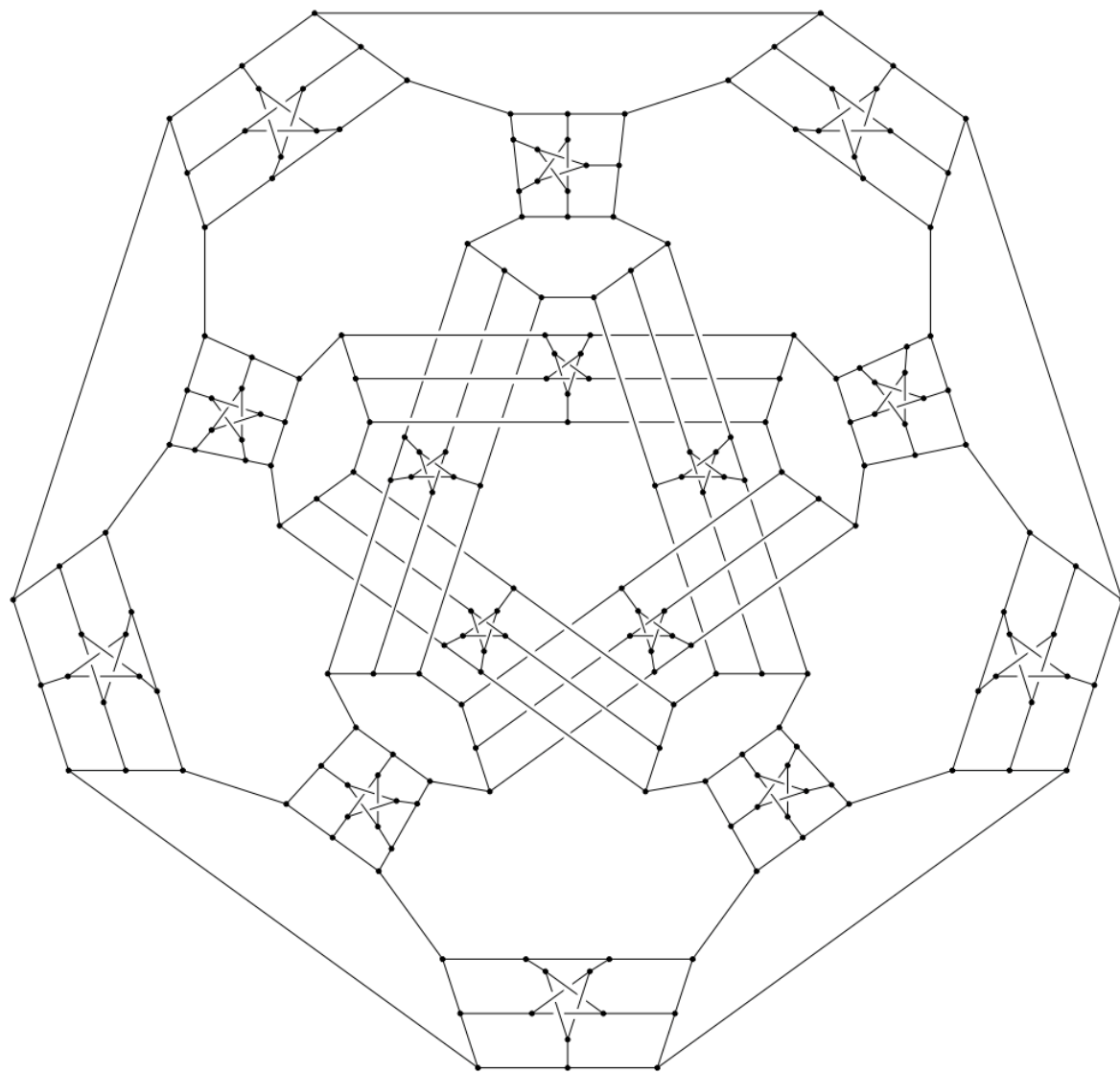
Pojmy

- **Obvod (Girth)** - dĺžka najkratšieho cyklu obsiahnutého v grafe
- **Polhrana** – koniec hrany, ktorý nie je incidentný so žiadnym vrcholom
- **Multipól** – grafovité štruktúra s polhranami



Superpozícia

- **Superhrana**
- **Supervrchol**
- **Superpozícia** nahradí hrany a vrcholy pôvodného grafu G , ktorý je snark, superhranami a supervrcholmi a pospája ich tak, aby bol zachovaný tvar pôvodného grafu a aby nový graf bol opäť kubický
- Cieľ superpozície – novovytvorený graf bude opäť snark



