

PÍ SOMKA Z Ú VODU DO MATEMATICKEJ LOGIKY

5.11. 2012 (zimný semester 2012/13)

Riešenia © kuko.

Celý materiál je neoficiálny, ak tu mám chybu ja, vaše riešenie s rovnakou chybou **nie** je správne!

1

Na prednáške sme si definovali axiomatický systém výrokovej logiky, ktorý označme $\mathcal{L}$ (podľa Lukasiewicza); ešte pred ním Frege formuloval inú sadu axióm pre výrovkovú logiku:

(F1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(F4) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

(F2) $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

(F5) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(F3) $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

(F6) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

spolu s pravidlom modus ponens označme tento systém $\mathfrak{F}$. Dokážte, že v systéme $\mathfrak{F}$ platí metaveta o dedukcii; ukážte, že axióma (F3) je nadbytočná (dá sa dokázať z ostatných axióm) a dokážte, že systém $\mathfrak{F}$ je úplný (môžete pri tom využiť, že systém $\mathcal{L}$ je úplný). [5b]

Všimnite si, že prvé dve axiómy majú systémy $\mathcal{L}$ a $\mathfrak{F}$ spoločné. Na dôkaz vety $\varphi \rightarrow \varphi$ a metavety o dedukcii stačia tieto dve axiómy (mohli by sme sformulovať meta-meta-vetu: v každom systéme, ktorý obsahuje axiómy F1, F2 a pravidlo MP, platí metaveta o dedukcii). Dôkazy si pozrite v skriptách.

Podme na nezávislosť F3 – toto sme v skutočnosti spomínali na cvičeniach ako prvú jednoduchú aplikáciu vety o dedukcii (pozri poznámky z cvičenia 4, str. 5). Myšlienka je jednoduchá: pomocou VD hodím všetko, čo sa dá pred $\vdash$ do množiny predpokladov. Keďže je to množina, na poradi nezáleží a teda môžeme v tom vhodnom poradí nahádzať všetko naspäť. Celý dôkaz môže vyzeráť napríklad takto:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (predpoklad)

2. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \vdash \psi \rightarrow \chi$ (VD)

3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi, \psi \vdash \chi$ (VD)

4. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi \vdash \varphi \rightarrow \chi$ (VD)

5. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (VD)

6. $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$ (VD)

Nakoniec podme dokázať vetu o úplnosti (teda tú jednu implikáciu). Iste, dalo by sa postupne dokázať všetkých 6 viet, vetu o neutrálnej formule atď., atď., na to však nie je čas. V skutočnosti axiómy A1 a A2 máme a teda stačí dokázať axiómu A3 z nášho starého dobrého systému $\mathcal{L}$. Skúste si podrobne zdôvodniť prečo. Len pre istotu dodám, že zdôvodnenie

Akonáhle dokážeme A3 v $\mathfrak{F}$, tak každý dôkaz formuly φ v $\mathcal{L}$ bude zároveň jej dôkazom v $\mathfrak{F}$.

je *zlé a nepravdivé* (ako bude teda vyzeráť dôkaz φ v $\mathfrak{F}$?).

Ako teda dokážeme A3: $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$? Všimnime si, že medzi axiómami máme F4, ktorá je podobná, ibaže namiesto odstránenia negáciu zavádza. Môžeme však do nej dosadiť negované výroky a pomocou F5/F6 sa zbaviť dvojitej negácie.

Skúsme to odzadu: Ak nahádzame všetko pred $\vdash$, vidíme, že stačí z predpokladov $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ a φ dokázať ψ , t.j.

$$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi, \varphi \vdash \psi$$

Označme si $T = \{\neg\psi \rightarrow \neg\varphi, \varphi\}$. Čo vieme v T dokázať? Pomocou F4 vieme obrátiť implikáciu a dostaneme $T \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$. Treba teda ešte dokázať $\neg\neg\varphi$, ale to dostaneme jednoducho z predpokladu φ a F6. Takto dostaneme $T \vdash \neg\neg\psi$ a pomocou F5 sa zbavíme dvojitej negácie. Celý dôkaz môže vyzeráť napríklad takto:

1. $T \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (predpoklad)
2. $T \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ (F4)
3. $T \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$ (MP 1, 2)
4. $T \vdash \varphi$ (predpoklad)
5. $T \vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (F6)
6. $T \vdash \neg\neg\varphi$ (MP 4, 5)
7. $T \vdash \neg\neg\psi$ (MP 3, 6)
8. $T \vdash \neg\neg\psi \rightarrow \psi$ (F5)
9. $T \vdash \psi$ (MP 7, 8)
10. $\vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ($2 \times$ VD)

