Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #6

Anna Dresslerová

11. novembra 2016

- opakovanie:
  - **korektnosť:** Korektný systém je taký, v ktorom sú dokázateľné iba tautológie (vždy pravdivé tvrdenia)
  - **úplnosť:** Úplný systém je taký, v ktorom sú všetky tautológie dokázateľné. Inak povedané, pre každú tautológiu existuje dôkaz.
  - **veta o úplnosti výrokovej logiky (slabá forma):** Nech φ je formula výrokovej logiky. Potom

    $$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

    To vlastne znamená, že výroková logika spolu so štandardnou sémantikou je úplný systém.
  - **poznámka:** Korektnosť a úplnosť sa vždy viaže na formálny systém a aj na sémantiku.

- Skúsme definovať inú sémantiku pre výrokovú logiku. Tento raz budeme používať tri hodnoty namiesto dvoch. Sémantika S bude zadaná nasledovne:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	1
2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	0
2	0	0	0

V druhej tabuľke je hodnota prvého argumentu v riadku a druhého v stĺpci.
Teraz definujeme niečo podobné, ako bola pre štandardnú sémantiku tautológia.

Definícia: Formulu nazveme *fialová*, ak pre každé ohodnotenie prvotných formúl bude mať hodnotu 0 pri sémantike S.

- **Úloha:** Zistite o axiómach výrokovej logiky, či sú fialové a zistite, či pravidlo modus ponens prenáša fialovosť.

- **Riešenie:** Najprv sa budeme venovať axiómam. Na riešenie je niekoľko možností. Buď si napíšeme obrovskú tabuľku so všetkými možnosťami, alebo sa pokúsime ísť na to sporom. Prvú možnosť demonštrujeme na axióme

$$(A1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

A	B	$B \rightarrow A$	$(A1)$
0	0	0	0
0	1	2	2
0	2	0	0
1	0	2	0
1	1	2	0
1	2	0	2
2	0	2	0
2	1	0	0
2	2	0	0

Takže sme zistili, že axióma $(A1)$ **nie je** fialová.

Druhú metódu demonštrujeme na axióme

$$(A2) \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

Pokúsime sa nájsť nejaké ohodnotenie $\overline{v}$ formúl A, B a C, že celá axióma nebude mať hodnotu 0. Najprv si môžeme všimnúť, že výsledkom implikácie môžu byť iba 0 a 2. Keď si zoberieme implikáciu na najvyššej úrovni, tak jediný spôsob ako dostať niečo iné ako 0 je,

$$\overline{v}(A \to (B \to C)) = 0$$

$$\overline{v}((A \to B) \to (A \to C)) = 2$$

Lebo aj pravá aj ľavá strana sa skladá z implikácií, takže nemôže nadobúdať iné hodnoty ako 0 a 2. Z toho ale opäť dostávame, že

$$\overline{v}(A \to B) = 0$$

$$\overline{v}(A \to C) = 2$$

Z toho zjavne nemôže byť $\overline{v}(A) = 2$ (premyslite si prečo). Vyskúšame obe zvyšné možnosti.

- $\overline{v}(A) = 0$: Z toho jasne vyplynie, že $\overline{v}(B) = 0$ a $\overline{v}(B \to C) = 0$. Ďalej dostávame, že $\overline{v}(C) = 0$. Z toho vidíme, že platí $\overline{v}(A \to C) = 0 \neq 2$, takže tudy cesta nevede.
- $\overline{v}(A) = 1$: Preto $\overline{v}(B) = 2$, a aj $\overline{v}(B \to C) = 2$, ale my chceme, aby to bolo $\overline{v}(A \to B) = 0$, takže ani tudy cesta nevede.

Presvedčili sme sa, že neexistuje také ohodnotenie, že by mala táto axióma inú hodnotu ako 0. Preto **je** fialová.

Podobne sa dá zistiť, že aj axióma $(A3)$ **je** fialová.

Pozrime sa teraz na to, či pravidlo modus ponens prenáša fialovosť. Predpokladajme, že formula A a aj formula $A \to B$ je fialová. Skúsme zistiť, či z toho vyplýva, že aj B je fialová. Zoberme si ľubovoľnú valuáciu v. O nej vieme, že platí $\overline{v}(A) = 0$ a $\overline{v}(A \to B) = 0$. Keď sa pozrieme do tabuľky pre implikáciu, zistíme, že toto môže nastať jedine v prípade, keď aj $\overline{v}(B) = 0$. Z toho dostávame, že aj B je fialová. Modus ponens teda prenáša fialovosť.

