Cvičenie 5

Príklad 5.1.1.

Máte mince s nominálmi $c_1, \ldots, c_K$ (t.j. z každého nominálu máte ľubovoľne veľa). Nájdite spôsob vydania sumy S pomocou najmenšieho počtu mincí.

Náčrt riešenia 5.1.1.

Dynamický podproblém $A[n]$ znie nasledovne: "*Aký je najmenší počet mincí, ktoré musím použiť, aby som vydal sumu n?*".

Príklad 5.1.2.

Máte N mincí s nominálmi $c_1, \ldots, c_N$ (niektoré nominály sa môžu opakovať). Nájdite spôsob vydania sumy S pomocou najmenšieho počtu mincí.

Náčrt riešenia 5.1.1.

Dynamický podproblém $A[n][k]$ znie nasledovne: "*Aký je najmenší počet mincí, ktoré musím použiť, aby som vydal sumu n, ak môžem používať len prvých k mincí (t.j. mince $c_1, \ldots, c_k$)?*".

Príklad 5.2.1.

Na vstupe máte pole celých kladných čísel. Vyberte si niekoľko z nich tak, aby žiadne dve čísla neboli susedné. Spomedzi viacerých možností si vyberte tú s maximálnym súčtom.

Náčrt riešenia 5.2.1.

Dynamický podproblém $A[n][1]$ znie následovne: "*Aký najväčší súčet viem dosiahnuť pomocou prvých n prvkov vstupného poľa, ak do riešenia **bude** patriť n-tý prvok?*", podproblém $A[n][0]$ nasledovne: "*Aký najväčší súčet viem dosiahnuť pomocou prvých n prvkov vstupného poľa, ak do riešenia **nebude** patriť n-tý prvok?*".

Príklad 5.2.2.

Na vstupe máte pole celých kladných čísel. Vyberte si niekoľko z nich tak, aby ich súčet bol deliteľný 13. Spomedzi viacerých možností si vyberte tú s maximálnym súčtom.

Náčrt riešenia 5.2.2.

Dynamický podproblém $A[n][k]$ znie následovne: "*Aký najväčší súčet so zvyškom k viem dosiahnuť pomocou prvých n prvkov vstupného poľa?*".

Príklad 5.2.3.

Na vstupe máte pole celých kladných čísel. Vyberte si niekoľko z nich tak, aby žiadne dve čísla neboli susedné a zároveň ich súčet bol deliteľný 13. Spomedzi viacerých možností si vyberte tú s maximálnym súčtom.

Náčrt riešenia 5.2.3.

Dynamický podproblém $A[n][k][1]$ znie následovne: "*Aký najväčší súčet so zvyškom k viem dosiahnuť pomocou prvých n prvkov vstupného poľa, ak do riešenia **bude** patriť n-tý prvok?*", podproblém $A[n][k][0]$ nasledovne: "*Aký najväčší súčet so zvyškom k viem dosiahnuť pomocou prvých n prvkov vstupného poľa, ak do riešenia **nebude** patriť n-tý prvok?*".

Príklad 5.3.

Majme funkciu $p(x)$, ktorá vracia počet 1 v binárnom zápise čísla x. Je jasné, že keď budeme túto operáciu opakovať, časom dostaneme hodnotu 1, na ktorej sa výsledok ustáli. Našou úlohou je zistiť počet takých čísel z intervalu $[l, r)$ ($l \leq r \leq 10^{18}$), ktoré sa prvýkrát zobrazia na 1 po práve k volaniach funkcie $p(\cdot)$.

Náčrt riešenia 5.3.

Ako prvé si uvedomme, že namiesto toho, aby sme našu úlohu riešili pre interval $< l, r >$, budeme ju riešiť pre interval $< 1, r >$. Pôvodný problém totiž vieme vyriešiť pomocou otázky $< 1, r >$ a $< 1, l-1 >$. Naviac sme si to celé zjednodušili, pretože máme iba jedno obmedzenie.

Následne sa pozrime na to, čo sa stane, keď na nejaké číslo použijeme funkciu $p()$. Keďže zadané číslo je nanajvýš 10^{18}, po prvom použití dostaneme číslo menšie ako 64. To je pomerne malé, pre tieto hodnoty si to vieme dopredu predpočítať.

