

$$\textcircled{1} \frac{\vdash A}{B_1, \dots, B_n \vdash A} \quad \textcircled{2} \frac{\vdash A}{B \vdash A} \quad \text{preto} \quad \frac{\vdash A}{\vdash B \rightarrow A}$$

$$\textcircled{3} \frac{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m \quad B_1, \dots, B_m \vdash C_1, \dots, C_k}{A_1, \dots, A_n \vdash C_1, \dots, C_k} \quad \text{TRANSITIVNOSŤ}$$

$$\textcircled{4} \frac{\vdash A_1, \dots, A_n \quad A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{\vdash B_1, \dots, B_m}$$

$$\textcircled{5} A, B \vdash C \Leftrightarrow B, A \vdash C$$

Rovnoprávnosť použitia formul v dôkaze, nezávisle od poradia vymenovania

$$\textcircled{6} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ \Leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$\textcircled{7} \text{ Ak } f_1, \dots, f_n \text{ a } g_1, \dots, g_m \text{ sú dôkazy formul } f_i \text{ a } g_m, \\ \text{potom } f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \text{ a } g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_n \text{ sú tiež dôkazy}$$

$$\textcircled{8} \text{ Ak } f_1, \dots, f_n \text{ je dôkaz, potom } f_1, \dots, f_k \vdash f_{k+1}, \dots, f_n$$

$$\textcircled{9} \text{ Pletí } A, A \rightarrow B \vdash B, \text{ keďže má odvozenie } A \rightarrow B, A, B \\ \text{alebo } A, A \rightarrow B, B$$

$$(A1) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(A2) \quad ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

$$(A3) \quad ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

(MP) *modus ponens*

(VD) *vetta o dedukcii*

$$T1^\circ \quad \vdash A \rightarrow A \quad \text{oápruvávanie (E. Tarski: Výklad pravdy a logiky, str. 15)}$$

$$1. \vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$$

$$2. \vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (A2)$$

$$3. \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (1, 2, MP)$$

$$4. \vdash A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A1)$$

$$5. \vdash A \rightarrow A \quad (3, 4, MP)$$

$$T2^\circ \quad \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{Lemma 1, str. 17})$$

$$1. \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad (A1)$$

$$2. \neg A \vdash \neg B \rightarrow \neg A \quad (VD) \quad (\text{vetta o dedukcii, str. 16})$$

$$3. \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (A3)$$

$$4. \neg A \vdash B \rightarrow A \quad (2, 3, MP)$$

$$5. \vdash \neg A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (VD)$$

$$T3^\circ \quad \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$1. \vdash \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \quad (T2^\circ)$$

$$2. \neg\neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \quad (VD)$$

$$3. \vdash (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (A3)$$

$$4. \neg\neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (2, 3, MP)$$

$$5. \neg\neg A \vdash A \quad (VD)$$

$$\{\neg\neg A, \neg\neg A\} \vdash A$$

$$6. \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$T4^\circ \quad \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$1. \vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A \quad (T3^\circ)$$

$$2. \vdash ((\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)) \quad (A3)$$

$$3. \vdash A \rightarrow \neg\neg A \quad (1, 2, MP)$$

(2) ŠUSTER

$$T5^\circ \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

1. $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$ (T3)
2. $\neg \neg A \vdash A$ (VD)
3. $A \rightarrow B, \neg \neg A \vdash B$ (2., MP)
4. $A \rightarrow B, \neg \neg A \vdash \neg \neg B$ (T4, 3., MP)
5. $A \rightarrow B \vdash \neg \neg A \rightarrow \neg \neg B$ (4., VD)
6. $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ (5., A3, MP)
7. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (6., VD)

$$T6^\circ \vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \quad (\text{Arit' nedeke tabulky pre } \rightarrow)$$

