

Úvod do matematickej logiky (Cvičenie #5)

Kubo Kováč

18. októbra 2012

1 Syntax a sémantika

- aby sa nám neplietli pojmy s dojmami, zopakujme si:

SYNTAX	SÉMANTIKA
formálne systémy, axiómy, pravidlá <i>dokázateľnosť</i> v systéme ($\vdash \varphi$)	interpretácie (pravdivostné ohodnotenia, štruktúry) <i>pravdivosť</i> pri danej interpretácii ($v \models \varphi$) tautológia ($\forall v : v \models \varphi$)
teória T dokázateľnosť v teórii ($T \vdash \varphi$)	model teórie (v také, že $v \models \varphi \ \forall \varphi \in T$)
sporná teória T : $T \vdash \varphi$ aj $T \vdash \neg\varphi$ ($\iff$ nudná teória: $T \vdash \varphi \ \forall \varphi$)	tautologické vyplývanie ($T \models \varphi - v \models \varphi$ pre každý model T) sporná teória nemá model

- na tomto cvičení sa budeme pozerať práve na vzťahy medzi syntaxou a sémantikou;

- konkrétne nás bude zaujímať

- *korektnosť* (pri danej interpretácii): $\vdash \varphi \implies \models \varphi$
- *úplnosť* (pri danej interpretácii): $\models \varphi \implies \vdash \varphi$

resp. ich silné verzie

- *silná korektnosť* (pri danej interpretácii): $T \vdash \varphi \implies T \models \varphi$
- *silná úplnosť* (pri danej interpretácii): $T \models \varphi \implies T \vdash \varphi$

- pripomeňme si ešte, že pod axiomatickým systémom VL máme na mysli:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$
- (A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- (MP) $\varphi, \ \varphi \rightarrow \psi \ / \ \psi$

- a pod interpretáciou VL máme na mysli pravdivostné ohodnotenia (valuácie), t.j. funkcie $v : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$ (z množiny formúl), ktoré každej atomickej formule priradia pravdivostnú hodnotu a ďalej sú definované indukciou: $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$ a $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$, ak $v(\varphi) = 1$ a $v(\psi) = 0$, inak $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$
- tautológie sú vždy pravdivé tvrdenia, t.j. $v(\varphi) = 1 \ \forall v$

2 Korektnosť a úplnosť výrokovej logiky

- korektnosť sa dokáže indukciou od dĺžky dôkazu: A1, A2, A3 sú tautológie a MP „prenáša tautologickosť“, t.j. z dvoch tautológií odvodím zase len tautológiu
- to, že A1, A2, A3 sú tautológie dokážeme buď tabuľkou, alebo sporom:
- pre A2: predpokladajme, že existuje v také, že $v(A2) = 0$ a využijme, že $v(p \rightarrow q) = 0$ iba ak $v(p) = 1$ a $v(q) = 0$; musí teda byť $v[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] = 1$ a $v[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)] = 0$; t.j. $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ a $v(\varphi \rightarrow \chi) = 0$, čiže $v(\varphi) = 1$ a $v(\chi) = 0$; dosadením do $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ dostaneme, že $v(\psi) = 1$, ak hodnoty pre φ, ψ, χ dosadíme do prvej časti, dostaneme spor
- úplnosť sa dokáže ťažšie (pozri prednášku), tu si ukážeme iba demo na konkrétnej formule φ
- už sme si dokázali tieto tvrdenia:

(V4) $a \rightarrow \neg\neg a$; o zavedení dvojitej negácie

(A1) $a \rightarrow (b \rightarrow a)$; ak platí dôsledok, implikácia platí

(V2) $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$; ak neplatí predpoklad, implikácia platí

(V6) $a \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg(a \rightarrow b))$; ak platí predpoklad a neplatí dôsledok, implikácia neplatí

- uvedomte si, že A1, V2 a V6 popisujú celú tabuľku implikácie!
- na dôkaz vety o úplnosti ešte potrebujeme metavetu o neutrálnej formule: $T, \psi \vdash \varphi$ a $T, \neg\psi \vdash \varphi \implies T \vdash \varphi$
- táto metaveta formalizuje dôkaz hrubou silou: ak mám napr. formulu φ , ktorá sa skladá len z atómov a, b, c , ak vyskúšam všetky možnosti a dokážem, že

$$\begin{array}{cccc} a, b, c \vdash \varphi & a, \neg b, c \vdash \varphi & \neg a, b, c \vdash \varphi & \neg a, \neg b, c \vdash \varphi \\ a, b, \neg c \vdash \varphi & a, \neg b, \neg c \vdash \varphi & \neg a, b, \neg c \vdash \varphi & \neg a, \neg b, \neg c \vdash \varphi \end{array}$$

tak $\vdash \varphi$ (bez akýchkoľvek predpokladov)

- demo pre formulu $\varphi = \neg(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b)$

- φ je tautológia:

a	b	1. $\neg b$	2. $a \rightarrow b$	3. $\neg(a \rightarrow b)$	4. $a \rightarrow \neg b$	5. φ
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

