Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #4

Anna Dresslerová

2. novembra 2016

- Celé toto cvičenie sme venovali vete o kompaktnosti. Ako prvé sme urobili trochu iný dôkaz tejto vety.

Veta 0.1 (O kompaktnosti výrokovej logiky) *Nech T je množina formúl. T má model $\iff$ každá konečná $T_0 \subseteq T$ má model.*

Dôkaz. Implikácia $\Rightarrow$ nie je až taká zaujímavá. Model T je modelom všetkých konečných podmnožín T.

Implikácia $\Leftarrow$ už je zaujímavejšia. Budeme hovoriť, že T má *konečnú vlastnosť*, ak každá konečná podmnožina T má model. Pri dôkaze tejto implikácie predpokladáme, že každá konečná podmnožina T má model (T má konečnú vlastnosť). Z toho by sme chceli odvodiť, že existuje model celého T. Skôr ako tak urobíme, dokážeme si jednu pomocnú lemu.

Lema: Nech T je množina formúl výrokovej logiky, ktorá má konečnú vlastnosť a φ je formula výrokovej logiky. Potom aspoň jedno z $T \cup \{\varphi\}$ a $T \cup \{\neg\varphi\}$ má konečnú vlastnosť.

Dôkaz lemy: Pre spor predpokladajme, že ani jedno z $T \cup \{\varphi\}$ a $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá konečnú vlastnosť. Potom existujú konečné podmnožiny $A, B \subseteq T$ také, že $A \cup \{\varphi\}$ nemá model (je nesplniteľná) a $B \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model. Z toho vyplýva nasledovné

(1) T má konečnú vlastnosť, takže množina A má model. Ale množina $A \cup \{\varphi\}$ už nemá model, z toho vieme, že v každom modeli v množiny A musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 0$.

(2) Podobne množina B má model, ale $B \cup \{\neg\varphi\}$ už nemá model. Preto v každom modeli v množiny B musí platiť $\overline{v}(\neg\varphi) = 0$, čiže $\overline{v}(\varphi) = 1$.

Teraz sa pozrime na modely konečnej množiny $A \cup B$, ktoré musia existovať, lebo $A \cup B \subseteq T$ a T má konečnú vlastnosť. Je jasné, že každý model v množiny $A \cup B$ je modelom A aj B. Podľa (1) musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 0$ a podľa (2) musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 1$, čo je spor, lebo nemôže platiť oboje naraz. Tým sme skončili dôkaz pomocnej lemy.

Teraz využijeme fakt, ktorý sme dokazovali na minulom cviku: všetky formuly výrokovej logiky sa dajú usporiadať do postupnosti. φ_i budeme označovať i-tu formulu v postupnosti.

Teraz si postupne vytvoríme množinu S.

$$\begin{aligned}
S_0 &= T \\
S_1 &= \begin{cases} S_0 \cup \{\varphi_1\} & \text{ak } S_0 \cup \{\varphi_1\} \text{ má konečnú vlastnosť} \\ S_0 \cup \{\neg\varphi_1\} & \text{inak} \end{cases} \\
&\vdots \\
S_i &= \begin{cases} S_{i-1} \cup \{\varphi_i\} & \text{ak } S_{i-1} \cup \{\varphi_i\} \text{ má konečnú vlastnosť} \\ S_{i-1} \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{inak} \end{cases} \\
S &= \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i
\end{aligned}$$

Zjavne každé S_i má konečnú vlastnosť, lebo T má konečnú vlastnosť a všetky S_i sme vytvárali tak, aby mali konečnú vlastnosť (aplikovali sme pomocnú lemu, ktorú sme dokázali vyššie).

Teraz by sme radi prehlásili S za "model"množiny T. Pod tým modelom myslím, že by sme radi prehlásili všetky formuly S za pravdivé. Potom by zjavne boli pravdivé naraz všetky formuly T, lebo sú podmnožinou S. Ale existuje taká valuácia, že práve formuly z S sú v nej pravdivé?

