

1. V tejto úlohe sa budeme hrať s novým systémom výrokovej logiky $\mathfrak{C}$ (podľa Churcha) s logickými spojkami $\{\rightarrow, \mathfrak{f}\}$, (t.j. jazyk *neobsahuje negáciu*, ale obsahuje nový symbol $\mathfrak{f}$). V systéme $\mathfrak{C}$ máme MP a axiómy

$$\begin{aligned} (A1) \quad & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A2) \quad & [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)] \\ (C) \quad & ((\varphi \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow \varphi \end{aligned}$$

Štandardne interpretujeme $\mathfrak{f}$ ako logickú konštantu „false“ (0) a pri takejto interpretácii sú všetky axiómy tautológie. Rozmyslite si, že $(\varphi \rightarrow \mathfrak{f})$ sa dá interpretovať ako „ $\neg\varphi$ “ a že v $\mathfrak{C}$ platí metaveta o dedukcii.

V systéme $\mathfrak{C}$ formálne dokážte vety $\mathfrak{f} \rightarrow p$ a $(p \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow (p \rightarrow q)$. Dokážte metavetu o dôkaze sporom: Ak $T, p \rightarrow \mathfrak{f} \vdash_{\mathfrak{C}} \mathfrak{f}$, tak $T \vdash_{\mathfrak{C}} p$.

Fixujme množinu prvotných formúl a označme $F_{\neg}$ jazyk všetkých formúl zložených z $\{\rightarrow, \neg\}$ a $F_{\mathfrak{f}}$ jazyk všetkých formúl zložených z $\{\rightarrow, \mathfrak{f}\}$. Definujme zobrazenie σ z $F_{\neg}$ do $F_{\mathfrak{f}}$ nasledovne: $\sigma(p) = p$, $\sigma(\neg\varphi) = (\varphi \rightarrow \mathfrak{f})$ a $\sigma(\varphi \rightarrow \psi) = \sigma(\varphi) \rightarrow \sigma(\psi)$. Jednoducho všetky podformule tvaru $\neg\varphi$ nahradíme $\varphi \rightarrow \mathfrak{f}$. Napríklad axiómu A3 systému $\mathfrak{L}$ z prednášky by sme preložili takto: $\sigma(A3) = \sigma[(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] = [(\psi \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow (\varphi \rightarrow \mathfrak{f})] \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) = A3'$. Dokážte vetu A3' v $\mathfrak{C}$ a zdôvodnite, že $\vdash_{\mathfrak{L}} \varphi \implies \vdash_{\mathfrak{C}} \sigma(\varphi)$. [6b]

2. Uvažujme systém $\mathfrak{L}$ z prednášky a pridajme mu symbol $\oplus$ (xor, „buď, alebo“), ktorý štandardne interpretujeme $v(p \oplus q) = 1$ ak $v(p) \neq v(q)$, teda buď je pravda p alebo q . Systém $\mathfrak{L}$ nevie dokázať žiadnu tautológiu obsahujúcu $\oplus$. Pridajte do $\mathfrak{L}$ nové axiómy (ľubovoľné, najviac 5) a dokážte, že váš systém je úplný. [4b]

3. Majme množinu mužov a žien. Každý muž má konečný zoznam žien, utriedený podľa preferencie. Podobne, každá žena má konečný zoznam mužov, utriedený podľa preferencie. Popárujme teraz niektorých mužov s niektorými ženami. Budeme hovoriť, že takéto párovanie je *stabilné*, ak neexistuje dvojica $(M, \tilde{Z})$ taká, že M ani $\tilde{Z}$ nie sú s nikým spárovaní, ale mohli by byť (M má $\tilde{Z}$ na zozname a $\tilde{Z}$ má M na zozname) a neexistuje dvojica $(M, \tilde{Z})$ taká, že M tvorí pár s $\tilde{z}$ a $\tilde{Z}$ tvorí pár s m , a pritom M preferuje $\tilde{Z}$ pred $\tilde{z}$ a $\tilde{Z}$ preferuje M pred m . Pre konečnú množinu mužov a žien vždy existuje stabilné párovanie. Dokážte, že stabilné párovanie existuje vždy aj pre nekonečné množiny mužov a žien. [5b]