1. $A, A \rightarrow B \vdash B$ (MP)
2. $A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$ (1., VD)
3. $A \vdash \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ (T5, MP) ← obmena
4. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ (VD)

$$T7^\circ \vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$$

1. $\vdash \neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$ (T6)
2. $\neg A \vdash \neg(\neg A \rightarrow A)$ (VD a krit)
3. $\vdash \neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$ (VD)
4. $\vdash [\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)] \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A]$ (A3)
5. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (3., 4., MP)

indukcia dokazu

1. $\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash A$ (MP)
2. $\neg A \vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (1., VD) *meta o dedukcii*
3. $[(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow [\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)]$ (T5)
4. $\neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$ (2., 3., MP)
5. $\neg A \vdash \neg(\neg A \rightarrow A)$ (4., VD)
6. $\vdash \neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$ (VD)
7. $\vdash [\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)] \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A]$ (A3)
8. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (6., 7., MP)

B1) $\frac{A \wedge B \vdash A}{\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A}$ $A \wedge B = \neg\neg(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \rightarrow \neg B)$ $A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \neg(A \rightarrow \neg B)$

1. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ (T2°) *děly vytvornit - obměnu implikace*
2. $\vdash [\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A]$ (T5°) *obměna*
3. $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A$ (1, 2, MP)
4. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\neg A$ (VD)
5. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ (T3°)
6. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$ (4, 5, MP)

B2) $\frac{A \wedge B \vdash B}{\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B}$

1. $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ (A1) *děly rovnako ako v predchádzajúcom prípade $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$*
2. $\vdash [\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg B]$ (T5°)
3. $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg B$ (1, 2, MP)
4. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\neg B$ (VD)
5. $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$ (T3°)
6. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B$ (4, 5, MP)

B2) $\frac{A, B \vdash A \wedge B}{A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)}$

1. $\vdash A \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$ (T6°) $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$
2. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (T4°)
3. $A, B \vdash \neg\neg B$ (2, VD)
4. $A, B \vdash (\neg\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$ (1, VD)
5. $A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$ (3, 4, MP)

B3) $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ $A \leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

B4) $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ podľa B1

B5) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$ podľa B2)

B6) $\vdash A \leftrightarrow B$ potom $(\vdash A \Leftrightarrow \vdash B)$

(4) SUBSTITUTION

$$\text{B7) } \frac{\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)}{\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)} \\ (A \wedge B) \vdash (B \wedge A)$$

from substitution rule $\vdash$

$$A \wedge B \vdash A, B \vdash B, A \vdash B \wedge A \\ A \wedge B \vdash B \wedge A \\ \vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$$

2) substitution rule $\vdash$ "if a theorem"

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta_1, \dots, \beta_m \\ \beta_1, \dots, \beta_m \vdash \gamma_1, \dots, \gamma_k \\ \hline \alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \gamma_1, \dots, \gamma_k$$

3) If $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\beta_1, \dots, \beta_n$ side by side, then $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_n \beta_n$ is also a theorem (substitution rule, in a formal system $\alpha_i \beta_i$ is a theorem β_i)

$$\text{B8) } \vdash ((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$

$$\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$

$$((A \wedge B) \wedge C) \vdash (A \wedge B), C \vdash A, B, C \vdash A, B \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$$

$$\text{B9) } \vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B) \dots))) \leftrightarrow ((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B)$$

$$\left. \begin{array}{l} (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)) \vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \\ (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots), (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)) \vdash B \end{array} \right\} \text{VD}$$

$$\vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)), A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$\vdash (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots), A_2, \dots, A_n$$

$\vdots$

$$\vdash A_n \rightarrow B, A_n$$

$$\vdash B$$

modus ponens

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B) \dots)))$$

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B, A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

$$\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B, A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \vdash B$$

Věta 2.1 (záměna ekvivalentních formulí) Nechť formule A' vznikne z formule A nahrazením některých podformulí $A_1, \dots, A_n$ podformulami $A'_1, \dots, A'_n$.
Když platí $\vdash A_i \leftrightarrow A'_i$, $1 \leq i \leq n$, potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Důsledky věty o záměně ekvivalentních formulí:

$$B10) \quad \vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} (\neg A \rightarrow B)$$

$$A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$\vdash \neg(A \wedge B) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \neg(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B) \stackrel{\text{def}}{=} (\neg A \vee \neg B)$$

$$\text{podobně } \vdash \neg \neg B \leftrightarrow B \quad \text{a} \quad \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$$

na jednom místě to můžeme také

$$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg B)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B), \neg \neg A \vdash \neg B$$

$$\vdash A \rightarrow \neg B, A \quad (T3)$$

$$\vdash \neg B$$

$$B11) \quad \vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\vdash \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg \neg B)$$