- Pozrime sa teraz na formulu tvaru $A \to A$. Ak $\overline{v}(A) = 1$, tak $\overline{v}(A \to A) = 2$. Preto táto formula nie je fialová. Lenže my vieme, že je dokázateľná z axióm výrokovej logiky. To nám hovorí hneď niekoľko zaujímavých vecí:
  - Na dôkaz formuly $A \to A$ určite potrebujeme použiť axiómu $(A1)$. To vieme z toho, že axiómy $(A2)$ a $(A3)$ sú fialové a modus ponens prenáša fialovosť. Všetko čo vieme dokázať z $(A2)$ a $(A3)$ je fialové, takže formula $A \to A$ určite nepatrí do tejto kategórie.
  - Systém, v ktorom sú ako axiómy len $(A2)$ a $(A3)$ a odvodzovacie pravidlo modus ponens nie je úplný (vzhľadom na štandardnú sémantiku), lebo sme našli formulu ($A \to A$), ktorá je tautológia, ale nevieme ju v tomto systéme dokázať, lebo všetky formuly v tomto systéme sú fialové a táto nie je.
- Podobne sa dajú nájsť podobné sémantiky, ktoré nám ukážu, že keď vynecháme $(A2)$ resp. $(A3)$, bude zostávajúci systém neúplný. Môžete ich skúsiť vymyslieť. Nezabudnite, že nestačí len vyrobiť sématiku, treba tiež nájsť vlastnosť, ktorú majú všetky dokázateľné formuly v tom systéme, ale nemá ju nejaká formula, ktorá bola dokázateľná vo výrokovej logike.
- **Úloha:** O nasledujúcich systémoch zistite, či sú úplne a korektné. V každom systéme je jediné odvodzovacie pravidlo a tým je modus ponens, jazyk je rovnaký ako vo výrokovej logike. Jediné, čo sa líši sú axiómy.

B-systém:	$(A2)$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
	$(A3)$	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
	$(B1)$	$((\neg B \to \neg A) \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$

C-systém:	$(A1)$	$A \to (B \to A)$
	$(A2)$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
	$(A3)$	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
	$(C1)$	$((A \to B) \to C) \to (C \to (\neg A \to \neg B)$

D-systém:	$(D1)$	$(A \to B) \to (B \to A)$

E-systém:	$(A1)$	$A \to (B \to A)$
	$(A2)$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
	$(E1)$	$\neg\neg A \to A$
	$(E2)$	$A \to \neg\neg A$
	$(E3)$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Na riešenie sme mohli používať fakt, že výroková logika je korektná a úplná ako aj fakt, že keď vynecháme ľubovoľnú axiómu, dostaneme neúplný systém.

- **Riešenie:**

  - **B-systém**: Systém je **korektný** a **neúplný**.

    Korektnosť vyplýva z toho, že všetky axiómy tohto systému sú tautológie. Stačí overiť axiómu $(B1)$.

    To, že je systém neúplný môžeme zistiť tak, že si všimneme, že axióma $(B1)$ sa dá dokázať z $(A2)$ a $(A3)$. Napríklad takto:

    1. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ $(A3)$
    2. $\vdash ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (((\neg B \to \neg A) \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B))$ $(A2)$
    3. $\vdash ((\neg B \to \neg A) \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$ $(MP\ 1, 2)$

    To znamená, že sa v tomto systéme dá dokázať presne to, čo sa dá dokázať len pomocou $(A2)$ a $(A3)$ a takýto systém je neúplný, ako sme sa presvedčili v predchádzajúcej úlohe.

  - **C-systém**: Systém je **nekorektný** a **úplný**.

    Nekorektnosť je spôsobená tým, že axióma $(C1)$ nie je tautológia. To spôsobuje, že sa dajú dokázať aj tvrdenia, ktoré nie sú tautológie.

    Úplnosť tohto systému je vidno z toho, že obsahuje všety tri axiómy výrokovej logiky, preto je v tomto systéme dokázateľné aspoň to, čo je dokázateľné vo výrokovej logike. O výrokovej logike vieme, že je úplná, takže sú v nej dokázateľné všektky tautológie.

  - **D-systém**: Systém je **nekorektný** a **neúplný**.

