

ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – CVIČENIE #5

Anna Dresslerová

3. novembra 2016

Toto cvičenie sme venovali dokazovaniu vo formálnom systéme výrokovej logiky.

Formálny systém:

- Jazyk : formuly zložené z prvotných formúl, logických spojok $\neg, \rightarrow$ a zátvoriek.
- Axiómy:
 - (A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 - (A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 - (A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Odvodzovacie pravidlo: Modus ponens

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Dokážte nasledujúce formuly:

1. $A \rightarrow A$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
4. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
5. $\neg\neg A \rightarrow A$
6. $A \rightarrow \neg\neg A$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
8. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$
9. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
10. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$

Riešenie 1:

1. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (A1)
2. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (A1)
3. $\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (A2)
4. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP 2,3)
5. $\vdash A \rightarrow A$ (MP 1,4)

Riešenie 2: Od tohto momentu sme už mohli používať vetu o dedukcií (VD):

Veta 0.1 (o dedukcií) *Nech T je množina formúl výrokovej logiky a A, B sú formuly výrokovej logiky. Potom platí:*

$$T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \rightarrow B$$

Konkrétne pri tomto príklade sa nám náramne hodila. Všimnime si, že keby sme vedeli dokázať

$$A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C$$

tak by sme mali hotovo, lebo by stačilo použiť 3-krát vetu o dedukcii:

$$\begin{array}{ll} A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) & \vdash C \quad (\text{predpoklad}) \\ (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) & \vdash A \rightarrow C \quad (\text{VD}) \\ (A \rightarrow B) & \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{VD}) \\ & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{VD}) \end{array}$$

Teraz už len stačí dokázať predpoklad:

$$\begin{array}{ll} 1. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \quad (\text{predpoklad}) \\ 2. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B \quad (\text{predpoklad}) \\ 3. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \quad (\text{MP } 1,2) \\ 4. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C \quad (\text{predpoklad}) \\ 5. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C \quad (\text{MP } 3,4) \end{array}$$

Celý dôkaz vyzerá takto:

$$\begin{array}{ll} 1. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \quad (\text{predpoklad}) \\ 2. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B \quad (\text{predpoklad}) \\ 3. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \quad (\text{MP } 1,2) \\ 4. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C \quad (\text{predpoklad}) \\ 5. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C \quad (\text{MP } 3,4) \\ 6. & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C \quad (\text{VD}) \\ 7. & (A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{VD}) \\ 8. & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{VD}) \end{array}$$

Otázky z cvičení:

- *Ako sme dostali tie predpoklady?* Vymysleli sme si ich tak, aby nám to vyšlo.
- *To znamená, že sú pravdivé?* Nie, to len znamená, že to, čo je napravo vieme dokázať z predpokladov naľavo. Napr. zápis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdash \varphi$ znamená, že formula φ je dokázateľná z predpokladov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Poznámka:

- Vždy platí, že z predpokladu φ viem dokázať φ

$$\varphi \vdash \varphi$$

- Veta o dedukcii je všeobecne dobrý pomocník. Môžeme si presúvať predpoklady z prava doľava a naopak (Pozor! na pravej strane musí niečo zostať). Na ľavej strane (pred hrablou) je množina, takže formuly, ktoré sú tam, nemajú určené poradie, v akom ich máme posúvať na druhú stranu.

Príklad, máme formulu $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta))$, ktorá je dokázateľná. Potom môžem spraviť toto:

1. $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta))$
2. $\alpha \vdash \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)$ (VD smer $\Leftarrow$)
3. $\alpha, \beta \vdash \gamma \rightarrow \delta$ (VD smer $\Leftarrow$)
4. $\alpha, \beta, \gamma \vdash \delta$ (VD smer $\Leftarrow$)
5. $\alpha, \gamma \vdash \beta \rightarrow \delta$ (VD smer $\Rightarrow$)
6. $\gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$ (VD smer $\Rightarrow$)
6. $\vdash \gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta))$ (VD smer $\Rightarrow$)

Čiže α , β a γ môžu byť na začiatku formuly v ľubovoľnom poradí, ale δ musí vždy zostať na konci.

Riešenie 3 - 10: Kto nemá napísané dôkazy týchto formúl, má jedinečnú možnosť dokázať ich sám. :)