Teraz si trochu uľahčíme život tým, že prepíšeme všetky formuly v S len pomocou spojek $\wedge, \neg$. To sa dá, lebo tieto dve spojky tvoria úplný systém. Takže vieme každú formulu prepísať na ekvivalentnú tak, že se nezmení množina jej modelov.

Teraz stačí overiť, že naozaj každá formula dostane valuáciu (čiže buď je v S φ alebo $\neg\varphi$ ale nie oboje) a nemôže sa stať prípad, že budú v S formuly φ, ψ a $\neg(\varphi \wedge \psi)$ zároveň.

Najprv sa pozrime na prvý prípad. Zjavne z konštrukcie S musí byť aspoň jedno z $\varphi, \neg\varphi$ v množine S. Môže sa stať, že sú tam obe? Predpokladajme, že by tam mohli byť obe (a v tomto prípade by pre S neexistovala vhodná valuácia). Potom existuje také i, že $\varphi, \neg\varphi \in S_i$ (lebo sme ich niekedy dali do S). Podľa toho, ako sme S_i vytvorili, tak by malo mať konečnú vlastnosť. Zoberme si ale jej konečnú podmnožinu $\{\varphi, \neg\varphi\}$. Táto množina by mala mať model, lebo je konečnou podmnožinou S_i, ale ona ho nemá, a to je spor.

Pozrime sa na druhý prípad. Potrebujeme, aby S spĺňalo, že keď obsahuje φ a ψ, tak bude obsahovať aj $\varphi \wedge \psi$. Môže teda nastať opak? Predpokladajme (pre spor), že S obsahuje φ, ψ a $\neg(\varphi \wedge \psi)$. Preto určite existuje S_i, že $\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi) \in S_i$. S_i má konečnú vlastnosť, preto aj množina $\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$ by mala mať model, ale ona ho opäť nemá a to je spor.

Tak sme overili, že keď určíme valuáciu v tak, že všetky prvotné formuly v S označíme ako pravdivé a ostatné za nepravdivé, dotaneme valuáciu, pri ktorej budú pravdivé práve formuly z S. Keďže $T \subseteq S$, tak v bude zároveň hľadaným modelom T. $\square$

- **úloha:** Pomocou vety o kompaktnosti dokážte, že graf G je k-zafarbiteľný $\iff$ každý jeho konečný podgraf je k-zafarbiteľný.

- **riešenie:** Môžeme si všimnúť, že veta o kompaktnosti má podobnú štruktúru ako to, čo chceme dokázať. Chceme dokázať že celok má nejakú vlastnosť práve vtedy keď majú túto vlastnosť všetky konečné kúsky celku.

  Aby sme mohli do dôkazu zapojiť vetu o kompaktnosti, musíme si najprv spraviť nejaké formuly, o ktorých budeme ukazovať, že sú splniteľné. Tieto formuly by mali nejakým spôsobom kódovať skutočnosť, že celok má vlastnosť akú chceme. V tomto prípade to je k-zafarbiteľnosť grafu.

  Ako prvé si musíme zvoliť prvotné formuly. V našom prípade sa nám hodí mať prvotné formuly tvaru "vrchol v má farbu a"$= p_{v,a}$. Teraz máme len logické spojky a tieto prvotné formuly na to, aby sme vytvorili množinu formúl, ktorá bude splniteľná práve vtedy, keď zadaný graf $G = (V, E)$ bude k-zafarbiteľný (k bolo zadané vopred a teda je to konečné číslo).