(→) obměna

$$(\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$\neg A \rightarrow \neg \neg B, \neg A \vdash B$$

$$\vdash \neg \neg B \vdash B$$

$$\neg(A \vee B) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg A \rightarrow B)$$

$$\leftrightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg \neg B)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$\vdash B \leftrightarrow \neg \neg B$$

$$B12) \quad \vdash A \rightarrow (A \vee B)$$

$$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$A, \neg A \vdash B$$

$$1. \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (T2)$$

$$2. A, \neg A \vdash B \quad (VD)$$

$$3. A \vdash \neg A \rightarrow B$$

$$4. \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$\vdash B \rightarrow (A \vee B)$$

$$\vdash B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

podle definice $\vee$

$$1. B, \neg A \vdash B$$

$$2. B \vdash (\neg A \rightarrow B) \quad (VD)$$

$$3. \vdash B \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (VD)$$

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A$$

$$\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$\vdash A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$\vdash A \rightarrow \neg \neg(A \vee B)$$

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg B$$

$$\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg B$$

$$\vdash \neg B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$\vdash \neg B \rightarrow \neg \neg(A \vee B)$$

Pomocou věty o záměně formulí $\Rightarrow$

6) ŠKISTER

$$A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} (\neg A \rightarrow B)$$

$$A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \neg(A \rightarrow \neg B)$$

B13) $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

$$\vdash (\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \\ 2. \neg A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow A \\ 3. \neg A \rightarrow B, \neg B \vdash A \end{array} \right\} \text{VD}$$

$$\neg A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg B \rightarrow \neg \neg A, \neg B \vdash \neg \neg A \vdash A$$

$$\begin{array}{ll} \neg A \wedge \neg B \vdash (\neg B \wedge \neg A) & (B7) \\ \neg(A \vee B) \vdash \neg(B \vee A) & (B11 - \text{de Morgan}) \\ A \vee B \vdash B \vee A & (\text{obmena}) \end{array}$$

B14) $\vdash ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

$$\begin{array}{ll} (\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C \leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \wedge \neg C)) & (B8) \text{ asociativnost konjunkcie} \\ \neg(A \vee B) \wedge \neg C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg(B \vee C)) & \text{de Morgan} \\ \neg((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow \neg(A \vee (B \vee C)) & \text{de Morgan} \\ ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C)) & (\text{obmena}) \end{array}$$

TEMA 22

Veta (dôkaz rozborom prípadov) Nech T je množina formul a nech A, B, C sú formuly.

$$T, (A \vee B) \vdash C \quad \text{právne vtedy, keď } (T, A \vdash C) \text{ a } (T, B \vdash C)$$

Dôkaz. a) Nech $T, A \vee B \vdash C$.

$$T, A \vdash T, A \vee B \vdash C$$

$$T, B \vdash T, A \vee B \vdash C$$

b) Nech $(T, A \vdash C) \text{ a } (T, B \vdash C)$.

$$T \vdash A \rightarrow C$$

$$T \vdash B \rightarrow C$$

$$T \vdash \neg C \rightarrow \neg A$$

$$T \vdash \neg C \rightarrow \neg B$$

$$T, \neg C \vdash \neg A$$

$$T, \neg C \vdash \neg B$$

$$T, \neg C \vdash \neg A \wedge \neg B$$

$$T \vdash \neg C \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$T \vdash \neg C \rightarrow \neg(A \vee B)$$

$$\alpha \vee \beta \vdash \gamma \Leftrightarrow (\alpha \vdash \gamma) \wedge (\beta \vdash \gamma)$$

SKUPINA 7

B15 $\vdash (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

1. $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ (B12)

2. $\vdash A \rightarrow (A \vee C)$

3. $A \vdash A \vee B$

4. $A \vdash A \vee C$

5. $A \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (B2)

1. prípad $(\alpha \vdash \gamma)$

$B \wedge C \vdash B$

$B \wedge C \vdash C$

(B1)