- začnime prvým riadkom a predpokladajme a, b ; budeme postupovať po stĺpcoch zľava doprava a ak je v stĺpci ψ 1, dokážeme $a, b \vdash \psi$, a ak je tam 0, dokážeme $a, b \vdash \neg\psi$:
 1. $a, b \vdash \neg\neg b$ (z predpokladu b zavedením dvojitej negácie (V4+MP))
 2. $a, b \vdash a \rightarrow b$ (keďže platí b , implikácia platí (A1+MP))
 3. $a, b \vdash \neg\neg(a \rightarrow b)$ (z 2. zavedením dvojitej negácie)
 4. $a, b \vdash \neg(a \rightarrow \neg b)$ (platí predpoklad ale nie dôsledok, použijeme vetu V6)
 5. $a, b \vdash \varphi$ (z 3.: neplatí predpoklad, takže platí implikácia (V2))

pre istotu rozpíšme, ako sme dostali bod 5.:

3. $a, b \vdash \neg\neg(a \rightarrow b)$
 $a, b \vdash \neg\neg(a \rightarrow b) \rightarrow [\neg(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b)]$ (V2)
5. $a, b \vdash (\neg(a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow \neg b)$ (MP)

- druhý riadok: predpokladajme $a, \neg b$ a dokážme φ :

1. $a, \neg b \vdash \neg b$ (predpoklad)
2. $a, \neg b \vdash \neg(a \rightarrow b)$ (platí predpoklad, ale nie dôsledok – V6)
3. $a, \neg b \vdash \neg(a \rightarrow b)$ (už máme)
4. $a, \neg b \vdash (a \rightarrow \neg b)$ (ak platí $\neg b$, vyplýva z hocičoho (A1))
5. $a, \neg b \vdash \varphi$ (ak platí dôsledok (4.), vyplýva z hocičoho (A1))

- podobne vieme dokázať φ z predpokladov $\neg a, b$ a $\neg a, \neg b$; z metavety o neutrálnej formule je φ dokázateľné
- toto demo sme robili pre konkrétnu formulu φ , ale rozmyslite si, že takýmto prácnym spôsobom vieme dokázať akúkoľvek tautológiu
- každá tautológia má pravdivostnú tabuľku ako φ na začiatku strany, kde posledný stĺpec sú samé jednotky
- jednotlivé stĺpce tabuľky budú nejaké $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ tak, že $\varphi = \varphi_m$ že každé φ_i je buď atóm, alebo tvaru $\neg\varphi_j$ alebo tvaru $\varphi_j \rightarrow \varphi_k$ pre $j, k < i$
- dôkaz bude vyskúšaním všetkých možností; postupne pre každý riadok tabuľky zostrojíme dôkaz (z patričných predpokladov)

- každý riadok dokazujeme postupne (indukciou od zložitosti formuly φ); pre každý stĺpec dokážeme buď φ_i , ak je v danom stĺpci 1, alebo $\neg\varphi_i$, ak je tam 0
- dôkaz potom kopíruje naše vyplňanie tabuľky: ak sme v stĺpci $p \rightarrow q$ napísali 1, lebo v stĺpci p bola nula, tak niekde skôr sme už dokázali $\neg p$ a z toho odvodíme $p \rightarrow q$ vďaka V2; ak sme v stĺpci $p \rightarrow q$ napísali 0, lebo v stĺpci p bolo 1 a v stĺpci q nula, tak niekde skôr sme už dokázali p a $\neg q$ a pomocou V6 dokážeme $\neg(p \rightarrow q)$
- úloha: viete nájsť kratší dôkaz vety φ ?

3 Iné interpretácie a nezávislosť axióm

- mohli by sme uvažovať trojhodnotovú logiku: pravda, nepravda a „neviem“

p	$\neg p$	$\rightarrow$	0	1	?
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	?
?	?	?	?	1	?

- je výroková logika (VL) korektná aj pri tejto interpretácii? t.j. nech φ je tautológia ($\models_3 \varphi$), ak $v(\varphi) = 1 \forall v : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, ?\}$; platí $\vdash \varphi \implies \models_3 \varphi$?
- dá sa vo VL napísať formula $\varphi(X)$, ktorá je pravdivá iba pre $v(X) = ?$
- alebo by sme mohli uvažovať trojhodnotovú logiku: pravda, nepravda a „nezmysel“

p	$\neg p$	$\rightarrow$	0	1	$\perp$
0	1	0	1	1	$\perp$
1	0	1	0	1	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

- je VL korektná pri tejto interpretácii?
- ukážme si ešte, ako sa pomocou rôznych interpretácií dá (meta)dokázať, že v nejakom systéme niečo *nejde* dokázať
- uvažujme interpretáciu $f : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, 2\}$, definovanú indukzívne, pričom logické spojky interpretujeme nasledovne

p	$\neg p$	$\rightarrow$	0	1	2
0	1	0	0	2	2
1	1	1	2	2	0
2	0	2	0	0	0

- budeme hovoriť, že formula φ je fialová, $\models_F \varphi$, ak $f(\varphi) = 0$ pri každom ohodnotení $f : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

