

ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – CVIČENIE #7

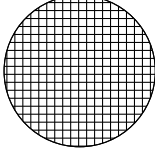
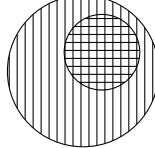
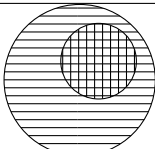
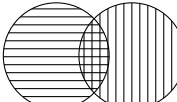
Anna Dresslerová

16. novembra 2016

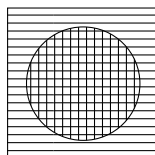
- Minule sme skúmali nejaké nové formálne systémy o zisťovali sme, či sú korektné a úplné. Zistili sme, že existujú všetky možné kombinácie. Rozhodla som sa k tomu ešte trochu vrátiť a ukázať ako to vyzerá graficky. Legenda:

-  - dokázateľné
 - tautológie

Potom vzťahy medzi týmito množinami vyzerajú takto:

	úplný	neúplný
korektný		
nekorektný		

- Potom sme sa pozreli na sporný systém. Sporný systém je definovaný tak, že sú v ňom dokázateľné všetky formuly. Graficky to vyzerá takto:



Štvorec na obrázku znázorňuje všetky formuly. Z toho vyplýva, že ak je systém sporný, potom určite nie je korektný (všetky formuly nie sú tautológie), ale je úplný.

- Ďalší pojem, ktorý sa objavil na prednáške bol pojem *sporná teória*. Teória je sporná, ak sa z nej dá dokázať ľubovoľná formula. Dá sa ukázať, že sporná teória nemá model. V skutočnosti platí ešte niečo viac: Teória je sporná $\iff$ nemá model.

Čo je ešte zaujímavejšie, dá sa ukázať aj to, že toto tvrdenie je ekvivalentné so silnou formou vety o úplnosti. Konkrétne:

- $(T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi) \iff (T \text{ má model} \Rightarrow T \text{ je bezsporná})$ alebo tiež $(T \text{ je sporná} \Rightarrow T \text{ nemá model})$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: $T \text{ je sporná} \Rightarrow T \vdash \varphi, T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \models \varphi, T \models \neg\varphi \Rightarrow T \text{ nemá model}$.

$\Leftarrow$: $T \vdash \varphi \Rightarrow T \cup \{\neg\varphi\} \text{ je sporná} \Rightarrow T \cup \{\neg\varphi\} \text{ nemá model} \Rightarrow \text{v každom modeli } T \text{ musí byť formula } \varphi \text{ pravdivá, čiže } T \models \varphi$.

- $(T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi) \iff (T \text{ je bezsporná} \Rightarrow T \text{ má model})$ alebo tiež $(T \text{ nemá model} \Rightarrow T \text{ je sporná})$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: $T \text{ nemá model} \Rightarrow T \models \varphi, T \models \neg\varphi \Rightarrow T \vdash \varphi, T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \text{ je sporná}$.

$\Leftarrow$: $T \models \varphi \Rightarrow T \cup \{\neg\varphi\} \text{ nemá model} \Rightarrow T \cup \{\neg\varphi\} \text{ je sporná} \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Rozmyslite si, prečo platia všetky implikácie v dôkazoch.

- Potom sme sa pozreli na to, čo sa v skutočnosti deje vo vnútri dôkazu vety o úplnosti. Zistili sme, že sa v skutočnosti generuje pre každú formulu jej dôkaz (veľmi dlhý). Viac nájdete v poznámkach od Kuka, ktoré by mali byť na stránke niekde blízko týchto poznámok.