$\vdash B \rightarrow B \vee A$

$\vdash C \rightarrow C \vee A$

(B12)

$B \wedge C \rightarrow A \vee B$

$B \wedge C \vdash A \vee C$

$\Rightarrow B \wedge C \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

2. prípad $(\beta \vdash \gamma)$

Veta o rozložení případů nám dává $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

$\neg A, A \vee B \vdash B$ (když $\neg A, A \rightarrow B \vdash B$)

$\neg A, A \vee C \vdash C$ ($\neg A, A \rightarrow C \vdash C$)

proto $(A \vee B) \wedge (A \vee C), \neg A \vdash B \wedge C \leftarrow$ PODROBNĚJŠÍ KEČPÍŠAŤ NA CÍČEN

$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash (\neg A \rightarrow (B \wedge C))$

$A \vee (B \wedge C)$

$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

□

B16 $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$\vdash (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C)) \Leftrightarrow ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C))$

$\vdash (\neg A \vee \neg(B \vee C)) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge C))$

$\vdash \neg(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow \neg((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$\vdash (A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

podle de Morganovy B15

de Morgan

de Morgan

de Morgan

C1) $\vdash (A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow \neg A$

$$\begin{array}{cc} T_1 & T_4 \\ \vdash A \rightarrow A & \vdash \neg\neg(A \rightarrow A) \end{array}$$
$$\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A \vdash \neg A \quad (\text{MP})$$
$$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A) \vdash \neg A \quad (\text{obmena pravdnika})$$
$$\vdash (A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow \neg A \quad (v0)$$

e2 $\vdash (7A \rightarrow 7B) \rightarrow ((7A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$\vdash (A \rightarrow A) \quad (T7)$$
$$\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \quad (\text{disjonction de T2})$$
$$\boxed{TA}, TA \rightarrow TB, TA \rightarrow B \vdash TB, B \quad \boxed{T_2} \quad \boxed{7(A \rightarrow A)}$$

čel'ba de' chodit'
podla Tz

$$7A \rightarrow 7B, 7A \rightarrow B \vdash (7A) \rightarrow 7(A \rightarrow A) \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow A \vdash A$$

(columna A3)

(T₁, NP)

$$\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (VD)$$
$$\frac{T}{\underbrace{7A, 7A \rightarrow 7B, 7A \rightarrow B}_{T_1}}$$

T + B

T - TB

$$\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \quad (\text{deductio ad absurdum})$$
$$\vdash \vdash \neg(A \rightarrow A)$$
$$(\neg A, T_1) \vdash \neg(A \rightarrow A)$$
$$\overline{T}_i \vdash \neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow A) \quad (v0)$$
$$\top, \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{given } A5)$$
$$\vdash (A \rightarrow A) \quad (T1)$$
$$T_7 + A$$
$$\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (vi)$$

(9) SÚSTĚRA

$$\textcircled{C3} \quad \vdash (\neg A \rightarrow \textcircled{B}) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$$

$$\begin{aligned} &\vdash A \leftrightarrow \neg \neg B \quad (T3, T4) \\ &\vdash (\neg A \rightarrow \textcircled{\neg \neg B}) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad \text{dosazením ekvivalentní dovozu} \quad (A3) \end{aligned}$$

$$\textcircled{C4} \quad \vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$$

$$\vdash (\neg \neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$$

ale v předchozím příkladě (C) dosazením ekvivalentní dovozu (A3)

$$\textcircled{C5} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C \quad (VD)$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (VD)$$

$$\textcircled{C6} \quad \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\textcircled{A \wedge B} \rightarrow C) \quad (B9)$$

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((\textcircled{B \wedge A}) \rightarrow C) \quad (\text{zároveň ne ekvivalentní})$$

$$\vdash ((\textcircled{B \wedge A}) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (B9)$$

(C7) Nechť T je množina výrokových formul. Následující podmínky
sú ekvivalentní.

a) T je sporná $\stackrel{\text{def}}{=} (\forall \text{ formule}) T \vdash \text{formule}$

b) $\exists$ formula A taká, že $T \vdash A$ a $T \vdash \neg A$.

