Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #9

Anna Dresslerová

5. decembra 2016

- Jazyk predikátovej logiky sa skladá z
  - premenných $x_1, x_2, x_3, x, y, z, \ldots$
  - funkčných symbolov (majú árnosť) $f, g, h, \ldots$
  - predikátových symbolov (majú árnosť) $P, Q, R, \ldots$
  - logických spojok $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg$
  - kvantifikátorov $\forall, \exists$
  - pomocných symbolov $[,], (,)$
- Term je niečo čo má predstavovať postuponosť operácií. Formálne
  (1) Premenná je term.
  (2) Ak f je n-árny funkčný symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je term.
  (3) Každý term vznikne použitím konečného počtu (1) a (2)
- Formula je niečo čo predstavuje celé tvrdenie. Formálne
  (1) Ak P je n-árny predikátový symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je formula. Hovoríme jej aj atomická formula.
  (2) Ak A a B sú formuly, potom $(A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B), (A \wedge B), (A \vee B), \neg A$ sú formuly.
  (3) Ak A je formula a x je premenná, potom aj $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ sú formuly.
  (4) Každá formula vznikne použitím konečného počtu (1), (2) a (3).
- Podformula A' formuly A je formula, ktorá je "podreťazcom"formuly A.
- **Úloha:** V našom jazyku sú tieto znaky:
  - funkčné symboly: $S, +, 0$
  - predikátové symboly: $P, =$
  - premenné: x, y

  Určte, či sú nasledujúce reťazce formuly, termy, alebo ani jedno.

  a) $S(x) = 0$
  b) $P(S(0), P(x))$
  c) $S(x + y)$
  d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(S(x)))$
  e) $S(P(x))$
  f) $(\exists x)((P(0) \wedge (\forall y)P(x + y)) \rightarrow \neg(x = y))$
  g) $S(S(S(0)))$
  h) $(S(0) + S(x)) + (S(x) + S(S(y)))$
- **Riešenie:**
  - formuly: a), d), f)
  - termy: c), g), h)
  - ani jedno: b) (lebo do predikátového symbolu môžeme dávať iba termy), e) (lebo do funkčného symbolu idú tiež len termy a nie predikátové symboly)
- **Úloha:** Nájdite všetky atomické podformuly formuly f) a popíšte, ako bola formula vystavaná.
- **Riešenie:** Atomické formuly sú $P(0)$, $P(x + y)$ a $(x = y)$. Formula vznikla nasledovne:

$$
\begin{aligned}
& P(0) && (1)\\
& P(x+y) && (1)\\
& (x=y) && (1)\\
& \neg(x=y) && (2)\\
& (\forall y)P(x+y) && (3)\\
& P(0)\wedge(\forall y)P(x+y) && (2)\\
& (P(0)\wedge(\forall y)P(x+y))\rightarrow\neg(x=y) && (2)\\
& (\exists x)((P(0)\wedge(\forall y)P(x+y))\rightarrow\neg(x=y)) && (3)
\end{aligned}
$$

- **Poznámka:** V riešení sú vymenované všetky podformuly formuly f).
- Ďalšiu časť cvičenia sme sa venovali sémantike. Pokúšali sme sa nájsť teóriu, ktorej jediný model budú prirodzené čísla s nulou a funkciou nasledovníka. Viac nájdete v Kukových poznámkach, ktoré sú niekde blízko týchto poznámok.