Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #3

Anna Dresslerová

25. októbra 2016

1 Hranie sa s modelmi

- Na začiatku cvičenia sme si zopakovali pojmy z prednášky. Všetko o syntaxi a sémantike výrokovej logiky. Pozrite si to v skriptách (strany 10-12). Obzvlášť odporúčam stráviť viac času nad definíciou modelu a tautologického dôsledku.
- Používali sme nasledujúce označenia:
  - v: valuácia prvotných formúl.
  - $\overline{v}$: rozšírenie valuácie v na všetky formuly.
  - T: nejaká teória (množina formúl)
  - A: nejaká formula
  - $v \models A$: formula A je pri valuácií v prvotných formúl pravdivá. Môžeme povedať aj, že v je modelom A.
  - $v \models T$: v je modelom množiny formúl T.
  - $T \models A$: A je tautologickým dôsledkom T. Inými slovami, nech zoberieme akýkoľvek model množiny formúl T, tak bude formula A v tomto modeli pravdivá.
- **úloha**: Dokážte metavetu: $T \cup \{A\} \models B \iff T \models A \to B$
- **riešenie**: Dôkaz musíme rozdeliť na dve implikácie.

  $\Rightarrow$: Predpokladáme, že každý model $T \cup \{A\}$ je zároveň modelom B. Potrebujeme ukázať, že každý model T je zároveň modelom $A \to B$. Zoberme si teraz nejaký model množiny formúl T. Označme si ho v. Pozrime sa na to, ako môže vyzerať hodnota $\overline{v}(A)$:

  1. $\overline{v}(A) = 0$: Z tohto vyplýva, že $\overline{v}(A \to B) = 1$, lebo vieme, že ak neplatí predpoklad (A), potom je jedno, či platí dôsledok (B). Takže sme zistili, že ak je formula A pri valuácií v nepravdivá, tak v je modelom $(A \to B)$.
  2. $\overline{v}(A) = 1$: Pri tejto možnosti môžeme využiť náš predpoklad. Vieme, že v je modelom $T \cup \{A\}$, lebo všetky formuly T aj formula A sú v ňom pravdivé. Na základne predpokladu teda vieme, že $\overline{v}(B) = 1$. Takže $\overline{v}(A) = 1$ a $\overline{v}(B) = 1$, takže z definície rozšírenia valuácie platí $\overline{v}(A \to B) = 1$

  V oboch prípadoch sme prišli na to, že ak v je modelom T, tak je nutne aj modelom $(A \to B)$ a to sme chceli dokázať.

  $\Leftarrow$: Pri tejto implikácií máme predpoklad, že každý model T je zároveň modelom $(A \to B)$. Potrebujeme dokázať, že ľubovoľný model $T \cup \{A\}$ je modelom B. Zoberme teda ľubovoľný model v množiny formúl $T \cup \{A\}$. Vieme, že tento model je aj modelom T (lebo všetky fomuly T sú v ňom pravdivé). Takže na základe predpokladu platí $\overline{v}(A \to B) = 1$. Zároveň však vieme, že $\overline{v}(A) = 1$, lebo v je model $T \cup A$.

  Pre spor teraz predpokladajme, že $\overline{v}(B) = 0$. Toto ale znamená, že $\overline{v}(A \to B) = 0$, lebo platí predpoklad (A) a neplatí dôsledok (B). To je ale spor s tým, že my už vieme, že $\overline{v}(A \to B) = 1$. □
- **úloha**: Dokážte metavetu: Nech $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ je konečná množina formúl. Potom

$$T \models B \iff (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \models B$$

- **riešenie**: Opäť budeme dokazovať dve implikácie.

  $\Rightarrow$: Ako predpoklad máme, že v každom modeli T je formula B pravdivá. Potrebujeme ukázať, že v každom modeli $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ je formula B pravdivá.

  Zoberme teda ľubovoľný model v formule $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Matematickou indukciou sa dá ukázať, že ak v je modelom $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$, potom musí platiť $\overline{v}(A_i) = 1$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$. To ale znamená, že v je modelom T. Z predpokladu teda vyplýva, že $\overline{v}(B) = 1$ a to sme chceli dokázať.

  $\Leftarrow$: Teraz predpokladáme, že v každom modeli $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ je formula B pravdivá. Potrebujeme ukázať, že v každom modeli T je pravdivá formula B.

  Nech teda v je ľubovoľný model T. Z definície modelu vieme, že všetky formuly v T sú v modeli v pravdivé. $\overline{v}(A_i) = 1$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$. To ale znamená, že $\overline{v}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) = 1$ a podľa predpokladu platí $\overline{v}(B) = 1$ a to sme chceli dokázať.

- **úloha**: Dokážte metavetu: $\emptyset \models A \iff A$ je tautológia.

  Dôkaz tejto metavety je dosť ľahký. Skúste si ho spraviť sami. Stačí nasledovať definície :) a uvedomiť si, že každá valuácia je modelom prázdnej množiny.

- **úloha**: Dokážte metavetu: $\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi \iff \overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$

  Dôkaz si skúste spraviť sami. Keby s ním boli problémy, neváhajte sa ma opýtať na cvikách, či cez mail.