c) $\exists$ konečná podmnožina T_0 množiny T ($T_0 \subseteq T$) taká,
že T_0 je sporná.

a) $\rightarrow$ b) když nějaký důkaz má, potom se díky ej. konkrétní $A, \neg A$

b) $\rightarrow$ a) 1. $T \vdash A$

2. $T \vdash \neg A$

3. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (T2)

4. $T \vdash A, \neg A \vdash B$ (2x MP, 1, 2, 3)

c) $\rightarrow$ a) $(T_0 \subseteq T)$, T_0 je sporná $(\forall \text{ formule}) T_0 \vdash \text{formule}$
proto $\rightarrow (\forall \text{ formule}) T \vdash \text{formule}$

a) $\rightarrow$ c) Nechť T je sporná.

Proto $T \vdash A$ } oba důkazy obsahují konečný počet formul
 $T \vdash \neg A$ } proto obsahují ej. konečný počet formul z T .
stane se i to T_0

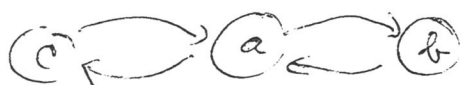
proto v důkazu 1. $T_0 \vdash A$

2. $T_0 \vdash \neg A$

3. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (T2)

4. $T_0 \vdash B$ (2x MP, 1, 2, 3)

$\forall \text{ formule}$



PREDIKÁTOVÁ LOGIKA

(CTP 9)

$$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \quad (A1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (A2)$$

$$((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (A3)$$

$$(\forall x) A \rightarrow A_x[t] \quad (A4)$$

t je term substituovatelný za proměnnou x do formule A
(t.j. žádná volná proměnná v termu t se nestane vázanou po dosazení)

$$(\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)B) \quad (A5)$$

x nemá volný výskyt ve formule A

$$\text{modus ponens} \quad \frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad (PR1) \quad (\Pi_2)$$

$$\text{pravidlo zobecnění} \quad \frac{A}{(\forall x)A} \quad (PR2) \quad (\Pi_3)$$

(x je proměnná)

Oblasti působení kvantifikátorů $(\forall x)[(\forall x)(x < y) \wedge (\forall x)(5 \leq x) \wedge (x+2=8)]$

Přeměnování vázaných proměnných

$$p(y) = (\exists x)(x < y) \\ (\exists y)(y < y)$$

volná proměnná

$$R(x) = (\exists y)(x = y + y) = x \text{ je párové}$$

$$R(y) = (\exists y)(y = y + y) = \text{existuje nula}$$

nikdy není volná

P18° $\frac{(\forall x) A(x)}{A(t)}$ *t je substitucí termínu!*

P19° $\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow (\forall x) B}$ *x nie je volné v A!*

1. $A \rightarrow B \vdash (\forall x)(A \rightarrow B)$ (PR2)
2. $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x) B)$ (AG)
3. $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow (\forall x) B$ (MP)

P20° $\frac{(\forall x) A(x)}{(\forall y) A(y)}$ *volné y nebude väzané!*

$$(\forall x) A(x) \vdash A(y) \vdash (\forall y) A(y)$$

P21° $\vdash (\forall x)(\forall y) A(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x) A(x, y)$

1. $\vdash (\forall x)(\forall y) A(x, y) \rightarrow (\forall y) A(x, y)$ (A4)
2. $\vdash (\forall y) A(x, y) \rightarrow A(x, y)$ (A4)
3. $\vdash (\forall x)(\forall y) A(x, y) \rightarrow A(x, y)$ (Transitívna implikácia, 1., 2.)
4. $\vdash (\forall x)(\forall y) A(x, y) \rightarrow (\forall x) A(x, y)$ (P19°)
5. $\vdash (\forall x)(\forall y) A(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x) A(x, y)$ (P19°)

P22° $\vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow [(\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)]$

pozrieme na vetu o dedukcii pre predikátovú logiku; rozoberieme $T \stackrel{\text{def}}{=} \{(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), (\forall x) A(x)\}$ formule, ktoré máme dokázať