Na záver ešte dve poznámky: 1. Pekné riešenie mal Peťo, ktorý sa vôbec neunúval dokazovať F3 pomocou ostatných axiém; namiesto toho si všimnite, že v dôkaze úplnosti $\mathfrak{F}$ sme axiómu F3 vôbec nepoužili a preto to, že sa F3 dá dokázať vyplýva z úplnosti (systému $\mathfrak{F}$ bez F3).

2. Počas písomky mali niektorí otázky typu: môžem použiť metavetu o neutrálnej formule / o ekvivalencii / vety V1–V6? Uvedomte si, že tie sme dokázali v systéme $\mathfrak{L}$ a potrebovali sme axiómu A3. Teraz máme nový systém s inými axiómami, takže odpoveď je NIE.

2

V tejto úlohe sa zahráme s tzv. intuicionistickou logikou; tú dostaneme, ak poslednú axiómu (A3) v $\mathfrak{L}$ nahradíme axiómami

$$(I3) \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi) \qquad (I4) \quad \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

Kedže (I3) a (I4) sú tautológie, tento systém je korektný a dokazuje iba tautológie. Dokážte, že systém $\mathcal{I}$ nie je úplný – existujú totiž tautológie, ktoré sa v $\mathcal{I}$ nedajú dokázať: Uvažujme trojhodnotovú logiku a interpretáciu logických spojok vpravo. Sformulujte a dokážte metavetu o korektnosti pre takúto interpretáciu. Dokážte, že formuly $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow [(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p]$ a $\neg\neg p \rightarrow p$ nie sú v $\mathcal{I}$ dokázateľné. [6b]

p	$\neg p$	$p \rightarrow q$	2	1	0
2	0	2	2	1	0
1	0	1	2	2	0
0	2	0	2	2	2

Valuácie v našej trojhodnotovej sémantike sú funkcie $v : \text{At} \rightarrow \{0, 1, 2\}$, resp. funkcie, ktoré každej formule priradia hodnotu 0, 1, alebo 2, teda $v : \text{Form} \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Ak $v(\varphi) = 2$, budeme písať $v \models_Z \varphi$ a ak je $v(\varphi) = 2$ pre každú valuáciu v , budeme hovoriť, že formula φ je zelená a písať $\models_Z \varphi$.

Metaveta o korektnosti tradične hovorí, že $\vdash \varphi \implies \models \varphi$, teda všetko dokázateľné je tautológia. V našej trojhodnotovej sémantike bude platiť nasledovná metaveta o korektnosti:

$$\vdash_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_Z \varphi$$

teda ak φ je dokázateľná (v systéme $\mathcal{I}$), tak je zelená.

Metadôkaz bude indukciou od dĺžky dôkazov v $\mathcal{I}$ – treba ukázať, že axiémy sú zelené a že MP zachováva zelenosť. Vyplňať celých tabuliek je veľmi zdĺhavé, poďme na to sporom.

(A1) Môže existovať v také, že $v(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \neq 2$? Ak $v(A3) = 1$, tak jediný spôsob je $v(\varphi) = 2$ a $v(\psi \rightarrow \varphi) = 1$, ale na to by muselo byť $v(\psi) = 2$ a $v(\varphi) = 1$, čo je spor. Ak $v(A3) = 0$, potom $v(\varphi) \in \{1, 2\}$ a $v(\psi \rightarrow \varphi) = 0$. Ale $v(\psi \rightarrow \varphi) = 0$ iba ak $v(\psi) \in \{1, 2\}$ a $v(\varphi) = 0$, čo je spor. Teda A1 je zelená.

(A2) Môže existovať v také, že $v([\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]) \neq 2$? a) ak $v(A2) = 1$, tak $v[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] = 2$ a $v[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)] = 1$ odkiaľ $v(\varphi \rightarrow \psi) = 2$ a $v(\varphi \rightarrow \chi) = 1$ a teda $v(\varphi) = 2$ a $v(\chi) = 1$. Ak sa pozrieme späť na $v(\varphi \rightarrow \psi) = 2$, tak $v(\varphi) = 2$ nutne $v(\psi) = 2$. Dosadením do $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)]$ dostaneme $2 \rightarrow (2 \rightarrow 1) = 1$, čo je spor.

b) ak $v(A2) = 0$, tak $v[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \in \{1, 2\}$ a $v[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)] = 0$, a teda $v(\varphi \rightarrow \psi) \neq 0$, $v(\varphi) \neq 0$ a $v(\chi) = 0$. Ale potom $v(\psi) \neq 0$ a dosadením do $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)]$ dostaneme $\{1, 2\} \rightarrow (\{1, 2\} \rightarrow 0) = 0$, čo je spor.

