Alex Diko (2INF1), DÚ-5

V riešení predpokladajme, že pracujeme v poli $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo $10^9 + 7$.

Nech s_i označuje i-te najväčšie šťastné číslo, ktoré sa nachádza na vstupe. Označme P_i počet výskytov s_i na vstupe. Označme $C_{i,c}$ počet možností, ako zo vstupu môžeme vybrať podpostupnosť c šťastných čísel, ktorá neobsahuje dve rovnaké šťastné čísla a obsahuje iba čísla $s_1, \ldots, s_i$.

Tvrdenie 1. $C_{0,0} = 1, \forall c > 0 : C_{0,c} = 0,\ \forall i > 0 : C_{i,0} = 1$
Zároveň $\forall i > 0\ \forall c > 0 : C_{i,c} = C_{i-1,c-1} \cdot P_i + C_{i-1,c}$

Dôkaz. Dokážem to indukciou na (i, c) (dvojice usporiadávame lexikograficky)

- Báza $(0, c), (i, 0)$: Ak vyberáme z prázdnej postupnosti šťastných čísel, vieme z nich vybrať práve prázdnu podpostupnosť. Teda $C_{0,0} = 1$ a $\forall c > 0 : C_{0,c} = 0$. Zároveň podpostupnosť 0 čísel vieme vybrať práve jedným spôsobom (nič nevyberieme). Teda $\forall i > 0 : C_{i,0} = 1$.
- Indukčný krok: Predpokladajme, že pre dané $(i, c),\ i, c > 0$ tvrdenie platí pre všetky menšie dvojice. Máme 2 možnosti:
  - Chceme mať v podpostupnosti s_i. Máme P_i možností, z ktorej pozície ho vybrať. Zároveň keď jedno s_i vyberieme, nemôžeme už ďalšie. Teda nezávisle na výbere s_i potrebujeme vybrať $c-1$ čísel z $\{s_1, \ldots, s_{i-1}\}$. Z indukčného predpokladu je táto hodnota $C_{i-1,c-1}$. Z pravidla súčinu máme celkovo $C_{i-1,c-1} \cdot P_i$ možností
  - Nechceme mať v podpostupnosti s_i. Z indukčného predpokladu to vieme spraviť $C_{i-1,c}$ možnosťami

  Keďže sa tieto 2 možnosti líšia tým, či obsahujú s_i, z pravidla súčtu máme dokopy $C_{i-1,c-1} \cdot P_i + C_{i-1,c}$, čo sme chceli dokázať.

$\square$

Nech najväčšie šťastné číslo na vstupe je s_l a nech je na vstupe U čísel, ktoré nie sú šťastné.

Lema 1. Počet spôsobov, ako vybrať podpostupnosť k čísel, kde je práve c šťastných je $C_{l,c} \cdot \binom{U}{k-c}$

Dôkaz. Keď je c šťastných máme na výber $k - c$ pozícii zo zvyšných. Pri výbere pozícii nám nezáleží na poradí takže máme $\binom{U}{k-c}$ možností. Šťastné a nešťastné čísla vyberáme nezávisle od seba, teda môžeme použiť pravidlo súčinu. $\square$

Tvrdenie 2. Odpoveď na úlohu je $\sum_{c=0}^{\min(k,l)} C_{l,c} \cdot \binom{U}{k-c}$

Dôkaz. Stačí spojiť lemu 1 s tým, že môžeme vybrať podpostupnosť najviac l šťastných čísel (lebo sa nemôžu opakovať) a jednotlivé možnosti sa líšia c, teda môžeme použiť pravidlo súčtu. $\square$

Implementácia: Na to, aby sme zistili, či je číslo šťastné nám stačí prejsť všetky jeho cifry, takže hodnoty P_i vieme vypočítať prejdením všetkých čísel na vstupe, teda v $O(n)$ (vieme si ich pamätať napríklad v hash mape). Keďže môžeme vybrať podpostupnosť z najviac l šťastných čísel, stačí nám počítať hodnoty $C_{i,c}$ pre $i \leq l, c \leq \min(l, k)$. Z tvrdenia 1 každú takúto hodnotu vieme vypočítať v $O(1)$. Teda to vieme celkovo v časovej zložitosti $O(l \cdot \min(l, k))$. Zároveň si všimnime, že bez ohľadu na n je l zhora ohraničené. Šťastné čísla môžu mať najviac 9 cifier, a pre každú máme 2 možnosti, aká hodnota tam bude. Teda šťastných čísel je najviac $\sum_{i=1}^{9} 2^i = 1022$.

Na vypočítanie kombinačného čísla $\binom{n}{k}$ potrebujeme vedieť hodnoty $n!, k!^{-1}, (n-k)!^{-1}$. Keďže $\max(U) = \max(k) = n$, vieme si hodnoty faktoriálov, ktoré budeme potrebovať, predpočítať v čase $O(n)$ ($0! = 1$, $x! =$

$(x-1)! \cdot x)$. Keďže p je prvočíslo, inverzný prvok vzhľadom na násobenie vieme vypočítať pomocou rýchleho umocňovania v čase $O(\log(p))$. Sumu z tvrdenia 2 potom vieme vypočítať v čase $\min(l,k) \cdot \log(p)$. Všetky aritmetické operácie vieme modulovať v $O(1)$, teda celková časová zložitosť je $O(n+\min(l,k) \cdot (l+\log(p)))$.

Všimnime si, že keď počítame hodnoty $C_{i,c}, c \in \{0, \ldots, \min(l,k)\}$, stačí nám poznať poznať hodnoty $C_{i-1,c}, c \in \{0, \ldots, \min(l,k)\}$ a na sumu z tvrdenia 2 nám stačí poznať $C_{l,c}, c \in \{0, \ldots, \min(l,k)\}$. Teda toto celé vieme spraviť v pamäťovej zložitosti $O(\min(l,k))$. Zároveň si musíme pamätať faktoriály. Teda celková pamäťová zložitosť je $O(\min(k,l) + n)$ a keďže $\min(k,l) \leq n$, $O(n)$