1. $T \vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
2. $T \vdash A(x) \rightarrow B(x)$ (P18°)
3. $T \vdash (\forall x) A(x)$
4. $T \vdash A(x)$ (P18°)
5. $T \vdash B(x)$ (MP, 2., 4.)
6. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash [(\forall x) A(x)] \rightarrow B(x)$ (VDP) - veta o dedukcii
7. $[(\forall x) A(x)] \rightarrow B(x) \vdash (\forall x) \{[(\forall x) A(x)] \rightarrow B(x)\} \vdash$ pre predik. log.
8. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash (\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)$ (6., 7.)
9. $\vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow [(\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)]$ (VDP)

III. ŽUSTER

P 23° $\vdash (A \rightarrow (\forall x) B(x)) \rightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$ x nie je volné v A

$T \stackrel{\text{def}}{=} \{ A, A \rightarrow (\forall x) B(x) \}$

1. $T \vdash A$
2. $T \vdash A \rightarrow (\forall x) B(x)$
3. $T \vdash (\forall x) B(x)$ (MP, 1., 2.)
4. $T \vdash B(x)$ (P18°)
5. $\vdash [A \rightarrow (\forall x) B(x)] \rightarrow [A \rightarrow B(x)]$ (VDP dva krát)
6. $\vdash [A \rightarrow (\forall x) B(x)] \rightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$ (P19°)

P 24° $\vdash (\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x) A \rightarrow (\exists x) B)$ $(\exists x) F \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\forall x) \neg F$

1. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ (T6°)
2. $\vdash (\forall x)[A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))]$ (zobecnenie)
3. $\vdash (\forall x) A \rightarrow (\forall x)(\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ (P 22° distribúcia $\rightarrow$)
4. $\vdash (\forall x)(\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow [(\forall x) \neg B \rightarrow (\forall x) \neg(A \rightarrow B)]$ (P 22°)
5. $\vdash (\forall x) A \rightarrow [(\forall x) \neg B \rightarrow (\forall x) \neg(A \rightarrow B)]$ (sylogizmus 3. 4.)
6. $\vdash (\forall x) A \rightarrow [\neg(\forall x) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\forall x) \neg B]$ (obmena, sylogizmus)
7. $\vdash (\forall x) A \rightarrow [(\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x) B]$ (definícia $(\exists x)$)
8. $\vdash (\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x) A \rightarrow (\exists x) B)$ (prehodenie predpokladov)

z P 24° okamžite dostávame

P 25° $\vdash (\exists x)(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x) B)$ x nie je volné v A

P 26° $\vdash (\exists x)(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x) A(x) \rightarrow B)$ x nie je volné v B

Twierdzenie "obrócenie" k. (P27^o)

$$(P27^o) \vdash ((\forall x)A \rightarrow (\exists x)B) \rightarrow (\exists x)(A \rightarrow B)$$

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{ (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B, \neg(\exists x)(A \rightarrow B) \}$$

$$1. T \vdash \neg(\exists x)(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \neg(\forall x)(\neg(A \rightarrow B))$$

$$2. T \vdash (\forall x)\neg(A \rightarrow B)$$

$$3. T \vdash \neg(A \rightarrow B)$$

$$4. \vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \quad (\text{obmiana aksjomu A1})$$

$$5. \vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad [\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{ujmienie poprzednika}$$

$$\vdash (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \alpha) \quad \vdash$$

$$6. T \vdash \neg B(x) \quad (MP, 3, 4)$$

$$7. T \vdash A(x) \quad (MP, 3, 5)$$

$$8. T \vdash (\forall x)A \quad \leftarrow (\text{formuły w } T \text{ nie mają wolnej } x, \text{ możemy wrócić "universalizator"})$$

$$9. T \vdash (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B \quad (\text{formuła z } T)$$

$$10. T \vdash (\exists x)B \quad (MP, 8, 9)$$

$$11. T \vdash (\forall x)\neg B \quad (\text{zobecnienie 6.}) \leftarrow$$

$$12. T \vdash \neg \neg(\forall x)\neg B \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\exists x)B \quad (\text{później dopiszemy negację } \neg \neg)$$

$$13. (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B \vdash \neg(\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x)B \quad (VDP, 10.)$$