(I3) Môže existovať v také, že $v[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)] \neq 2$? Buď $v(I3) = 1$ a teda $v(\varphi \rightarrow \psi) = 2$, $v(\varphi \rightarrow \neg\psi) = 2$ a $v(\neg\varphi) = 1$, čo je spor, pretože $\neg p$ nie je nikdy 1. Alebo $v(I3) = 0$, teda $v(\varphi \rightarrow \psi) \neq 0$, $v(\varphi \rightarrow \neg\psi) \neq 0$ a $v(\neg\varphi) = 0$, teda $v(\varphi) \neq 0$. Ak sa vrátíme ku $v(\varphi \rightarrow \psi) \neq 0$, tak $v(\varphi) \neq 0$ a teda $v(\neg\psi) = 0$. Dosadením do strednej implikácie dostávame spor: $\{1, 2\} \rightarrow 0 = 0$, ale my sme predpokladali, že $v(\varphi \rightarrow \psi) \neq 0$.

(I4) Ak $v(I4) = 1$, tak $v(\varphi) = 2$, $v(\neg\varphi \rightarrow \psi) = 1$ a $v(\neg\varphi) = 0$. Avšak $0 \rightarrow p$ nie je 1. Ak $v(I4) = 0$, tak $v(\varphi)$ aj $v(\neg\varphi) \neq 0$, čo je nemožné.

Dokázali sme, že všetky axiomy sú zelené. Ostáva ukázať, že MP prenáša zelenosť, to je však jednoduché jedným pohľadom do tabuľky: ak sú predpoklady φ a $\varphi \rightarrow \psi$ zelené, t.j. $v(\varphi) = 2$ a $v(\varphi \rightarrow \psi) = 2$, potom $v(\psi) = 2$ (jediná dvojka v danom riadku).

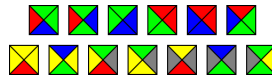
Dokázali sme, že všetky formule dokázateľné v $\mathcal{I}$ sú zelené. Keďže pre v také, že $v(p) = v(q) = 1$ je $v((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow [(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p]) = 1$, táto formula nie je zelená a teda nie je dokázateľná v systéme $\mathcal{I}$.

Podobne ak $v(p) = 1$, tak $v(\neg\neg p) = 2$ a $v(\neg\neg p \rightarrow p) = 1$. Táto formula nie je zelená a teda nie je dokázateľná v systéme $\mathcal{I}$.

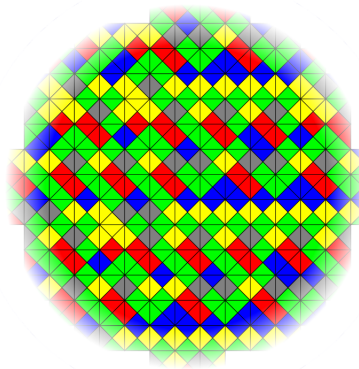
3

Wangove kachličky sú jednotkové štvorce, ktorých každá hrana má nejakú farbu. Uvažujme sadu n kachličiek, kde každá hrana má jednu z k farieb. Pod „kachličkovaním“ máme na mysli zobrazenie zo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ do množiny kachličiek také, že dotýkajúce sa hrany susedných kachličiek majú rovnakú farbu. Sformulujte metaveru o kompaktnosti výrokovkej logiky. Pomocou nej dokážte, že ak sa dá vykachličkovať ľubovoľne veľká konečná plocha, potom sa dá vykachličkovať celá plocha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. [4b]

Napríklad ak máme sadu takýchto kachličiek:



(z každého typu máme ľubovoľne veľa), môžeme vykachličkovať takúto plochu:



Pre zaujímavosť: touto sadou sa dá vykachličkovať celá plocha a dokonca neperiodicky (viac o Wangových kachličkách si prečítajte na wikipédii).