- dá sa dokázať, že axiómy A2 a A3 sú fialové a MP prenáša „fialovosť“, t.j., ak $f(\varphi) = 0$ a $f(\varphi \rightarrow \psi) = 0$, tak aj $f(\psi) = 0$; preto

Metaveta 3.1 (o fialovosti) *Všetky formuly výrokovej logiky dokázateľné iba z axióm A2 a A3 (bez A1) sú fialové.*

- tiež sa ľahko presvedčíme, že A1 nie je fialová! (vezmeme napr. ohodnotenie $f(p) = 0$ a $f(q) = 1$, potom $f(p \rightarrow (q \rightarrow p)) = 2$)
- z toho ale vyplýva, že vyškrtnutím axiómy A1 dostaneme neúplný systém – bez A1 vieme dokázať len fialové tautológie a existujú aj tautológie, ktoré nie sú fialové (napr. A1)
- z A2 a A3 nevieme dokázať ani A1 (nie je fialová) ani $\neg A1$ (to zas nie je tautológia); hovoríme teda, že A1 je *nezávislá* od A2 a A3
- podobne vieme dokázať, že A2 je nezávislá od ostatných axióm – uvažujme interpretáciu $r : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, 2\}$, pričom logické spojky interpretujeme nasledovne:

p	$\neg p$	$\rightarrow$	0	1	2
0	1	0	0	2	1
1	0	1	0	2	0
2	1	2	0	0	0

- budeme hovoriť, že formula φ je ružová, $\models_R \varphi$, ak $r(\varphi) = 0$ pri *každom* ohodnotení $r : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, 2\}$
- dá sa dokázať, že axiómy A1 a A3 sú ružové a MP prenáša „ružovosť“, t.j.

Metaveta 3.2 (o ružovosti) *Všetky formuly výrokovej logiky dokázateľné iba z axióm A1 a A3 (bez A2) sú ružové.*

- avšak samotná A2 ružová nie je a preto systém bez A2 je *neúplný*; A2 je nezávislá od A1 a A3
- skúste dokázať, že aj A3 je nezávislá od A1 a A2

4 Iné axiomatické systémy

- označme systém VL $\mathfrak{A}$ a uvažujme *nový* axiomatický systém $\mathfrak{B}$:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$
- (A3') $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow [(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi]$
- (MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$

- t.j. A1, A2, MP ostali, A3 sme nahradili axiómou A3' o spore

- intuitívne A3' hovorí, že ak z $\neg\varphi$ vyplýva ψ aj $\neg\psi$ (spor), tak platí φ
- je tento nový systém korektný (pri štandardnej interpretácii)? áno, stačí dokázať, že A3' je tautológia
- je tento nový systém úplný? áno, stačí ak ukážeme, že $\vdash_{\mathfrak{B}} A3$
- prečo? už vieme, že systém $\mathfrak{A}$ je úplný; ak $\models \varphi$, tak $\vdash_{\mathfrak{A}} \varphi$, teda existuje dôkaz v $\mathfrak{A}$
- dôkaz v systéme $\mathfrak{B}$ vytvoríme tak, že každý krok s axiomou A3 nahradíme celým dôkazom A3 v $\mathfrak{B}$
- môžeme v $\mathfrak{B}$ používať metavetu o dedukcií?
- áno – na jej dôkaz stačia axiomy A1 a A2 a MP! (prejdite si celý dôkaz)
- označme nasledovný systém $\mathfrak{L}$:
 - (L1) $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
 - (L2) $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \chi)$
 - (L3) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - (MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \ / \ \psi$
- prémiová úloha: dokážte, že systém $\mathfrak{L}$ je úplný (pri štandardnej interpretácii VL)

5 Čo si odnieť z tohto cvičenia

- tvrdenia typu

$$\vdash \varphi \implies \varphi \text{ má vlastnosť } X$$
 sa často dokazujú indukciou od dĺžky dôkazu (axiomy majú vlastnosť X , odvodzovacie pravidlá prenášajú X)
- tvrdenia typu

$$\vdash \varphi \longleftarrow \varphi \text{ má vlastnosť } X$$
 sa často dokazuje konštruktívne: pre φ s danou vlastnosťou musíme zostrojiť dôkaz (toto sa často robí dobre indukciou od zložitosti formuly)
- *korektnosť* je toto: $\vdash \varphi \implies \models \varphi$ (tvrdenie prvého typu); *úplnosť* je toto: $\models \varphi \implies \vdash \varphi$ (tvrdenie druhého typu)
- VL je korektná a úplná
- existujú aj iné interpretácie VL (ktoré sú zaujímavé v praxi, alebo sa pomocou nich dá dokázať nezávislosť axióm VL)
- existujú aj iné axiomatizácie VL (ktoré sú úplné)