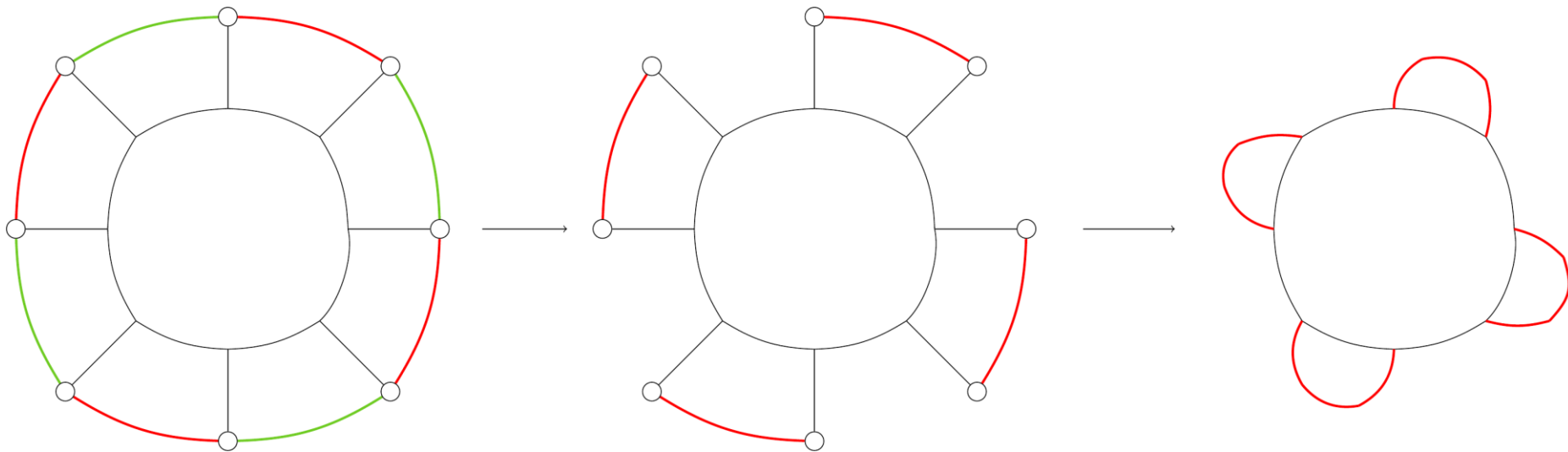
Descartov snark

Dvojitá superpozícia

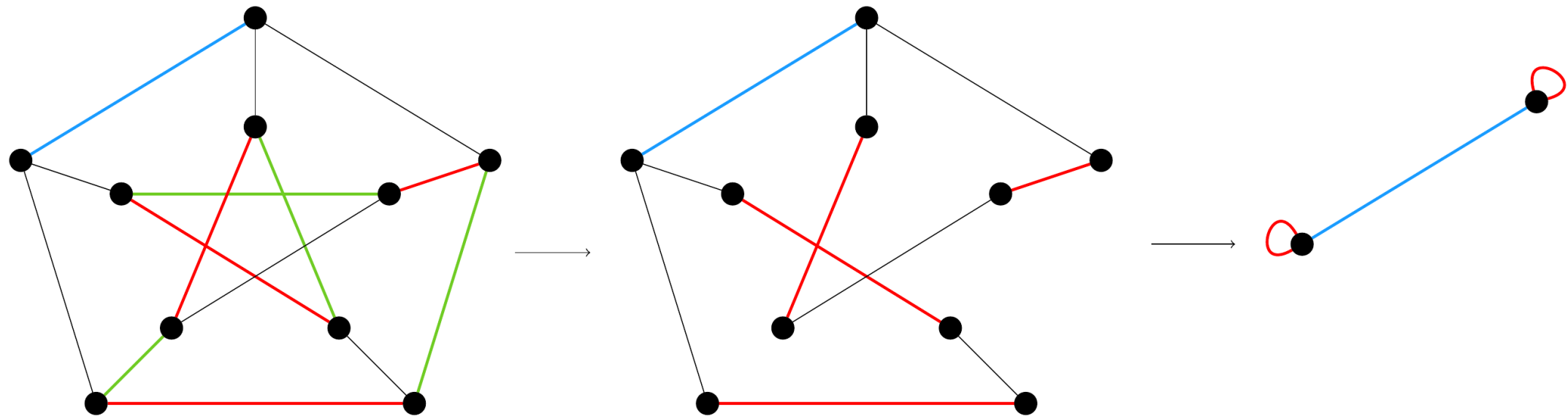
- Nevyžadujeme, aby bol pôvodný graf nezafarbiteľný, ale aby boli nezafarbiteľné dva grafy odvodené z pôvodného

