AKO NA KVANTIFIKOVANE VYROKY

1. Snazime sa vyuzivat dokaz sporom

2. Pouzivame pravidla specifikacie a generalizacie

3. Pametame na ludovu mudrost “neni vsetko spor”, co sa blysti” a snazime sa vopred odhadovat, ci dany vyrok bude tautologiou alebo nie.

Pri **dokaze sporom** predpokladame negaciu toho co chceme dokazat. Pouzivanim 2 a 3 sa snazime upravit formulu do tvaru v ktorom je spor evidentny, najcastejsie $A \wedge \neg A$.
Pravidla **specifikacie a generalizacie** vacsina homo sapiens pouziva automaticky a teda by vas nemali prekvapit. Formalne, pravidla zneju nasledovne:

- Specifikacia: z vyroku $\forall x A(x)$ odvod vyrok $A(z)$, kde z je lubovolna premenna alebo konstanta.

- Generalizacia: z vyroku $\exists x A(x)$ odvod vyrok $A(x_1)$, kde x_1 je premenna ktora sa **este nikde v dokaze nevyskytla**

  Rada do zivota: vzdy sa snazte najprv generalizovat a az potom specifikovat. Casto sa tak vyhnete trapnym pocitom bezradnosti.

A TAKTO VYZERA PRAX: Skusme o nasledujucom vyroku rozhodnut, ci je to tautologia.

$$[\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))] \Rightarrow [(\exists x A(x)) \Rightarrow (\exists x B(x))]$$

Sporom, nech plati negacia, t.j.

$$[\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))] \wedge (\exists x A(x)) \wedge (\forall x \neg B(x))$$

Tento vyrok je zlozeny z troch $\wedge$-ovanych vyrokov, ktore platia aj samostatne ako tri nezavisle vyroky, co nam umoznuje generalizovat a specifikovat kazdy vyrok zvlast. Podme teda na to. Na druhy vyrok pouzijeme pravidlo generalizacie, podla ktoreho plati $A(x_1)$. Zaroven specifikujeme 3. vyrok, teda

$\neg B(x_1)$. Nakoniec specifikujeme aj 1. vyrok, kde dostavame $A(x_1) \Rightarrow B(x_1)$. Tento vyrok je v priamom spore s predchadzajucimi zisteniami, podla ktorych $A(x_1) \wedge \neg B(x_1)$ (Ak by sme tento vyrok oznacili ako P vieme spor zapisat vo vytuzenom tvare $P \wedge \neg P$). $\square$

Venujme sa na chvilu opacnej implikacii, t.j.

$$[(\exists x A(x)) \Rightarrow (\exists x B(x))] \Rightarrow \forall x [A(x) \Rightarrow B(x)]$$

Opat negujme v snahe dokazat tento vyrok sporom.

$$[(\exists x A(x)) \Rightarrow (\exists x B(x))] \wedge [\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))]$$

Ak trochu pospecifikujeme a pogeneralizujeme, zistime, ze: $A(x_1) \wedge \neg B(x_1)$. Z prvej implikacie (lava strana je splnena) mame $B(x_2)$ (museli sme zaviest novu premennu, ktora sa este v dokaze nevyskytuje!). Tymto sme vycerpali moznosti specifikovania a generalizovania a mnozina vyrokov ktoru sme dostali nevyzera byt sporna. Je nacase pojat podozrenie, ze dokazovany vyrok neni tautologia. Netreba vsak plakat nad stratenym casom, zistene fakty nam pomozu skonstruovat kontrapriklad. Ten moze vyzerat napriklad takto: $A, B : \{maslo, chleba\} \rightarrow \{0, 1\}$, $A(maslo) = 1$, $A(chleba) = 0$, $B(maslo) = 0$, $B(chleba) = 1$. (rozmyslite si, ake jedlo prislucha premennym x_1 a x_2). Dosadenim do povodneho vyroku sa presvedcime, ze sme ozaj nasli kontrapriklad. $\square$

Na zaver este jeden priklad na precvicenie specifikacie a generalicacie. Dokazme

$$\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$$

Sporom, nech plati

$$\exists x \forall y A(x, y) \wedge \exists y \forall x \neg A(x, y)$$

Najprv sa pustime do existencnych kvantifikatorov. Po chvili generalizovania mame:

$$\forall y A(x_1, y) \wedge \forall x \neg A(x, y_1)$$

Teraz specifikujeme vseobecne kvantifikatory: $A(x_1, y_1) \wedge \neg A(x_1, y_1)$. Krajsie pocasie sme si uz snad ani nemohli priat. $\square$