Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #2

1 Jazyk logiky prvého rádu

- *Jazyk*:

  1. premenné $\quad x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2,\ldots,y_1,\ldots,z_1,\ldots$
  2. funkčné symboly (majú árnosť, koľko parametrov berú) $\quad f,\ g,\ h,\ldots$
  3. predikátové symboly (majú árnosť) $\quad P,\ Q,\ R,\ldots$
  4. logické spojky $\quad \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \neg$
  5. kvantifikátory $\quad \forall,\ \exists$
  6. pomocné symboly $\quad (,\ ),\ \{,\ \},\ [,\ ]$

- Premenné, logické spojky, kvatifikátory a pomocné symboly sú logické symboly.

- Funkčné symboly a predikátové symboly sú špeciálne symboly (určujú charakter teórie).

- Predikátový symbol $=$ sa ale radí medzi logické symboly. Keď jazyk obsahuje $=$, tak hovoríme, že je to *jazyk s rovnosťou.*

- *Term*: sú to reťazce zložené z funkčných symbolov a premenných. Nahrádzajú popis, v akom poradí treba aplikovať nejaké operácie. Presná definícia:

  1. Každá premenná je term.
  2. Ak f je n-árny funkčný symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom aj $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je term.
  3. Všetko, čo nevzniklo týmto postupom, nie je term.

- *Formula*: sú to reťazce, ktoré zodpovedajú matematickým tvrdeniam. Keď ich interpretujeme, budeme vedieť povedať, či sú pravdivé. Presná definícia:

  1. Ak P je n-árny predikátový symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je formula.
  2. Ak A, B sú formuly, potom aj $\neg A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ A \rightarrow B,\ A \leftrightarrow B$ sú formuly.
  3. Ak A je formula a x je premenná, potom aj $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ sú formuly.
  4. Všetko, čo nevzniklo týmto postupom, nie je formula.

- Mohli ste si všimnúť, že sme v definícii napísali, že iba ak x je premenná, môžeme ju kvantifikovať. Toto je podstatné, lebo v jazyku prvého rádu nemôžeme kvantifikovať nič iné, ako premenné. Tým sa líši logika prvého rádo od logík vyšších rádov.

2 Sémantika

- To, čo sme vyššie popísali, sú len písmenká usporiadané podľa istých pravidiel. Ďalším krokom je priradenie významu týmto písmenkám. Keď už budeme mať určený význam, potom môžeme vyhodnocovať, či je nejaká formula pravdivá, alebo nie, akú funkciu určuje daný term a podobne. Tomuto významu hovoríme *realizácia.*

- Aby sme určili význam zložitejších formúl a termov, musíme najskôr určiť význam základným stavebným kameňom, čiže symbolom jazyka.

  1. **Premenné**: Keď napíšeme $x + y = z$, myslíme tým, že keď spočítame čísla x a y dostaneme číslo z. Premenné nám nahrádzajú prvky z nejakej množiny. Keď teda definujeme realizáciu, musíme určiť množinu prvkov, nad ktorou budeme pracovať. Túto množinu budeme nazývať *univerzum*, budeme ju označovať $\mathcal{U}$ a jej prvky budeme nazývať *indivíduá.*

2. **Funkčné symboly**: n-árny funkčný symbol f budeme realizovať ako n-ánu funkciu nad univerzom. Inak povedané, funkcia dostane ako vstup n indivíduí a vráti jedno indivíduum.
$$f_{\mathcal{I}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$$
3. **Predikátové symboly**: n-árny predikátový symbol P budeme realizovať ako n-ány predikát nad univerzom. Inak povedané, predikát dostane ako vstup n indivíduí a vráti pravdivostnú hodnotu.
$$P_{\mathcal{I}} : \mathcal{U}^n \to \{0, 1\}$$
4. **Logické spojky**: Logické spojky ako vstup dostanú jednu ($\neg$) alebo dve ($\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$) pravdivostné hodnoty a vrátia jednu pravdivostnú hodnotu. Realizujeme (interpretujeme) ich tak, ako sme zvyknutí:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