Rozpustná kružnica

- Rozpustenie párnej kružnice C na grafy G_1 a G_2



- Párna kružnica C v grafe G s vlastnosťou, že odvodené grafy G_1 a G_2 sú kubické a nezafarbiteľné, sa nazýva rozpustná



Dvojitá superpozícia negátorom

- Nájdeme rozpustnú kružnicu C
- Nahradíme vrcholy C supervrcholmi – negátormi
- Výsledný graf je snark

Cieľ práce

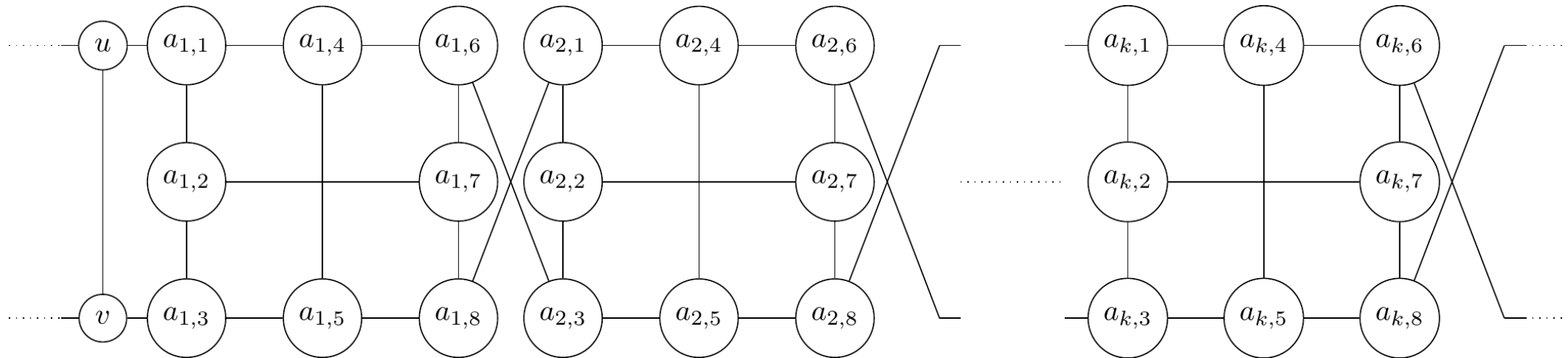
- Hľadanie rozpustných kružníc
- Dve stránky
 - Program – hľadá párne cykly a overuje rozpustnosť
 - Teoretický výskum

Hľadanie rozpustných kružníc

- Všetky kubické grafy do 16 vrcholov
- Permutačné snarky
 - Majú $2n$ vrcholov
 - Dve disjunktné kružnice dĺžky n , ktoré sú poprepájané tak, aby výsledný graf bol kubický
 - Napr. Petersenov graf
- Vstupy: 32 grafov do 42 vrcholov
 - Je ich veľa

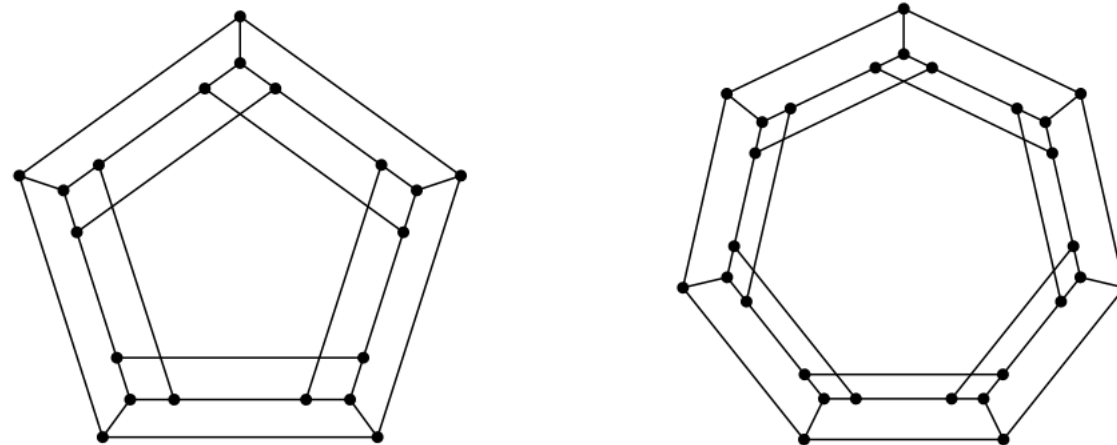
Blanuša snarky

- Vstupy: 4 grafy do 42 vrcholov
 - Typ kružnice, ktorá sa opakuje v celej Blanuša triede



