V texte pri praci s relaciami pouzivame dve ekvivalentne oznacenia a to $(x, y) \in R$ a $xRy$.

**Ako pisat priklady na pisomke**

Netreba sa zlaknut dlzky rieseni. Vsetky priklady sa daju zmysluplne napisat na niekolko riadkov. Riesenia v tomto dokumente su dlsie z viacerych dovodov. Pouziva sa trosku pestrejsi jazyk, taktiez pre lepsiu citatelnost sa pouziva menej matematickych symbolov. Napriklad miesto

- Nech $x(AS)y$. Z definicie skladania relacii existuje $z$ take, ze $xAz$ a $zSy$. Z definicie inverzneho zobrazenia dostavame $zA^{-1}x$ a kedze $S$ je symetricka, vieme aj ze $ySz$. Potom vsak z definicie skladania relacii $y(SA^{-1})x$ a teda aj $yRx$.

je uplne vhodne napisat

- $x(AS)y \Rightarrow \exists z \; xAz \wedge zSy \Rightarrow zA^{-1}x \ldots$. Nad implikaciu pekne napiseme odvovodnenie (napr $S$ je sym.), ak sa nevmesti pomozeme si vetou. Taktiez mozeme efektivne vyuzivat viac smerov v rovine. sipky preto mozu smerovat z predpokladov do dosledkov bez prepisovania predpokladov.

**Priklad 1** *Nech $A$ je relacia a $S$ je symetricka relacia. Dokazte, ze relacia*

$$R = AS \cup SA^{-1}$$

*je symetricka. Dalej dokazte, ze $R$ je zaroven najmensia symetricka relacia obsahujuca $AS^{-1}$.*

*Riesenie.* Najprv dokazeme, ze $R$ je symetricka relacia. Nech $xRy$. Potom plati bud $x(AS)y$ alebo $x(SA^{-1})y$.

- Nech $x(AS)y$. Z definicie skladania relacii existuje $z$ take, ze $xAz$ a $zSy$. Z definicie inverzneho zobrazenia dostavame $zA^{-1}x$ a kedze $S$ je symetricka, vieme aj ze $ySz$. Potom vsak z definicie skladania relacii $y(SA^{-1})x$ a teda aj $yRx$.
- Nech $x(SA^{-1})y$. Z definicie skladania relacii existuje $z$ take, ze $xSz$ a $zA^{-1}y$. Z definicie inverzneho zobrazenia dostavame $yAz$ a kedze $S$ je symetricka, vieme aj ze $zSx$. Potom vsak z definicie skladania relacii $y(AS)x$ a teda aj $yRx$.

Tym sme dokazali, ze ak plati $xRy$ tak plati aj $yRx$ a teda $R$ je symetricka.

Dalej ukazeme ze $R$ je najmensia symetricka relacia obsahujuca $AS^{-1}$. Zacneme tym, ze $R$ obsahuje $AS^{-1}$. Kedze $S$ je symetricka $S^{-1} = S$. Kedze $R = AS \cup SA^{-1}$, $AS \subseteq R$ a teda aj $A^{-1}S \subseteq R$.

Pokracujeme dokazanim minimality $R$. Dokaz sporom. Nech existuje symetricka relacia $P$ taka, ze $(AS^{-1} =)AS \subseteq P \subsetneq R$. Z $P \subsetneq R$ mame ze existuje $x$ a $y$ take, ze neplati $xPy$ a plati $xRy$. Potom plati bud $x(AS)y$ alebo $x(SA^{-1})y$.

- Nech $x(AS)y$. Kedze $AS \subseteq P$ tak aj $xPy$. Spor.

- Nech $x(SA^{-1})y$. Z definicie skladania relacii existuje $z$ take, ze $xSz$ a $zA^{-1}y$. Z definicie inverzneho zobrazenia dostavame $yAz$ a kedze $S$ je symetricka, vieme aj ze $zSx$. Potom vsak z definicie skladania relacii $y(AS)x$. Kedze $AS \subseteq P$ tak aj $yPx$. Kedze $P$ je symetricka, plati aj $xPy$. Spor.

Tym je dokaz ukonceny. $\square$

*Poznamka.* Pokial neviete dokazat minimalitu je pekne ukazat aspon . symetrickost $R$

**Priklad 2** *Najdite nejaku najmensiu (co do poctu prvkov) relaciu $R$ taku ze pre nu sucastne plati*

- *$R$ je reflexivna*
- *$R$ je symetricka*
- *$R$ nie je relaciou ekvivalencie*

*Riesenie.* Nech $R \subseteq \{0, 1, 2\}^2$, $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$.

