1. Definujte termy (syntakticky, nie sémanticky).
   Nech $S, +, 0$ sú funkčné symboly; $P, =$ sú predikátové symboly; x, y sú premenné. Určite, čo z nasledujúceho sú termy, čo sú formuly a čo nie sú ani termy ani formuly:
   (a) $S(x) = 0$, (b) $P(s(0), P(x))$, (c) $S(x + y)$, (d) $(\forall x)(P(x) \to P(S(x)))$. [2b]

2. (a) Vo FS PL dokážte prenexnú operáciu $(\forall x)(A \to B) \leftrightarrow ((\exists x)A \to B)$, kde x nie je voľná v B (môžete použiť prvú a druhú prenexnú operáciu, tj. $(Qx)\neg A \leftrightarrow \neg(\bar{Q}x)A$ a $(Qx)(B \to A) \leftrightarrow (B \to (Qx)A)$).
   (b) Preveďte nasledujúcu formulu do prenexného normálneho tvaru:
   $(\exists w)((\forall y)(\neg(\forall x)B(x, y) \wedge A(x, y, w)) \to (\exists z)\neg(A(z, z, w) \to (\forall y)R(x, y, z)))$ [4b]

3. Uvažujme Robinsonovu aritmetiku (RA), tj. teóriu v predikátovej logike s rovnosťou so špeciálnymi axiómami:

   (Q1) $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \to x = y)$
   (Q2) $(\forall x)\neg(S(x) = 0)$
   (Q3) $(\forall x)(\neg(x = 0) \to (\exists y)(x = S(y)))$
   (Q4) $(\forall x)(x + 0 = x)$
   (Q5) $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$
   (Q6) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$
   (Q7) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

   Označme $\bar{n} = \underbrace{S(S(\dots S}_{n}(0)\dots))$. Dokážte: (a) $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, (b) $(\forall x)((\forall y)\neg(x = S(y)) \to (\forall y)(y \cdot x = 0))$. [4b]

4. Pre každú dvojicu teória T, formula A dokážte $T \vdash A$ vo FS PL, alebo nájdite model $\mathcal{M} \models T$ taký, že $\mathcal{M} \not\models A$. ($\mathsf{LO} = \{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \to (y < z \to x < z)),\ (\forall x)(\forall y)(\neg(x < y) \to (\neg(x = y) \to y < x)),\ (\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg(y < x))\}$, RA je Robinsonova aritmetika, tj. množina axióm (Q1)-(Q7) z úlohy 3.)
   (a) $T = \{(\forall x)(R(x) \to (P(x) \vee Q(x))), (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)), (\forall x)(Q(x) \to R(x))\}$, $A\colon (\exists x)(R(x) \wedge \neg Q(x))$
   (b) $T = \{(\forall x)(x + 0 = x)\}$, $A\colon (\exists x)(0 + x = x)$
   (c) $T = \{(\forall x)(\forall y)\neg(x = y)\}$, $A\colon (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$
   (d) $T = \mathsf{LO}$, $A\colon \neg(\exists x)(c < x) \to (\forall x)(\neg(x < c) \to x = c)$
   (e) $T = \mathsf{LO} \cup \mathsf{RA}$, $A\colon \bar{1} < \bar{3}$ [5b]