Isacsove (Flower) snarky

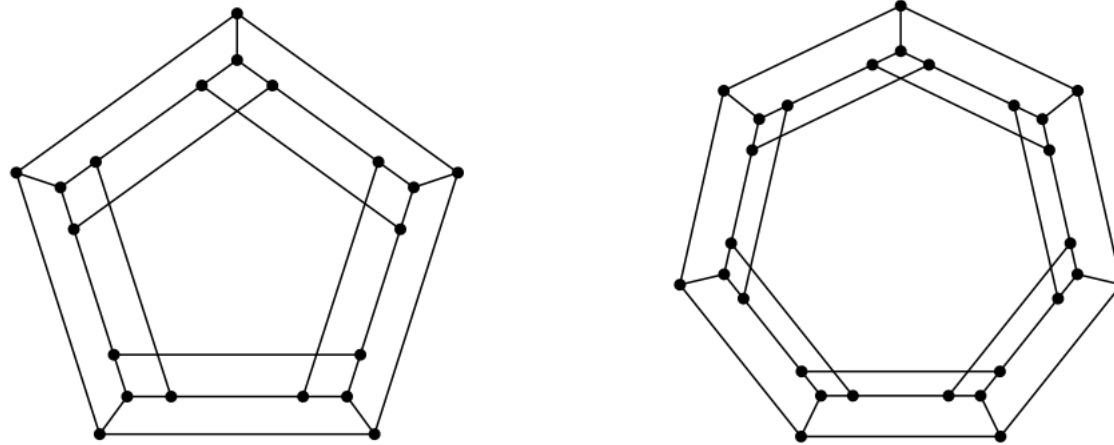
- J_n - kubický graf na $4n$ vrcholech
- n je nepárne



Isaacsove snarky J_5 a J_7

Isacsove (Flower) snarky

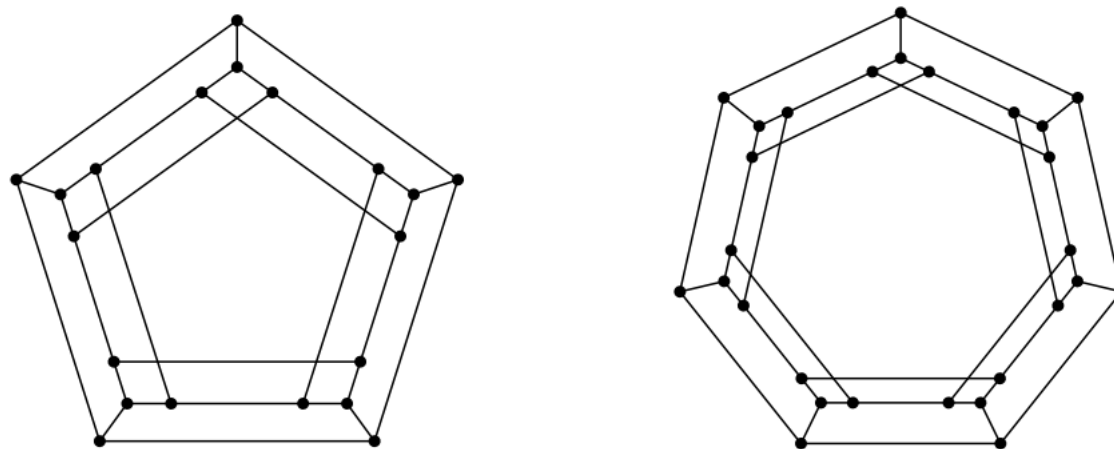
- všetky rozpustné kružnice sú dĺžky $n-2$ alebo $n-4$
- vždy presne $1/3$ kružníc dĺžky $n-4$ je rozpustná
- vždy presne $3/5$ kružníc dĺžky $n-2$ sú rozpustné