5. **Kvantifikátory:** Kvatifikátory budeme tiež realizovať tak, ako sme zvyknutí.
   - (uzavretej) formule $(\forall x)A$ dáme pravdivostnú hodnotu 1 iba v prípade, že A bude pravdivá, bez ohľadu na to, aké indivíduum nahradíme za x. Inak bude mať pravdivostnú hodnotu 0.
   - (uzavretej) formule $(\exists x)A$ dáme pravdivostnú hodnotu 1 ak sa nájde jedno také indivíduum, že keď ho nahradíme za x, budem formula A pravdivá. V inom prípade bude mať pravdivostnú hodnotu 0

- **úloha**: Určte realizáciu pre jazyk úplného ostrého usporiadania. Je to jazyk s rovnosťou a má jediný špeciálny symbol a tým je binárny predikátový symbol $<$.
- **riešenie**: Aby sme určili realizáciu I, musíme určiť univerzum a binárny predikát nad týmto univerzom, ktorým budeme realizovať predikátový symbol $<$.

  Jedno z veľa možných riešení:

  - Univerzum: $\mathcal{U} = \{1, 2\}$
  - Predikát $<_{\mathcal{I}}: \mathcal{U}^2 \to \{0, 1\}$ bude mať nasledujúci predpis:

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	1
2	1	1
2	2	0

- Na vyššie popísanej realizácií sa nám ale niečo nezdalo. Môže sa stať, že $1 < 2$ a zároveň $2 < 1$? Stať sa to môže, ale nezodpovedá to nášmu chápaniu ostrého usporiadania. Poďme si teda povedať, čo by také ostré usporiadanie malo spĺňať.

  Spolu sme prišli na tieto tri vlastnosti:

  1. $(\forall x)(\neg(x < x))$ antireflexívnosť.
  2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x < y) \wedge (y < z)) \to (x < z))$ tranzitívnosť
  3. $(\forall x)(\forall y)(\neg(x = z) \to ((x < y) \vee (y < x)))$ trichotomickosť

  Keď sa teraz pozrieme na tieto vlastnosti zistíme, že naša realizácia spĺňa 1. a 3. vlastnosť, ale nespĺňa 2. vlastnosť.

  Skúsme teda prerobiť realizáciu tak, aby spĺňala všetky vlastnosti. Keď zachováme univerzum, máme len dve možnosti, ako upraviť realizáciu predikátového symbolu $<$ (rozmyslite si prečo):

1.

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	0
2	1	1
2	2	0

2.

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	1
2	1	0
2	2	0

- Čo sme teraz vlastne spravili? Definovali sme si axiómy teórie úplného ostrého usporiadania a realizáciu sme prispôsobili tak, aby boli axiómy pri tejto interpretácií pravdivé. Tak sme vlastne vyrobili *model* definovanej teórie. *Modelom* je teda taká realizácia, pre ktorú platí, že sú v nej axiómy teórie pravdivé.

3 Iné formálne axiomatické systémy a ich interpretácie

K-systém:

1. abeceda: $\Sigma = \{\texttt{-},\ \texttt{K},\ \texttt{R}\}$
2. jazyk: slová tvaru: $y\texttt{K}x\texttt{R}y$ - x, y sú reťazce pomlčiek (môžu byť aj prázdne)
3. axiómy: $x\texttt{KR}$, $\texttt{K}x\texttt{R}$
4. odvodzovacie pravidlo:
$$\frac{x\texttt{K}y\texttt{R}z}{x\texttt{K}y\texttt{-R}xz}$$
x, y a z sú reťazce polmčiek (môžu byť prázdne).

- **úloha**: V K-systéme dokážte formulu `---K--R------`, alebo dokážte, že sa nedá dokázať.
- **riešenie**:

$$\begin{array}{ll} \vdash \texttt{---KR} & \text{(axióma)} \\ \vdash \texttt{---K-R---} & \text{(odv. pravidlo)} \\ \vdash \texttt{---K--R------} & \text{(odv. pravidlo)} \end{array}$$