Avšak nie každou sadou kachličiek vieme vykachličkovať celú plochu – napríklad ak by sme mali jediný typ kachličky, ktorý má na každej strane inú farbu, nevieme dať dve kachličky vedľa seba.

Riešenie je tradičným postupom: pre danú sadu kachličiek S sformulujeme teóriu T_S tak, že modely T_S budú kódovať dobré vykachličkovania $\mathbb{Z}^2$. Každá konečná podmnožina T_S bude zodpovedať iba kachličkovaniu konečnej plochy. Z vety o kompaktnosti teda dostaneme, že ak sa dá vykachličkovať ľubovoľne veľká konečná plocha, dá sa vykachličkovať celé $\mathbb{Z}^2$.

Premenné si označme $p_{x,y,t}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$ a $t \in \{1, \dots, n\}$; intuitívne ak je $p_{x,y,t}$ pravdivé, bude to znamenať, že na pozícii (x, y) je kachlička typu t . Avšak nie všetky valuácie premenných $p_{x,y,t}$ nám definujú nejaké vykachličkovanie celej plochy (funkciu zo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ do množiny kachličiek). Prečo?

1. Môže sa stať, že pre nejaké (x, y) žiadna premenná $p_{x,y,t}$ nie je pravdivá (na pozícii (x, y) nie je kachlička?).

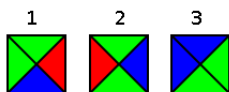
2. Môže sa stať, že pre nejaké (x, y) je viacero premenných $p_{x,y,t}$ pravdivých (na pozícii (x, y) je viacero kachličiek?).
3. Nakoniec, nič nám nezabezpečuje, že dotýkajúce sa hrany susedných kachličiek majú rovnakú farbu.

Vytvoríme teda teóriu T_S , ktorá bude obsahovať tieto axiómy:

1. „ $p_{x,y,1} \vee p_{x,y,2} \vee \dots \vee p_{x,y,n}$ “ pre každé $x, y \in \mathbb{Z}$
2. „ $p_{x,y,t} \rightarrow \neg p_{x,y,t'}$ “ pre každé $x, y \in \mathbb{Z}$ a každé $t \neq t' \in \{1, \dots, n\}$
3. „ $p_{x,y,t} \rightarrow \neg p_{x',y',t'}$ “ pre každé dve susedné pozície (x, y) a (x', y') a každé dva typy t, t' , ktoré na seba nenaväzujú

Všimnite si, že týchto formúl je nekonečne veľa, ale každá jedna je konečná. Tiež si uvedomte, že vytvárame teóriu *výrokovej logiky*, tzn. teória obsahuje formulu (reťazec) „ $p_{x,y,t} \rightarrow \neg p_{x,y,t'}$ “ pre každé $x, y \in \mathbb{Z}$ a každé $t \neq t' \in \{1, \dots, n\}$. T_S *neobsahuje* formulu „ $(\forall x, y \in \mathbb{Z})(\forall 1 \leq t \neq t' \leq n) p_{x,y,t} \rightarrow \neg p_{x,y,t'}$ “ (vo výrokovej logike nemáme symboly $\forall, \in, \leq$ a podobne).

Napríklad pre túto sadu kachličiek



by teória T_S obsahovala formuly ako napríklad

- $p_{0,0,1} \vee p_{0,0,2} \vee p_{0,0,3}$, ktorá hovorí, že na pozícii $(0, 0)$ je kachlička typu 1, 2, alebo 3.
- $p_{3,5,1} \rightarrow \neg p_{3,5,2}$, $p_{3,5,1} \rightarrow \neg p_{3,5,3}$, ktoré hovoria, že ak je na pozícii $(3, 5)$ kachlička 1, tak tam nie je 2 ani 3
- $p_{47,47,2} \rightarrow \neg p_{48,47,1}$ – ak je na pozícii $(47, 47)$ kachlička 2, na pozícii $(48, 47)$ vpravo od nej nie je kachlička 1 (modrá a zelená farba nenaväzujú)

a takýchto formúl by tam bolo nekonečne veľa.

Modely teórie T_S spĺňajú podmienky 1, 2, 3 a teda kódujú dobré kachličkovanie celej plochy. Ľubovoľná konečná podmnožina však môže hovoriť len o konečnom počte políčok. Takže ak sa dá vykachličkovať ľubovoľne veľká konečná množina, tak každá konečná podmnožina T_S má model a podľa vety o kompaktnosti aj celá T_S má model.