- $R$ je reflexivna - plati $0R0$, $1R1$ aj $2R2$
- $R$ je symetricka - ak plati $xRy$, plati aj $yRx$ (lahko mozno overit postupne pre vsetky prvky $R$).
- $R$ nie je tranzitivna - plati $0R1$ a $1R2$, ale neplati $0R2$. Preto $R$ nemoze byt relaciou ekvivalencie.
  Ukzeme ze zvolena relacia je minimalna. Lahko mozno vydiet, ze vsetky reflexivne a symetricke relacie na 0, 1 alebo 2 prvkoch su tranzitivne (je ich dokopy 4). Prvky $(x, x)$ musia byt vo vsetkych vhodnych relaciach. Pokial tam nie je nijaky iny prvok navyse relacia je identitou a teda je tranzitivna. Teda do tejto relacie musi patrit aj nejaky iny prvok $(x, y)$, $x \neq y$. Zo symetrickosti potom do relacie patri aj prvok $(y, x)$. Takato relacia je vsak stale tranzitivna: Nech $aRb$ a $bRc$. Tak bud $a = b$ alebo $a = x$, $b = y$ alebo $b = x$, $a = y$. Vo vsetkych pripadoch mozeme lahko overit, ze pre lubovolnu volbu $c$ bude platit aj $aRc$. Preto potrebujeme este jednu inu dvojicu $(z, w)$, $z \neq w$, $(z, w) \notin \{(x, y), (y, x)\}$. Potom vsak aj $(w, z)$ je v relacii A navyse je rozny od skorsie spomenutych prvkov. Tym sme ukazali pritomnost aspon 5 prvkov v $R$, preto nami zvolena $R$ je najmensia.

$\square$

*Poznamka.* Ked uz nevieme ktora je minimalna tak je vhodne aspon najst nejaku vhodnu relaciu. Taktiez je pekne ked je co najmensia, mozno bude minimalna a budu body navyse (aj ked bez dokazu nie moc).

**Priklad 3** *Zistite, ci je nasledujuci vyrok tautologia alebo kontradikcia.*

$$\forall x\ [a(x) \to (b(x) \to c(x))] \to [\forall x\ a(x) \to (\forall x\ b(x) \to \forall x\ c(x))]$$

*Riesenie.* Tvrdenie plati. Dokazeme sporom. Znegujeme vyrokovu formu.

$$\forall x\ [a(x) \to (b(x) \to c(x))] \wedge \forall x\ a(x) \wedge \forall x\ b(x) \wedge \exists x\ \neg c(x).$$

Existuje $x$ take, ze plati $\neg c(x)$. Nech je to $t$. co je spor s $\exists x\ \neg c(x)$. Kedze $\forall x\ [a(x) \to (b(x) \to c(x))]$, plati aj $a(t) \to (b(t) \to c(t))$. Kedze $\forall x\ a(x)$, plati aj $a(t)$. a teda plati aj $b(t) \to c(t)$. Kedze $\forall x\ b(x)$, plati aj $b(t)$, a kedze $b(t) \to c(t)$ plati aj $c(t)$. To je vsak v spore s platnostou $\neg c(t)$.

□

**Priklad 4** *Najdite bijektivne zobrazenie medzi mnozinou priamok v rovine a mnozinou bodov v rovine*

*Riesenie.* Najprv si uvedomime s akymi objektami pracujeme. Bod v rovine je jednoducho zobrazit dvojicou jeho suradnic $(x, y)$. Priamky ktore nie su rovnobezne s $y$-ovou osou mozno taktiez popisat dvojicou cisel $(k, l)$. Tejto dvojici priradime priamku $y = kx + l$. Priamky rovnobezne s $y$-ovou osou budeme reprezentovat jednym realnym cislom ($x$-ovou suradnicou). Staci nam teda najst bijekciu $f$ z $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Na vyriesenie tohoto problemu pouzijeme princip zlodeja. Realne cisla zobrazime na dvojice tvaru $(1, x)(= (2^0, x))$ tie zase na dvojice tvaru $(2, x)$ tie zese na dvojice tvaru $(2^2, x)$, atd. Definujme

$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & x \in \mathbb{R} \\ (2^{(k+1)}, y) & x = (2^k, y), k \in \mathbb{N}(vratane 0) \\ (y, z) & x = (y, z), y \neq 2^k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ukazeme, ze $f$ je bijekcia. Urobime to tak ze najdeme inverzne zobrazenie:

$$g((x, y)) = \begin{cases} y & x = 1 \\ (2^k, y) & x = 2^{k+1}, k \in \mathbb{N}(vratane 0) \\ (y, z) & x \neq 2^k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dosadenim a rozdelenim na pripady lahko ukazeme ze $f(g(x))$ aj $g(f(x))$ su identicke zobrazenia.

□

*Poznamka.* Ak sa uz nepodari najst bijekcia, k nejakym bodom mozu viest aj jednotlive injektivne zobrazenia.

**Priklad 5** *Zjednoduste kardinalne cislo* $\aleph_0^{\aleph_0^2} . \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}}$

*Poznamka.* Vypocty s mohutnostami na pisomke z cviceni este nebudu, takze tento priklad je tu skor ako pomocka pri priprave na skusku.

*Riesenie.* Pretoze $\left(a^b\right)^c = a^{b.c}$

$$\aleph_0^{\aleph_0} \times \left(2^{\aleph_0^2}\right)^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0^{\aleph_0^2}.2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}}.$$

Odhadneme tento vyraz:

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq \aleph_0^{\aleph_0^2}.2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} \leq 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}}.2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} \leq 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{\aleph_0}}$$

Postupne sme pri tom vyuzivali vztahy:

- Pre lubovolne kardinalne cislo $m$, $m < 2^m$.
- Pre nekonecne kardinalne cislo $m$ a konecne kardinalne cislo $k$, $m^k = m$.

□

*Poznamka.* V pripade ze priklad neviete vyriesit uplne, je vhodne skratit formulu pokial to ide.