- **úloha**: V K-systéme dokážte formulu `---K-R--`, alebo dokážte, že sa nedá dokázať.
- **riešenie**: Po chvíli sme zistili, že sa táto formula nedá dokázať. Aby sme to dokázali, určili sme interpretáciu tohto systému, ktorá nám jednoducho ukáže prečo sa táto formula nedá dokázať.
  - Znak `K` je binárny funkčný symbol, ktorý ako prvý argument zoberie všetky pomlčky pred ním a ako druhý argument, všetky pomlčky za ním až po znak `R`.
  - Znak `R` je binárny predikát, ktorý ako prvý argument zoberie všetko, čo je naľavo od neho a ako druhý, všetko, čo je napravo od neho.
  - Postupnosť pomlčiek interpretujeme ako číslo, ktoré je rovnaké, ako počet pomlčiek. T.j. $\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}) = k$
  - Funkčný symbol `K` budeme interpretovať ako funkciu násobenie. T.j. $\mathcal{I}(\texttt{K}) = \times$
  - Reťazce tvaru $\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}\texttt{K}\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}$ interpretujeme ako
  $$\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}\texttt{K}\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}) = \mathcal{I}(\texttt{K})(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{k},\underbrace{\texttt{-...-}}_{l})) = k \times l$$
  - Predikátový symbol `R` interpretujeme ako predikát "rovná sa". Aby sa nám neplietlo označenie, budeme predikát "rovná sa" označovať $=_{\mathcal{I}}$ T.j. $\mathcal{I}(\texttt{R}) = =_{\mathcal{I}}$

– Formuly $\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}\texttt{K}\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}\texttt{R}\underbrace{\texttt{-...-}}_{m}$ budeme interpretovať ako

$$\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}\texttt{K}\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}\texttt{R}\underbrace{\texttt{-...-}}_{m}) = \mathcal{I}(\texttt{R})(\mathcal{I}(\texttt{K})(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}, \mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}))), \mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-...-}}_{m})) = k \times l =_{\mathcal{I}} m$$

Tým, že sme určili interpretáciu formúl, určili sme tým ich pravdivosť alebo nepravdivosť. Keď si interpretujeme formulu zo zadania: `---K-R--`, zistíme, že hovorí: $3 \times 1 = 2$, čo je zjavne nepravdivé tvrdenie.

Metaveta 3.1 (O korektnosti) *Každá dokázateľná formula je pravdivá pri interpretácií $\mathcal{I}$.*

Metadôkaz. Vety typu:"ak je niečo dokázateľné, tak to má nejakú vlastnosť" dokazujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku dôkazu.

Báza indukcie: Najkratší dôkaz majú axiómy, lebo sú z definície dokázateľné. Pozrime sa teda na naše axiómy:

– $x\texttt{KR}$: $\mathcal{I}(x\texttt{KR}) = |x| \times 0 =_{\mathcal{I}} 0$ ✓
– $\texttt{KR}x$: $\mathcal{I}(\texttt{KR}x) = 0 \times |x| =_{\mathcal{I}} 0$ ✓

Vidíme, že obe axiómy sú pri interpretácií $\mathcal{I}$ pravdivé.

Indukčný krok: Predpokladajme, že všetky formuly dokázateľné na n krokov sú dokázateľné. Nech formula φ ja dokázateľná na $n+1$ krokov. Jej dôkaz teda vyzerá nasledovne: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$, pričom formuly $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sú pravdivé v interpretácií $\mathcal{I}$.

Formulu φ sme mohli dostať na koniec dvomi spôsobmi:

– φ je axióma: tento prípad sme už rozobrali vyššie.
– φ sme odvodili z nejakého φ_i pomocou odvodzovacieho pravidla: Nech $\varphi_i = x\texttt{K}y\texttt{R}z$. Pužitím odvodzovacieho pravdila dostávame $\varphi = x\texttt{K}y\texttt{-R}xz$. Teraz stačí ukázať, že z faktu $|x| \times |y| = |z|$ vyplýva $|x| \times (|y| + 1) = |x| + |z|$

$$\begin{aligned} |x| \times |y| &= |z| \qquad \backslash + |x| \\ |x| \times |y| + |x| &= |x| + |z| \\ |x| \times (|y| + 1) &= |x| + |z| \end{aligned}$$

□

Tým sme ukázali, že formula `---K-R--` nemôže byť dokázateľná. Lebo keby bola dokázateľná, musela by byť nutne pravdivá pri interpretácií $\mathcal{I}$, lenže ona nie je.

• Táto veta na vyriešenie úlohy stačí, ale v skutočnosti platí aj opačné tvrdenie, tzv. veta o úplnosti.

Metaveta 3.2 (O úplnosti) *Formula je dokázateľná $\iff$ je pravdivá pri interpretáií $\mathcal{I}$.Inak napísané:*

$$\vdash \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$$

Metadôkaz. Implikáciu $\Rightarrow$ sme ukázali v predchádzajúcej metavete.