Isaacsove snarky J_5 a J_7

Isacsove (Flower) snarky

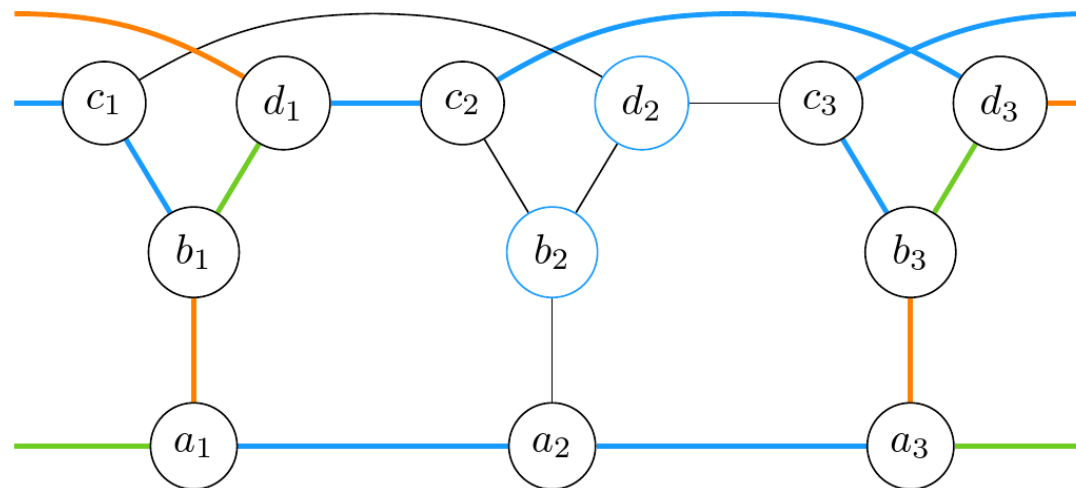
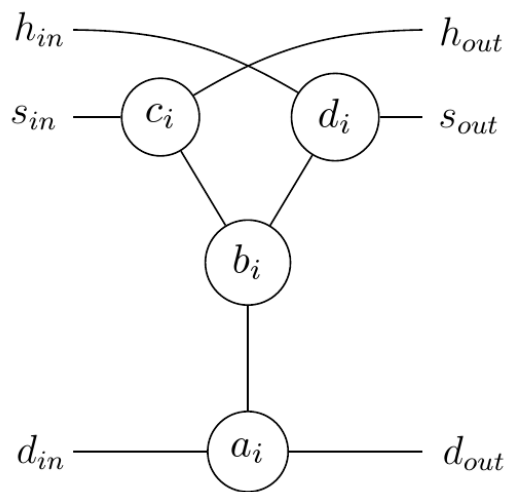
- Zákonitost rozpustnosti kružnic délky $n-2$
 - Rozpustné – vrcholy chýbajúce v kružnici sú susedné
 - Nerozpustné – vrcholy chýbajúce v kružnici sú vo vzdialenosti 3



Isaacsove snarky J_5 a J_7

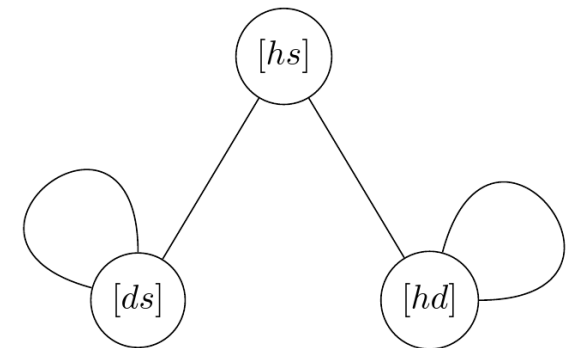
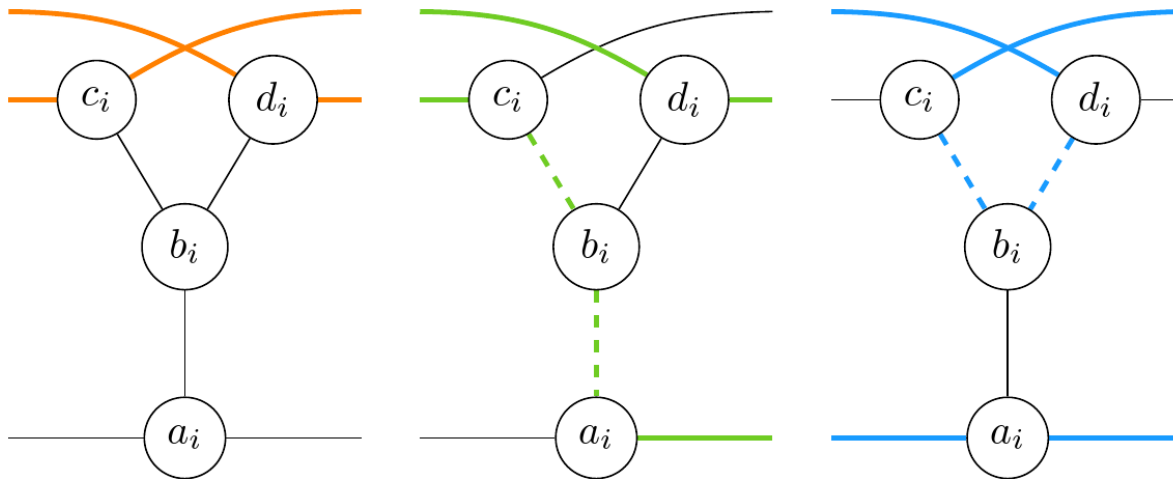
Isacsove (Flower) snarky

- **Tvrdenie:** Všetky kružnice dĺžky $n-2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.



