Pokyny

Písomka sa skladá zo štyroch (a bonusovej záverečnej) úloh, za ktoré viete získať dokopy 80 bodov.

Pri každej úlohe (ak nie je napísané inak) očakávam slovný popis jej riešenia. Tento popis by sa mal zamerať na hlavnú myšlienku riešenia, **odôvodnenie správnosti** a mal by obsahovať odhad časovej zložitosti.

Za riešenia je možné získavať aj čiastkové body a to buď za menej efektívne riešenia, alebo myšlienky smerujúce k správnemu riešeniu. Váš popis navyše môže obsahovať viacero rôzne efektívnych riešení, pričom body sa udeľujú za najlepšie správne riešenie. Ak si nie ste istý správnosťou vašeho riešenia, je **odporúčané** popísať aj pomalšie správne riešenie, aby ste v najhoršom prípade získali body aspoň zaň.

Ak používate algoritmus alebo postup priamo z prednášky, nemusíte ho bližšie popisovať, zamerajte sa na to, ako ho upravujete, poprípade aplikujete.

Počas písomky je **zakázané používať** akékoľvek písomné materiály či elektroniku. Písomka je closed-book, k dispozícii máte len papier a písacie potreby.

Odovzdávanie: Riešenie každej úlohy píšte na **samostatný papier**, riešenia sa budú zbierať po úlohách. Na každý papier svojho riešenia napíšte **svoje meno a číslo úlohy**, ak má riešenie niektorého príkladu viac ako jeden papier, je veľmi vhodné ich očíslovať.

Ak sa rozhodnete niektorú úlohu neriešiť, odovzdajte papier s vaším menom, číslom tejto úlohy a textom *NERIEŠIM.*

1. Tá o tuneloch (25 bodov)

Cestnú sieť si vieme predstaviť ako graf. Rodina Novákovcov sa chce dostať čo najrýchlejšie z vrchola a do vrcholu b. Ich najmladší syn by však rád išiel cez tunel, čo situáciu značne komplikuje.

Máte zadaný graf G s n vrcholmi a m obojsmernými hranami, ktorý popisuje cestnú sieť. Pre každú hranu máte zadané dva vrcholy, ktoré spája, jej dĺžku a to, či je táto hrana tunel (true/false hodnota). Dĺžka každej hrany je kladné celé číslo.

Sledom z a do b označujeme ľubovoľnú postupnosť vrcholov, ktorá začína vrcholom a, končí vrcholom b a medzi každou dvojicou po sebe idúcich vrcholov existuje hrana. Cestou z a do b označujeme taký sled z a do b, v ktorej sa žiadny vrchol nevyskytuje viac ako raz.

(a) (11 bodov) Navrhnite algoritmus, ktorý nájde najkratší *sled* z vrchola a do vrchola b, ktorý prechádza *aspoň jedným tunelom.*

(b) (6 bodov) Navrhnite algoritmus, ktorý nájde najkratší *sled* z vrchola a do vrchola b prechádzajúci aspoň jedným tunelom. Zároveň, ak je takýchto najkratších sledov viacero, algoritmus nájde ten z nich, ktorý prechádza cez najväčší počet tunelov.

(c) (2 body) Nakreslite graf, v ktorom najkratší sled z a do b prechádzajúci aspoň jedným tunelom nie je cestou.

(d) (6 bodov) Dokážte, že nasledovný problém je NP-úplný: Existuje *cesta* z vrcholu a do b, ktorá prechádza aspoň cez k tunelov?

Pri podúlohách (a) a (b) hľadáte algoritmus, ktorý bude efektívny pre $n, m \leq 10^5$. Pomalšie riešenia získajú čiastočné body v závislosti od ich efektivity.

V podúlohe (d) môžete predpokladať, že nasledovné problémy sú NP-úplné:

- *Hamiltonovská cesta:* existuje v grafe G cesta prechádzajúca každým vrcholom grafu práve raz?
- *Cesta obchodného cestujúceho:* existuje v kladne ohodnotenom grafe G cesta prechádzajúca každým vrcholom grafu práve raz, ktorej dĺžka je najviac k?
- *Najdlhšia cesta:* existuje v kladne ohodnotenom grafe G cesta medzi vrcholmi a a b, ktorej dĺžka je aspoň k?

2. Tá označujúca cesty (25 bodov)

Máme zadaný zakorenený strom s n vrcholmi. Niektoré z jeho **listov** sú označené. Vašou úlohou je označiť cesty z koreňa vedúce do týchto listov. Cesta je označená vtedy, ak je označená aspoň jedna jej hrana. Samozrejme, vaším cieľom je minimalizovať počet označených hrán.

Keď však označíme niektoré hrany, označená cesta povedie z koreňa aj do niektorých neoznačených **listov**, čo nie je dobre. Minimalizujúc počet označených hrán, vyberte ich tak, aby z koreňa viedla označená cesta do čo najmenšieho počtu neoznačených listov.