    Axióma $(D1)$ nie je tautológia. Môžete to overiť. Z toho dostávame nekorektnosť.

    Ukázať neúplnosť je v tomto prípade trochu ťažšie. Musíme nájsť takú formulu, ktorá nie je v tomto systéme dokázateľná, ale je tautológia. Pomôžeme si opäť novou sémantikou. Tento raz nám stačí určiť interpretáciu implikácie, lebo negácia sa v axióme nevyskytuje. Zafunguje napríklad taká sémantika (implikácia sa správa ako xor):

$\to$	0	1
0	0	1
1	1	0

    Definovať sémantiku nestačí, potrebujeme ešte určiť vlastnosť, ktorú má axióma a prenáša sa použitím pravidla modus ponens. Musí to byť taká vlastnosť, že existuje tautológia, ktorá ju **nemá**. Budeme hovoriť, že formula je *oranžová*, ak pri ľubovoľnom ohodnotení prvotných premenných bude mať hodnotu 0.

    Môžete sa presvedčiť, že axióma $(D1)$ je oranžová a modus ponens prenáša oranžovosť. Vieme, že všetko, čo je dokázateľné v D-systéme je onranžové. Pozrime sa ale na formulu $(A1)$ $A \to (B \to A)$. Táto formula nie je oranžová, lebo ak $\overline{v}(A) = 0$ a $\overline{v}(B) = 1$, tak

$\overline{v}(A \rightarrow (B - \ A)) = 1$. Tak sme našli tautológiu, ktorá v tomto systéme určite nie je dokázateľná.

– **E-systém**: Systém je **korektný** a **úplný**.

Korektnosť vyplýva z toho, že všetky axiómy sú tautológie (môžete sa presvedčiť) a modus ponens je korektné pravidlo.

Úplnosť v tomto prípade môžeme dokázať tak, že ukážeme, že z týchto axiom vieme dokázať všetky tri axiómy výrokovej logiky. Keďže prvé dve sa v tomto systéme priamo nachádzajú, tak stačí dokázať axiómu $(A3)$.

Vedeli by sme ju dokázať, keby platila veta o dedukcií:

1.		$\vdash$	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$	$(E3)$
2.	$(\neg B \rightarrow \neg A)$	$\vdash$	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	(VD)
3.		$\vdash$	$A \rightarrow \neg\neg A$	$(E2)$
4.	A	$\vdash$	$\neg\neg A$	(VD)
5.	$(\neg B \rightarrow \neg A),\ A$	$\vdash$	$\neg\neg B$	$(MP2, 4)$
6.		$\vdash$	$\neg\neg B \rightarrow B$	$(E1)$
7.	$(\neg B \rightarrow \neg A),\ A$	$\vdash$	B	$(MP5, 6)$
8.	$(\neg B \rightarrow \neg A)$	$\vdash$	$A \rightarrow B$	(VD)
9.		$\vdash$	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(VD)

Ale mohli sme vôbec vetu o dedukcií použiť? Treba si uvedomiť, že vetu o dedukcií sme dokázali len pre výrokovú logiku. Nemusí platiť všeobecne pre ľubovoľný systém. Našťastie v tomto systéme veta o dedukcií platí. Prečo? Lebo pri dôkaze vety o dedukcií pre výrokovú logiku sa používajú len axiómy $(A1)$ a $(A2)$. Nikde sa nepoužije axióma $(A3)$ (presvedčte sa). Preto môžeme použiť presne ten istý dokaz vety o dedukcií aj pre E-systém.

- Aby som to zhrnula. Ak chcete dokázať korektnosť nejakého systému, treba overiť, či sú jeho axiómy tautológie a či odvodzovacie pravidlá sú korektné (z tautológií odvodia len tautológie)

  Pri úplnosti je to trochu zložitejšie. Ak chcete ukázať úplnosť nejakého systému (s rovnakým jazykom a sémantikou ako sme mali pri výrokovej logike), asi najjednoduchšie je v tomto systéme dokázať všetky 3 axiómy výrokovej logiky. Treba si však dať pozor na to, či môžete pri tom používať vety, ktoré sme dokázali pre výrokovú logiku.

  Ak je nejaký systém neúplný, treba nájsť nejakú vlastnosť, ktorú majú všetky dokázateľné v tomto systéme (majú ju axiómy a odvodzovacie pravidlá ju prenášajú), ale nemajú ju všetky tautológie.