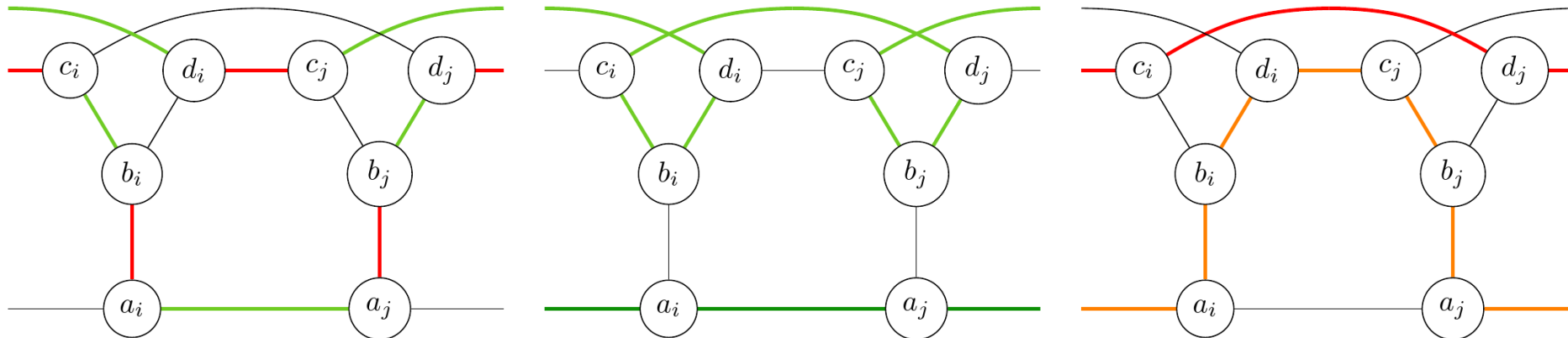
Isacsove (Flower) snarky

- **Tvrdenie:** Všetky kružnice dĺžky $n-2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.



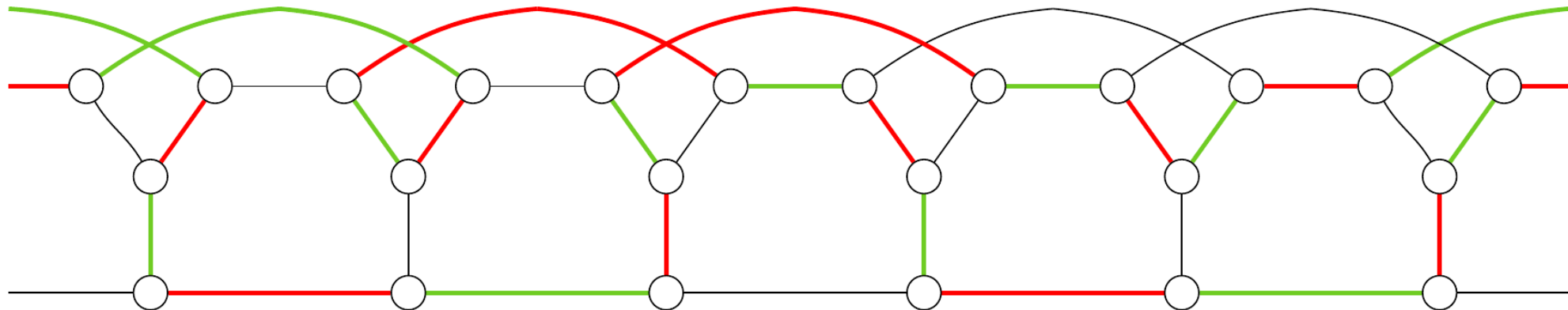
Isacsove (Flower) snarky

- **Tvrdenie:** Všetky kružnice dĺžky $n-2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.



Isacsove (Flower) snarky

- **Tvrdenie:** Všetky kružnice dĺžky $n-2$ v Isaacsových snarkoch, pre ktoré platí, že ich chýbajúce vrcholy sú susedné, sú rozpustné.