$$14. (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B \vdash \neg(\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\exists x)B \quad (VDP, 12.)$$

$$15. (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B \vdash \neg \neg(\exists x)(A \rightarrow B) \quad ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$16. (\forall x)A \rightarrow (\exists x)B \vdash (\exists x)(A \rightarrow B) \quad (\neg \neg A \rightarrow A)$$

$$\vdash_0 \quad (VDP)$$

z (P27^o) okazywało dotychczas

$$(P28^o) \vdash ((\forall x)A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B) \quad x \text{ nie jest wolne w } B$$

$$(P29^o) \vdash (A \rightarrow (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x)) \quad x \text{ nie jest wolne w } A$$

V. ČISTE

$$(P31^o) \vdash (\forall x) A(x) \rightarrow (\exists x) A(x)$$

$$\begin{aligned} & \vdash (\forall x) A \rightarrow A \quad \vdash \neg A \rightarrow \neg (\forall x) A \quad \vdash (\forall x) (\neg A \rightarrow \neg (\forall x) A) \quad \vdash (P22^o) \\ & \vdash (\forall x) \neg A \rightarrow (\forall x) \neg (\forall x) A \quad \vdash (\forall x) \neg A \rightarrow \neg (\forall x) A \quad \vdash (\forall x) A \rightarrow \neg (\forall x) \neg A \\ & \vdash (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha) \end{aligned}$$

$$(P31^o) \vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow [(\exists x)A \rightarrow (\exists x)B]$$

$$\begin{aligned} & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad \vdash (\forall x)[(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)] \quad \vdash^{22^o} \\ & \vdash^{22^o} (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x)(\neg B \rightarrow \neg A) \quad \vdash_{q22^o} (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow [(\forall x)\neg B \rightarrow (\forall x)\neg A] \quad \vdash \\ & \vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow [\neg (\forall x)\neg A \rightarrow \neg (\forall x)\neg B] \end{aligned}$$

$$(P32^o) \vdash (\exists x)(\forall y) A(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x) A(x,y)$$

$$(P33^o) \vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow B) \quad x \text{ nie je voline! v } B$$

potrebujeme $(P31^o)$

$$(P34^o) \vdash ((\exists x)A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B) \quad x \text{ nie je voline! v } B$$

potrebujeme $\vdash A(x) \rightarrow (\exists x)A(x)$
 $(\exists x)A(x) \rightarrow B \vdash A(x) \rightarrow B \vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B) \quad \text{VDP da vysledok}$

$$(P35^o) \vdash (\exists x)(\exists y) A(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x) A(x,y)$$

$$(P36^o) \vdash A(x) \rightarrow (\exists x) A(x)$$

$$\vdash (\forall x) \neg A(x) \rightarrow \neg A(x) \quad \vdash A(x) \rightarrow \neg (\forall x) \neg A(x)$$

$$(P37^o) \vdash (\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow \exists x B)$$

Poznámka Nesmíme použít $\forall$ -vety o dedukci předikátový počet

$$1. \neg A(x) \rightarrow \neg A(x) \quad T_i, \alpha \rightarrow \alpha$$

$$2. \neg A(x) \vdash \neg A(x) \quad \forall p \text{ rozšířit můžeme!}$$

$$3. \vdash \neg A(x) \rightarrow (\forall x) \neg A(x)$$

$$4. \neg A(x) \vdash (\forall x) \neg A(x) \quad \text{použijeme kvantifikátor na volném proměnné pomocníka}$$

$$5. \vdash \neg A(x) \rightarrow (\forall x) \neg A(x) \quad \forall p \text{ nepotřebujeme pomocníka}$$

$$6. \vdash \neg(\forall x) \neg A(x) \rightarrow \neg \neg A(x) \quad \text{obecně}$$

$$\vdash \neg \neg A(x) \rightarrow A(x)$$

$$7. \vdash \neg(\forall x) \neg A(x) \rightarrow A(x)$$

inici dostaneme

$$8. \vdash A(x) \rightarrow (\forall x) A(x)$$

$$9. \vdash (\exists x) \rightarrow (\forall x) A(x) \quad \text{sylogismus 7.8.}$$

nepoužíváme formula