Ukážeme implikáciu $\Leftarrow$: Potrebujeme ukázať, že pre každú pravdivú formulu existuje dôkaz. Zoberme si teda pravdivú formulu $x\texttt{K}y\texttt{R}z$, reťazce x, y, z môžu byť prázdne. Dôkaz pre túto formulu bude vyzerať takto:

$$\begin{array}{lll} \vdash x\texttt{KR} & \text{(axioma)} & \\ \vdash \ldots & & \text{($|y|$-krát odvodzovacie pravidlo)} \\ \vdash x\texttt{K}y\texttt{R}\underbrace{x\ldots x}_{|y|} & & \end{array}$$

Z predpokladu vieme, že $|x| \times |y| = |z|$, z toho vyplýva, že $\underbrace{x\ldots x}_{|y|} = z$ □

C-systém:

1. abeceda: $\Sigma = \{\texttt{-},\texttt{C},\texttt{\#}\}$
2. jazyk: slová tvaru: $\texttt{C}x\texttt{\#}y$ - x, y sú reťazce pomlčiek (môžu byť aj prázdne)
3. axióma: `C-#`
4. odvodzovacie pravidlá:

(1) $\dfrac{\texttt{C}x\texttt{\#}y}{\texttt{C}xx\texttt{\#}y\texttt{-}}$ (2) $\dfrac{\texttt{C}x\texttt{\#}y}{\texttt{C}xx\texttt{-\#}y\texttt{-}}$

x a y sú reťazce polmčiek (môžu byť prázdne).

- **úloha**: V C-systéme dokážte formulu `C------#--`, alebo dokážte, že sa dokázať nedá.
- **riešenie**:

$$\begin{array}{ll} \vdash \texttt{C-\#} & \text{(axióma)} \\ \vdash \texttt{C---\#-} & (2) \\ \vdash \texttt{C------\#--} & (1) \end{array}$$

- **úloha**: V C-systéme dokážte formulu `C---#---`, alebo dokážte, že sa dokázať nedá.
- **riešenie**: Na cviku sme zistili, že sa táto formula nedá dokázať. Pri riešení sme si opäť pomohli vhodnou interpretáciou:
  - Znak `C` je unárny funkčný symbol, ktorý ako argument zoberie všetky pomlčky za ním až po znak `#`.
  - Znak `#` je binárny predikát, ktorý ako prvý argument zoberie všetko, čo je naľavo od neho a ako druhý, všetko, čo je napravo od neho.
  - Postupnosť pomlčiek interpretujeme ako číslo, ktoré je rovnaké, ako počet pomlčiek. T.j. $\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}) = k$
  - Funkčný symbol `C` budeme interpretovať ako funkciu "dolná celá časť s logaritmu pri základe dva". T.j. $\mathcal{I}(\texttt{C}) = \lfloor log_2 \rfloor$
  - Reťazce tvaru $\texttt{C}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}$ interpretujeme ako

$$\mathcal{I}(\texttt{C}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}) = \mathcal{I}(\texttt{C})(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k})) = \lfloor log_2 k \rfloor$$

  - Predikátový symbol `#` interpretujeme ako predikát "rovná sa". Aby sa nám neplietlo označenie, budeme predikát "rovná sa" označovať $=_\mathcal{I}$ T.j. $\mathcal{I}(\texttt{\#}) = =_\mathcal{I}$
  - Formuly $\texttt{C}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}\#\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l}$ budeme interpretovať ako

$$\mathcal{I}(\texttt{C}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}\texttt{\#}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l}) = \mathcal{I}(\texttt{\#})(\mathcal{I}(\texttt{C})(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k})), \mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l})) = \lfloor log_2 k \rfloor =_\mathcal{I} l$$

Podobne ako pre K-systém, aj pre C-systém sa dá dokázať veta o úplnosti s interpretáciu, ktorú sme popísali vyššie.

Metaveta 3.3 (O úplnosti) *Formula v C-systéme je dokázateľná práve vtedy, keď je pravdivá pri interpretácií $\mathcal{I}$, definovanej vyššie. Inak zapísané:*

$$\vdash \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$$

Metadôkaz. Dôkaz bol na domácu úlohu.

Keďže formula `C---#---` nie je pravdivá pri interpretácii $\mathcal{I}$, tak podľa metavety o úplnosti nemôže byť ani dokázateľná.