No aby to bolo ešte o kúsok náročnejšie, množina označených listov sa mení (na začiatku nie je označený žiaden list), niekedy označenie pribudne, niekedy je odstránené a vy máte po každej zmene zistiť, koľko najmenej hrán je potrebných na označenie všetkých potrebných ciest a do koľkých najmenej neoznačených listov povedie označená cesta.

Za efektívne riešenie, v ktorom budete predpokladať, že v strome nie sú nikdy označené viac ako dva vrcholy môžete získať 10 bodov.

Za efektívne riešenie, v ktorom budete predpokladať, že koreň stromu má práve jedného priameho syna môžete získať až 20 bodov.

Neoptimálne riešenia vyššie uvedených čiastkových problémov získajú body úmerné ich efektivite. V jednom riešení môžete popísať aj riešenia viacerých podproblémov, z ktorých získate maximum z dosiahnutých bodov. Nezabudnite však v riešení jasne označiť, s ktorým predpokladom pracujete.

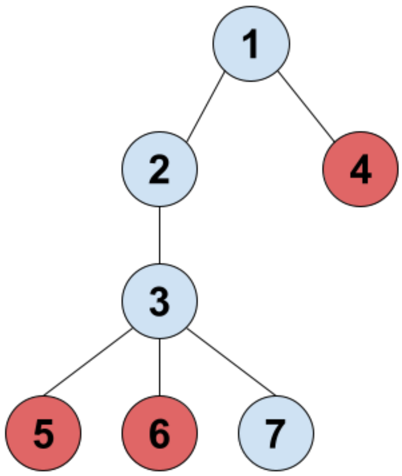
vstup

```
n=7 q=6
// otec vrcholov 2 až n
1 2 1 3 3 3
// q zmien
+ 4
+ 5
+ 6
+ 7
- 6
- 5
```

výstup

```
// minimálny počet hrán, minimálny počet
// neoznačených listov s označenou cestou
1 0
2 0
2 1
2 0
2 1
2 0
```

Po tretej úprave vyzerá strom ako na obrázku. Optimálne je označiť hrany $(1,4)$ a $(2,3)$ pričom list 7 je neoznačený, ale vedie do neho označená cesta.



Obr. 1: Vstupný strom z príkladu po tretej zmene.

3. Tá o chobotnici (25 bodov)

Chobotnica Klára sa vracia domov z výletu. Oceán, v ktorom pláva si vieme predstaviť ako mriežku $r \times s$, pričom riadky sú očíslované zhora nadol číslami 0 až $r-1$ a stĺpce zľava doprava číslami 0 až $s-1$.

Na začiatku cesty sa Klára nachádza na políčku v pravom dolnom rohu $(r-1, s-1)$ a chce sa dostať čo najrýchlejšie domov, ktorý je v ľavom hornom na políčku $(0,0)$. Každým krokom sa chobotnica môže posunúť buď **o jedno políčko doľava**, alebo **o jedno políčko hore**.

Navyše sa na niektorých políčkach nachádzajú ryby, ktoré má Klára veľmi rada. Konkrétne, existuje k políčok, na ktorých sú ryby, každé je popísané trojicou čísel x_i, y_i a p_i. Táto trojica určuje, že na políčku (x_i, y_i) je práve p_i rýb.

Keď Klára príde na políčko s rybami, môže ich všetky zjesť. Zistite, koľko najviac rýb môže Klára zjesť cestou domov.

Až 10 bodov môžete získať za efektívne riešenie, ktoré predpokladá, že $r, s \leq 1000$.
Až 20 bodov môžete získať za efektívne riešenie, ktoré predpokladá, že $r, s \leq 10^5$ a $k \leq 10^5$.
Plných 25 bodov môžete získať za efektívne riešenie, ktoré predpokladá, že $r, s \leq 10^9$ a $k \leq 10^5$.

4. Tá na doplnenie do 80 (5 bodov)

Pre každý z nasledujúcich výrokov určite či je pravdivý a svoje tvrdenie odôvodnite. Za správnu pravdivosť dostanete 0.5 bodu, zvyšné 2 za správne odôvodnenie.

(a) Nech T je najlacnejšia kostra neorientovaného grafu G s kladnými celočíselnými dĺžkami hrán. Potom pre každú dvojicu vrcholov s, t platí, že najkratšia cesta medzi nimi v T je zároveň najkratšou cestou medzi nimi v G.

(b) Majme nasledovný problém X: pre číslo n a postupnosť čísel A rozhodnite, či existuje súvislý podúsek A so súčtom n. Je problém X polynomiálne redukovateľný na SAT? Ak áno, popíšte túto redukciu.

5. Tá o ankete (2 body)

Túto úlohu odovzdávajte spoločne na papieri s úlohou 4.

Čestne prehlasujete, že po príchode domov vyplníte anketu k predmetu Tvorba efektívnych algoritmov, optimálne aj so slovným komentárom. Následne ku koncu skúškového anketu aj odošlete (či tam vyplníte zvyšok je na vás).

Ďakujem pekne za spätnú väzbu :)