2 Spočítateľnosť formúl výrokovej logiky

- **úloha**: Dokážte, že z konečne veľa formúl vieme vytvoriť spočítateľne veľa výrokových formúl.

- **riešenie**: Potrebujeme každej formule priradiť jedinečné prirodzené číslo. Potom zo spočítateľnosti prirodzených čísiel vyplynie spočítateľnosť formúl. Riešení je veľa a tu je niekoľko z nich, na ktoré sme spolu prišli (a pamätám si ich):

  – Keďže máme len konečne veľa prvotných formúl, konečne veľa logických spojok a len dva pomocné symboly, celkovo používame konečne veľa znakov. Nech ich je n. Všetky znaky očísľujeme od 1 po n. Formula (jej zápis) je potom číslo zapísané v $(n+1)$-ovej sústave.

    Príklad: Máme dve prvotné formuly p, q. Takže všetky symboly dostanú nasledovné hodnoty:

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$	$\neg$	(	)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

    Majme teda nejakú formulu. Napr.

    $$((p \vee q) \rightarrow (q \wedge p))$$

    každý znak tejto formuly je teraz cifra. V našom prípade máme $n = 9$ cifier, čiže zápis formuly je vlastne číslo v desiatkovej sústave:

    $$8814296823199$$

    Zámerne sme nepoužili nulu, aby sa nestalo, že na začiatku nevzniknú nejaké nuly. Teraz máme absolútnu istotu, že žiadne dve formuly nemajú priradené rovnaké prirodzené číslo.

  – Formulu si naTeXujem a uložím. Jej číslo bude v dvojkovej sústave:

    $$1\text{"}zapis\ formuly\ v\ PC\text{"}$$

    Jednotku na začiatok sme pridali, aby nám nenarobili šarapatu nuly na začiatku zápisu formuly.

- **úloha**: Dokážte, že zo spočítateľne veľa prvotných formúl vieme vytvoriť spočítateľne veľa výrokových formúl.

- **riešenie**: Opäť je náš cieľ rovnaký. Potrebujeme každej formule priradiť jedinečné prirodzené číslo. Tento raz však už prvotných formúl môže byť nekonečne veľa. Riešení je opäť veľa. Na cvikách sme spomenuli:

  – Spravíme si z nekonečnej abecedy konečnú tak, že si očísľujeme prvotné formuly prirodzenými číslami, potom každú prvotnú formulu nahradíme jej číslom zapísaným v dvojkovej sústave. Keďže každé prirodzené číslo má konečný zápis v dvojkovej sústave, týmto prepisom získame z každej konečnej formuly opäť konečný reťazec. Nemôže sa stať, že dve rôzne formuly budú mať ten istý zápis.

    Teraz už len stačí použiť prvý postup z predchádzajúcej úlohy.

  – Použijeme diagonalizáciu. Vieme, že keď máme len konečne veľa prvotných formúl, vieme všetky formuly z nich vytvorené zoradiť do postupnosti (očísľovať prirodzenými číslami). Ďalej vieme zoradiť prvotné formuly do postupnosti.

    Teraz si spravíme takú 2D tabuľku. Každý riadok venujeme jednej prvotnej formule. Do prvého riadku napíšeme všetky formuly, ktoré obsahujú iba prvú prvotnú formulu. Do druhého riadku napíšeme všetky prvotné formuly, ktoré vznikly použitím prvej a druhej prvotnej formuly a obsahujú druhú prvotnú fromulu. Podobne v i-tom riadku budú napísané všetky formuly, ktoré vznikli z prvých i prvotných formúl a obsahujú i-tu prvotnú formulu.

    Podmienka, že formuly v i-tom riadku musia obsahovať i-tu prvotnú formulu je tam preto, aby sa v tejto veľkej tabuľke vyskytla každá formula práve raz.

    Teraz už len stačí vypisovať formuly po diagonálach. Formula na políčku so súradnicami (i, j) (čísľujeme od 1) dostane číslo

    $$\frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + j$$

    Odporúčam si to nakresliť a pochopíte :)

  – Nakoniec spomeniem Tomanov postup zo skrípt. Definujeme si funkciu f, ktorá každému symbolu priradí nejaké nenulové prirodzené číslo. Logickým spojkám a pomocným symbolom priradí nasledovné hodnoty:

x	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$	$\neg$	(	)
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7

    Ďalej vieme, že prvotné formuly vieme očíslovať. i-tu prvotnú formulu označíme p_i, potom funkcia f pre prvotné formuly bude:

    $$f(p_i) = i + 10$$

    Teraz si zoberieme prvočísla. Každému znaku x v zápise formuly "priradíme"prvočíslo (každej pozícií iné) a umocníme ho na $f(x)$. Všetky tieto čísla pre znaky nakoniec vynásobíme.

    Príklad: Majme formulu

    $$((p_1 \vee p_3) \rightarrow p_{47})$$

    Táto formula dostane číslo:

    $$2^6 3^6 5^{11} 7^2 11^{13} 13^7 17^4 19^{57} 23^7$$