

Pokyny

Písomka sa skladá z troch úloh, na ktorých riešenie máte 135 minút a viete za ne získať 35 bodov.

V úlohách 1 a 2 očakávame slovný popis ich riešenia. Tento popis by mal obsahovať hlavnú myšlienku riešenia, **odôvodnenie správnosti** a odhad časovej zložitosti.

Za riešenia je možné získavať aj čiastkové body a to buď za menej efektívne riešenia, alebo myšlienky smerujúce k správne riešeniu. Váš popis môže obsahovať viacero rôzne efektívnych riešení, body budú v takom prípade udelené za najlepšie správne riešenie.

Počas písomky je **zakázané používať** akékoľvek písomné materiály či elektroniku. Písomka je closed-book, k dispozícii máte len papier a písacie potreby.

Odovzdávanie: Riešenie každej úlohy píšete na **samostatný papier**, riešenia sa budú zbierať po úlohách. Na každý papier svojho riešenia napíšete **svoje meno, kód pod ktorým budú zverejnené vaše výsledky a číslo úlohy**. Ak má riešenie niektorej úlohy viac ako jeden papier, je veľmi vhodné ich očíslovať.

Kód na zverejnenie slúži na anonymizáciu verejných výsledkov. Vyberte si niečo rozumne dlhé (rádovo 5-8 znakov), unikátne a čo si zapamätáte.

Ak sa rozhodnete niektorú úlohu neriešiť, odovzdajte papier s vaším menom, číslom tejto úlohy a textom *NERIEŠIM*.

1. Na rozmýšľanie (12 bodov)

Cez les tečie rieka dlhá n kilometrov, pričom tečie smerom od kilometra 0 po kilometer n . Navrhните algoritmus, ktorý bude efektívne spracovávať tieto tri udalosti:

- Na x -tom kilometri rieky sa otvorila píla.
- Píla na x -tom kilometri sa zatvorila. Môžete predpokladať, že zatvoriť sa môže iba píla, ktorá bola predtým otvorená.
- Na kilometri x sa na rieku spustil náklad dreva. Zistite, ktorá píla toto drevo zachytí a spracuje. Drevo zachytí prvá otvorená píla nižšie po prúde rieky. Hľadáte teda také y , pre ktoré platí, že $y > x$ a na kilometri y je práve otvorená píla.

Môžete predpokladať, že počas plavby dreva sa žiadne píly neotvoria ani nezatvoria. Až potom ako zistíte, kde sa drevo spracuje, môžu nastať ďalšie udalosti.

Vaše riešenie bude hodnotené primárne na základe správnosti a sekundárne podľa efektívnosti. Aj menej efektívne riešenia vedia získať čiastočné body.

2. Na teoretické vedomosti (18 bodov)

- (8 bodov) Podrobne popíšte ako funguje Dijkstrov algoritmus. Plných 8 bodov viete získať za popis algoritmu so zložitou $O(m \log m)$, 5 bodov za popis algoritmu so zložitou $O(n^2)$.
- (3 body) Vysvetlite, prečo nemôžeme použiť Dijkstrov algoritmus na grafoch, ktoré obsahujú záporné hrany.
- (7 bodov) Máme zadaný ováňovaný graf G . Každá hrana má priradenú kladnú dĺžku a jednu z dvoch farieb, modrú alebo červenú. Popíšte algoritmus, ktorý nájde najkratší sled (vrcholy v ňom sa môžu opakovať) z vrchola a do vrcholu b , na ktorom sa striedajú farby hrán. Takýto sled teda nemôže obsahovať dve červené alebo dve modré hrany, ktoré idú hneď po sebe.

3. Na programovanie (5 bodov)

Napíšte implementáciu **jednej** z nasledovných dvoch funkcií. Vybrať si môžete ľubovoľnú z týchto dvoch možností, plný počet bodov dostanete za správne vyriešenie ľubovoľnej z nich.

- funkcia `umocni(a, b, m)`, ktorá efektívne vypočíta hodnotu $a^b \pmod m$
- funkcia `rovnaka_polrovina(A, B, C, D)`. Premenné A, B, C, D reprezentujú body v rovine ako dvojicu (pair alebo tuple) x -ovej a y -ovej súradnice. Funkcia zisťuje, či sa body C a D nachádzajú v rovnakej polrovine určenej priamkou medzi bodmi A a B .

Implementácia by mala byť napísaná na papieri vo vami zvolenom jazyku (preferovane C++ alebo Python). Implementácia **nemôže využívať funkcie** jazykov určené na umocňovanie alebo geometrické výpočty (napr. funkciu `pow()` alebo `**`).

Pri hodnotení nebudeme pozeráť na drobné preklepy (napr. chýbajúca bodkočiarka), sústrediť sa budeme najmä na použité výpočty a efektívnosť riešenia.