  Chceme vyjadriť dve veci:

  1. každý vrchol má práve jednu farbu
  2. susedné vrcholy majú rôzne farby

  Skúsme vyjadriť 1. vlastnosť pomocou množiny formúl. Najprv povieme, že každý vrchol musí mať nejakú farbu:

  $$T_0 = \{p_{v,1} \vee p_{v,2} \vee \dots \vee p_{v,k} \mid \forall v \in V\}$$

  Potom povieme, že tá farba musí byť najviac jedna:

  $$T_1 = \{p_{v,i} \to \neg p_{v,j} \mid \forall v \in V;\ i, j \in \{1, 2, \dots, k\};\ i \neq j\}$$

  Tým sme zabezpečili, že množina formúl $T_0 \cup T_1$ bude splniteľná iba v prípade, že bude existovať také ohodnotenie prvotných formúl, že práve jedno z $\{p_{v,1}, p_{v,2}, \dots, p_{v,k}\}$ bude pravdivé pre každé $v \in V$.

  Teraz skúsme formulovať 2. vlastnosť:

  $$T_2 = \{p_{v,i} \to \neg p_{u,i} \mid v, u \in V;\ (v, u) \in E;\ i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

  Tieto formuly vlastne hovoria, že ak má vrchol farbu i, potom nemôže mať farbu i jeho sused.

Za množinu formúl zvolíme $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$.

Teraz sa môžeme presvedčiť, že modely T kódujú k-farbenia grafu G. Zoberme si nejaké k-farbenie grafu G. Nastavme valuáciu v prvotných formúl tak, že:

$$v(p_{u,i}) = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } u \text{ má farbu } i \text{ v otomto farbení} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Takto definovaná valuácia je určite modelom teórie T.

Teraz naopak, zoberme si model v teórie T a definujem podľa neho k-farbenie grafu G takto:

$$f(u) = i \text{ ak } v(p_{u,i}) = 1$$

Táto funkcia je dobre definovaná, lebo je zabezpečená vlastnosť 1. a je to regulárne farbenie, lebo je zabezpečená aj vlastnosť 2.

Dôkaz implikácie $\Rightarrow$ je jednoduchý a nepotrebujeme naňho použiť vetu o kompaktnosti. Stačí si uvedomiť, že k-farbenie celého grafu je vhodné farbenie aj pre všetky konečné podgrafy.

Na dôkaz implikácie $\Leftarrow$ už použijeme vetu o kompaktnosti. Máme predpoklad, že každý konečný podgraf G je k-zafarbiteľný a potrebujeme ukázať, že z toho vyplýva to isté o celom grafe G. Keby sme ukázali, že pre každú konečnú podmnožinu T existuje model, potom by z vety o kompaktnosti vyplynulo, že celá množina T má model a to by už znamenalo, že G je k-zafarbiteľný (viď argumentáciu vyššie).

Takže zostáva ukázať, že z toho, že každý konečný podgraf G je k-zafarbiteľný vyplýva, že pre každú konečnú podmnožinu T existuje model. Zoberme si teda nejakú konečnú podmnožinu T, označme ju T_0. Táto množina nemusí zodpovedať nejakému konečnému podgrafu G, preto si ju rozšírime tak, aby nejakému podgrafu zodpovedala.

Označme si všetky vrcholy, o ktorých hovoria formuly v T_0 ako V_0. Teraz si rozšírme T_0 o tie formuly, ktoré hovoria o vrcholoch v množine V_0. Označíme si túto množinu ako T_1. Táto množina je určite konečná, lebo zodpovedá nejakému konečnému podgrafu. Podľa predpokladu má tento podgraf k-farbenie. Z toho dostávame, že množina T_1 má model. Keďže $T_1 \supseteq T_0$, tak tento model je aj modelom T_0. $\square$

- **úloha:** Pomocou vety o kompaktnosti dokážte, že sa pomocou sady Wangových kachličiek dá okachličkovať celé plocha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ak sa dá okachličkovať ľubovoľná konečná plocha $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Krajšie zadanie a riešenie nájdete v tejto starej písomke (úloha 3):

  http://dcs.fmph.uniba.sk/ dresslerova/udml2016/materialy/vzor1.pdf