1. V tejto úlohe sa budeme hrať s novým systémom výrokovej logiky $\mathfrak{C}$ (podľa Churcha) s logickými spojkami $\{\rightarrow, \mathfrak{f}\}$, (t.j. jazyk *neobsahuje negáciu*, ale obsahuje nový symbol $\mathfrak{f}$). V systéme $\mathfrak{C}$ máme MP a axiómy

$$\begin{aligned} (A1) \quad & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A2) \quad & [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)] \\ (C) \quad & ((\varphi \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow \varphi \end{aligned}$$

Štandardne interpretujeme $\mathfrak{f}$ ako logickú konštantu „false“ (0) a pri takejto interpretácii sú všetky axiómy tautológie. Rozmyslite si, že $(\varphi \rightarrow \mathfrak{f})$ sa dá interpretovať ako „ $\neg\varphi$ “ a že v $\mathfrak{C}$ platí metaveta o dedukcii.

V systéme $\mathfrak{C}$ formálne dokážte vety $\mathfrak{f} \rightarrow p$ a $(p \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow (p \rightarrow q)$. Dokážte metavetu o dôkaze sporom: Ak $T, p \rightarrow \mathfrak{f} \vdash_{\mathfrak{C}} \mathfrak{f}$, tak $T \vdash_{\mathfrak{C}} p$.

Fixujme množinu prvotných formúl a označme $F_{\neg}$ jazyk všetkých formúl zložených z $\{\rightarrow, \neg\}$ a $F_{\mathfrak{f}}$ jazyk všetkých formúl zložených z $\{\rightarrow, \mathfrak{f}\}$. Definujme zobrazenie σ z $F_{\neg}$ do $F_{\mathfrak{f}}$ nasledovne: $\sigma(p) = p$, $\sigma(\neg\varphi) = (\varphi \rightarrow \mathfrak{f})$ a $\sigma(\varphi \rightarrow \psi) = \sigma(\varphi) \rightarrow \sigma(\psi)$. Jednoducho všetky podformule tvaru $\neg\varphi$ nahradíme $\varphi \rightarrow \mathfrak{f}$. Napríklad axiómu A3 systému $\mathfrak{L}$ z prednášky by sme preložili takto: $\sigma(A3) = \sigma[(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] = [(\psi \rightarrow \mathfrak{f}) \rightarrow (\varphi \rightarrow \mathfrak{f})] \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) = A3'$. Dokážte vetu A3' v $\mathfrak{C}$ a zdôvodnite, že $\vdash_{\mathfrak{L}} \varphi \implies \vdash_{\mathfrak{C}} \sigma(\varphi)$. [6b]

2. Uvažujme systém $\mathfrak{L}$ z prednášky a pridajme mu symbol $\oplus$ (xor, „buď, alebo“), ktorý štandardne interpretujeme $v(p \oplus q) = 1$ ak $v(p) \neq v(q)$, teda buď je pravda p alebo q . Systém $\mathfrak{L}$ nevie dokázať žiadnu tautológiu obsahujúcu $\oplus$. Pridajte do $\mathfrak{L}$ nové axiómy (ľubovoľné, najviac 5) a dokážte, že váš systém je úplný. [4b]

3. Majme množinu mužov a žien. Každý muž má konečný zoznam žien, utriedený podľa preferencie. Podobne, každá žena má konečný zoznam mužov, utriedený podľa preferencie. Popárujme teraz niektorých mužov s niektorými ženami. Budeme hovoriť, že takéto párovanie je *stabilné*, ak neexistuje dvojica $(M, \tilde{Z})$ taká, že M ani $\tilde{Z}$ nie sú s nikým spárovaní, ale mohli by byť (M má $\tilde{Z}$ na zozname a $\tilde{Z}$ má M na zozname) a neexistuje dvojica $(M, \tilde{Z})$ taká, že M tvorí pár s $\tilde{z}$ a $\tilde{Z}$ tvorí pár s m , a pritom M preferuje $\tilde{Z}$ pred $\tilde{z}$ a $\tilde{Z}$ preferuje M pred m . Pre konečnú množinu mužov a žien vždy existuje stabilné párovanie. Dokážte, že stabilné párovanie existuje vždy aj pre nekonečné množiny mužov a žien. [5b]