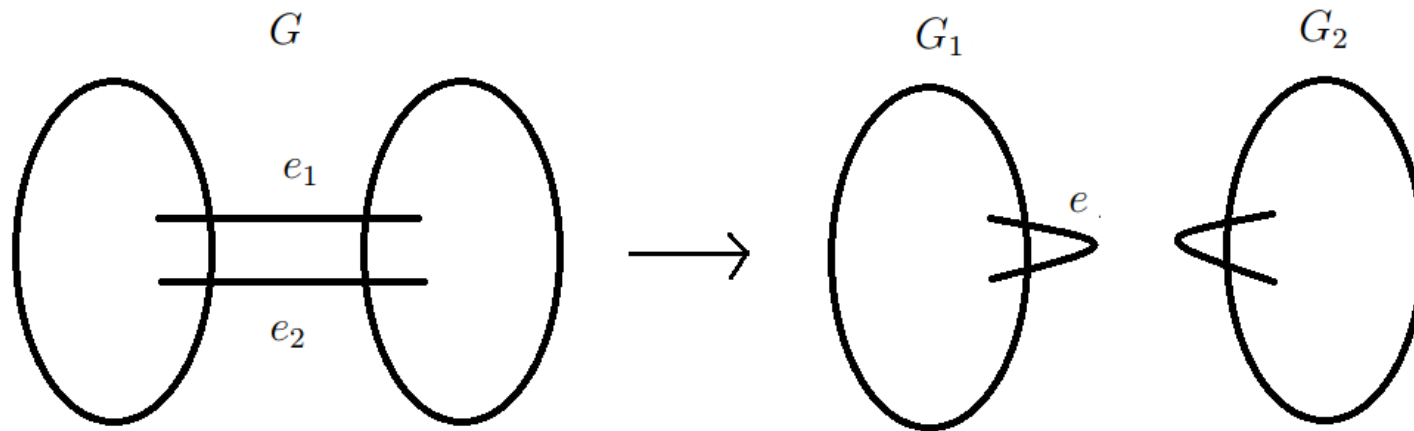
Hľadanie rozpustných kružníc

- Zbierka kandidátov na protipríklady
 - Väčšie snarky do 102 vrcholov
 - aspoň nejaká rozpustná kružnica

Hypotéza: Každý snark obsahuje rozpustnou kružnicu.

Dvojrezy

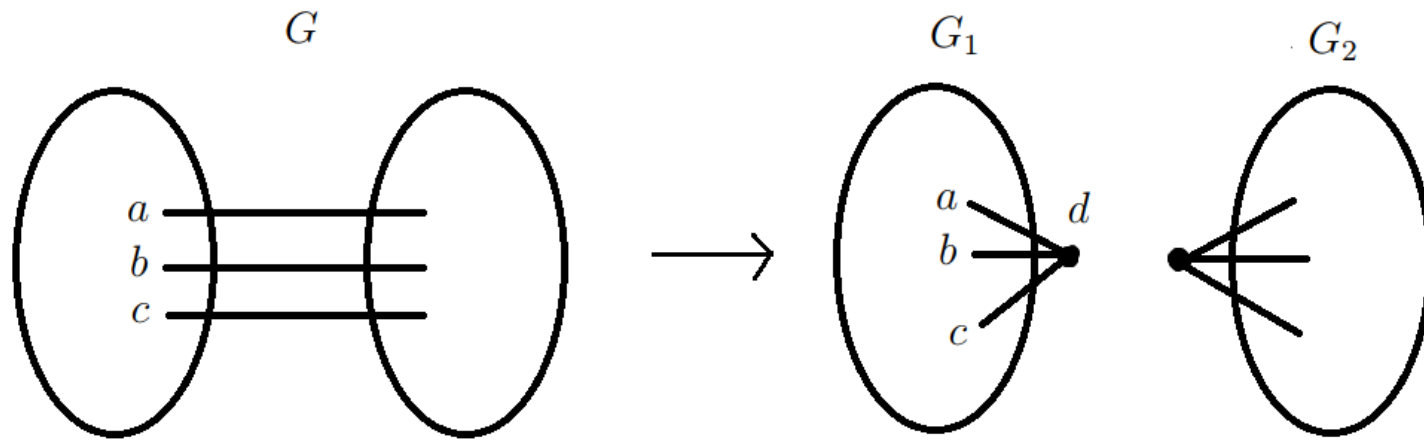
- G je snark vtedy a len vtedy ak G_1 alebo G_2 je snark.



- Najmenší protipríklad pre hypotézu nemá 2-rez.