O každom čísle do 64 teda vieme, koľkokrát musíme použiť funkciu $p()$, aby sme dostali číslo 1. Ak teda chceme vedieť, ktoré čísla sa zmenšia na 1 po k použití funkcie, tak tieto čísla sa musia zmenšiť po prvom použití na tie čísla z intervalu 1 až 64, ktoré potrebujú $k-1$ použití. To nám však vraví, koľko jednotiek v binárnom zápise museli mať tieto pôvodné čísla. Ak máme napríklad $k = 4$, tak v intervale 1 až 64 nájdeme všetky čísla, ktoré sa zmenšia na 1 na 3 kroky (7, 19, ...) a vieme teda, že hľadáme také čísla menšie ako r, ktoré obsahujú 7 jednotiek alebo 19 jednotiek ... Týchto možností je ale najviac 64, môžeme ich teda vyskúšať všetky.

Celá úloha sa nám teda zmenila na nasledovný problém: Koľko čísel menších alebo rovných ako r obsahuje q jednotkových bitov.

Riešime teda túto druhú úlohu. Pozrime sa na číslo r v binárnom zápise. Na prvom mieste tohto zápisu je určite 1 (najvýznamnejšia cifra), môžeme teda vyskúšať obe možnosti toho, ako môže vyzerať naše číslo, ktoré je nanajvýš tak veľké a má q jednotiek. Ak na jeho prvú pozíciu dáme hodnotu 0, tak sme určite dostali číslo menšie ako r, našich q jednotiek teda môžeme rozdeliť ľubovoľným spôsobom medzi zvyšné cifry (nech ich je s), čo je $\binom{s}{q}$ možností.

A ak na prvú pozíciu dáme 1, tak sa musíme pozerať ďalej. Nie sme si totiž ešte istý, či dostaneme číslo menšie ako r. Pokračujeme teda na ďalšiu cifru čísla r a rozhodujeme sa rovnakým spôsobom. Uvedomme si naviac, že ak je bit čísla r 0, tak na výber nemáme, musíme aj my použiť hodnotu 0, musíme byť totiž menší ako r. A pri bite 1 máme na výber.

Príklad 5.4.

Máte zadanú postupnosť celých čísel dĺžky n. Nájdite najdlhšiu rastúcu podpostupnosť.

Náčrt riešenia 5.4.

Navrhnúť jednoduché dynamické programovanie je jednoduché – pre každú pozíciu spočítame dĺžku najdlhšej rastúcej postupnosti končiace hodnotou na danej pozícii. K tomu však potrebujeme pozrieť všetky predchádzajúce pozície aby sme vedeli, k akej najdlhšej podpostupnosti vieme nové číslo pridať, čím dostaneme $O(n^2)$ riešenie.

Zlepšiť to vieme dvoma spôsobmi. Prvý použije intervalový strom, kde si pre každú hodnotu postupnosti pamätáme dĺžku najdlhšej podpostupnosti končiacej daným číslom. Toto vyžaduje kompresiu súradníc ak sú čísla na vstupe veľmi veľké.

Druhá možnosť je pamätať si pre každú dĺžku podpostupnosti najmenšiu hodnotu, ktorou vie daná podpostupnosť končiť. Môžeme si uvedomiť, že tieto hodnoty musia rásť, vieme teda na nich binárne vyhľadávať.

Príklad 5.5.

Máme zadaný strom, v ktorom je červenou farbou vyznačených niekoľko vrcholov. Vašou úlohou je zakrúžkovať čo najmenší počet vrcholov tak, aby cesta medzi ľubovoľnými dvoma červenými vrcholmi obsahovala aspoň jeden zakrúžkovaný vrchol (je podstačujúce ak je zakrúžkovaný jeden z koncov tejto cesty).

Náčrt riešenia 5.5.

Zakoreňme si náš strom za ľubovoľný vrchol. Pre každý podstrom chceme zistiť dva typy informácií:

- najmenší počet zakrúžkovaných vrcholov, tak aby neexistovala nezakrúžkovaná cesta medzi dvoma červenými vrcholmi a tiež medzi červeným vrcholom a koreňom
- najmenší počet zakrúžkovaných vrcholov, tak aby neexistovala nezakrúžkovaná cesta medzi dvoma červenými vrcholmi a aby existovala najviac jedna nezakrúžkovaná cesta medzi červeným vrcholom a koreňom

Rozmyslite si, ako vieme tieto dve hodnoty počítať vďaka hodnotám rekurzívne spočítaným pre podstromy.