Trojrezy

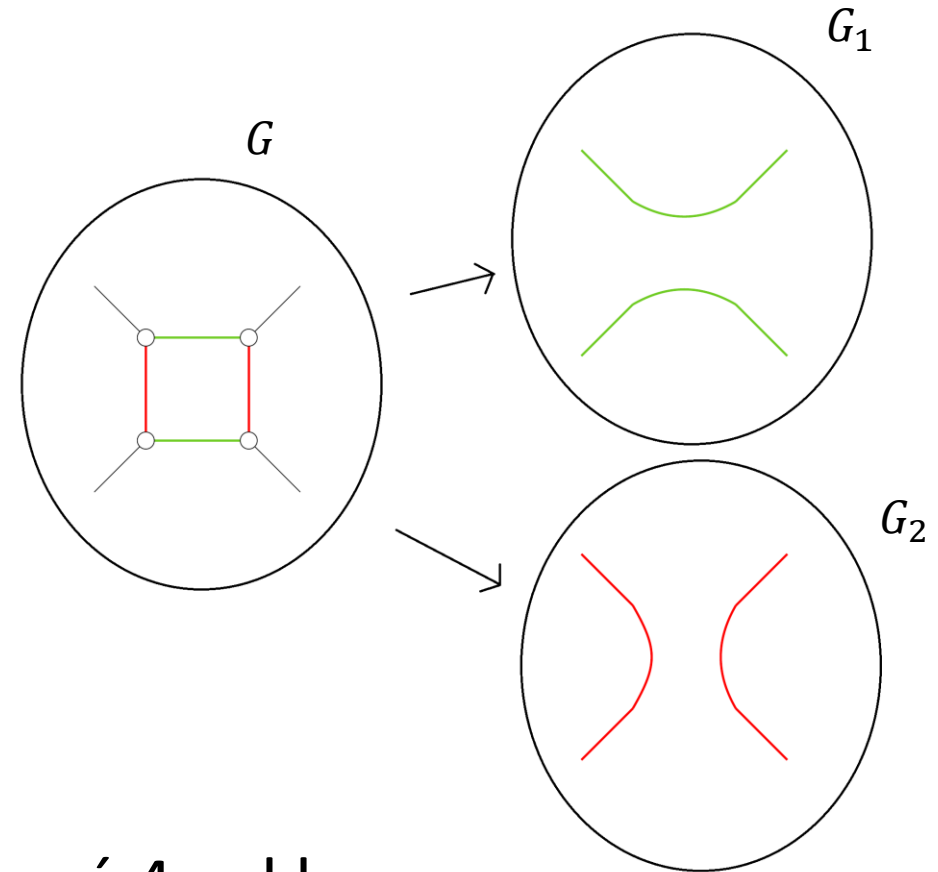
- G je snark vtedy a len vtedy ak G_1 alebo G_2 je snark.



- Najmenší protipríklad pre hypotézu nemá 3-rez.

Štvorce

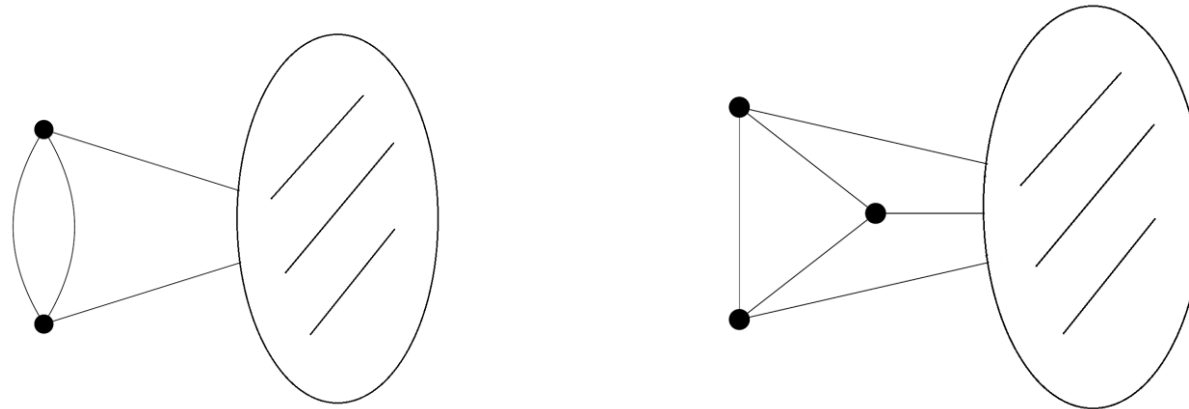
- Ak G je snark, tak G_1 aj G_2 sú snarky.



- Najmenší protipríklad pre hypotézu nemá 4-cykly.

Obvody menšie ako 4

- Z prítomnosti dvojhrany a trojuholníka vyplýva prítomnosť 2-rezu a 3-rezu



- Najmenší protipríklad pre hypotézu má obvod >4

Hypotéza

- Najmenší protipříklad nemůže obsahovat 2-rezy, ani 3-rezy a musí mít obvod aspoň 5.
- Overené programom na všetkých netriviálnych snarkoch do 36 vrcholov (vrátane) s obvodom >4 .

Možnosti ďalšej práce

- Nahliadnuť permutačné snarky
- Nahliadnuť snarky s nepárnoťou (oddness) 2 – skoro zafarbiteľné snarky
- Nahliadnuť snarky s veľkými obvodmi (aspoň 7)

Ďakujem za pozornosť