

PÍ SOMKA Z Ú VODU DO MATEMATICKEJ LOGIKY

na Kornéliu 2012 (zimný semester 2012/13)

Riešenia © kuko.

Celý materiál je neoficiálny, ak tu mám chybu ja, vaše riešenie s rovnakou chybou **nie je** správne!

1

Uvažujme Robinsonovu aritmetiku, t.j. teóriu v predikátovej logike s rovnosťou so špeciálnymi axiómami

$$(Q1) \quad (\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$$

$$(Q4) \quad (\forall x)(x + 0 = x)$$

$$(Q2) \quad (\forall x)(\neg S(x) = 0)$$

$$(Q5) \quad (\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$$

$$(Q3) \quad (\forall x)(\neg x = 0 \rightarrow \exists y(x = S(y)))$$

$$(Q6) \quad (\forall x)(x \cdot 0 = 0)$$

$$(Q7) \quad (\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$$

Označme $\bar{n} = \underbrace{S(S(\dots S(0) \dots))}_n$. Dokážte v tejto teórii, že $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ a $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0 \rightarrow y = 0)$. [5b]

V prvom prípade chceme dokázať vetu $S0 + S0 = SS0$ (za 1.5b). Veľmi neformálne, z axióm RA vyplýva, že $S0 + S0 = S(S0 + 0) = S(S(0))$ (za takéto a podobné riešenia bolo 0.5b; niektorí dokonca písali, že $S0 + S0 = S(0 + S0)$, čo je síce pravda, ale z axióm to vyplýva o dosť zložitejšie).

Trošku podrobnejšie: $S0 + S0 = S(S0 + 0)$ podľa (Q5) a $S(S0 + 0) = S(S0)$ podľa (Q4) a z axiómy rovnosti ((Q4) hovorí len to, že $S0 + 0 = S0$; to, že $S(S0 + 0) = S(S0)$ vyplýva z axiómy rovnosti $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$). Na dokončenie dôkazu potrebujeme ešte tranzitívnosť rovnosti: $S0 + S0 = S(S0 + 0) = S(S0)$. Celý dôkaz môže vyzeráť napríklad takto:

1. $\vdash (\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$ (Q5)
2. $\vdash S0 + S0 = S(S0 + 0)$ (2× axióma špecifikácie + MP na 1, pričom sme zvolili $x = S0$ a $y = 0$)
3. $\vdash (\forall x)(x + 0 = x)$ (Q4)
4. $\vdash S0 + 0 = S0$ (axióma špecifikácie + MP na 3, pričom sme zvolili $x = S0$)
5. $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow S(x) = S(y))$ (generalizovaná axióma rovnosti)
6. $\vdash S0 + 0 = S0 \rightarrow S(S0 + 0) = S(S0)$
(2× axióma špecifikácie + MP na 5, pričom sme zvolili $x = S0 + 0$ a $y = S0$)
7. $\vdash S(S0 + 0) = SS0$ (MP 4, 6)
8. $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \rightarrow (y = z \rightarrow (x = z)))$ (generalizovaná veta o tranzitívnosti rovnosti)
9. $\vdash S0 + S0 = S(S0 + 0) \rightarrow [S(S0 + 0) = SS0 \rightarrow (S0 + S0 = S(S0 + 0) = SS0)]$
(3× axióma špecifikácie + MP na 8, pričom sme zvolili $x = S0 + S0$, $y = S(S0 + 0)$ a $z = SS0$)
10. $\vdash S0 + S0 = SS0$ (2×MP na 2, 7 a 9)

Druhá veta vyzerá ešte trochu ťažšie, takže skúsme ísť postupne. Rada do života: ak chcete robiť takéto dôkazy, spravte si najskôr neformálny dôkaz; z neho si vytvorte „checkpointy“, ktoré treba dokázať a nakoniec doplňte medzikroky. Uvedomte si tiež, že môžete používať tautológie VL a napríklad dôkaz sporom a podobne.

Podme na to: V prvom rade si uvedomme, že stačí dokázať vetu $x + y = 0 \rightarrow y = 0$ bez kvantifikátorov (a nakoniec generalizovať). Táto implikácia sa dá dobre dokázať sporom: dokážeme, že $x + y = 0$ a $\neg y = 0$ vedie ku sporu. Prečo? Ak $y \neq 0$, potom podľa (Q3), y má predchodcu – existuje také z , že $S(z) = y$ (čítaj „ y sa dá zapísať ako $z + 1$ “). Ale potom $x + y = x + Sz = S(x + z)$ (čítaj „ $x + y$ sa dá zapísať ako $\text{dačo} + 1$; na to bude treba definícia sčítania (Q5) a vlastnosti rovnosti). No a intuitívne „ $\text{dačo} + 1 \geq 1$ “, čiže to nemôže byť 0. Poriadne sa to dokáže pomocou axiómy (Q2), ktorá hovorí, že 0 sa nedá napísať v tvare $S(\text{dačo})$. (Za takýto „plán“, bolo od 1b z 3.5b, viac bodov podľa toho, ako podrobne sa plán podarilo uskutočniť.)

Čiže checkpointy sú

1. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(y = S(z))$
2. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(x + y = S(x + z))$
3. $\neg y = 0, x + y = 0 \vdash (\exists z)(S(x + z) = 0)$
4. vyrobiť spor s (Q2): $(\forall x)(\neg S(x) = 0)$

Skúsme teraz poriadne doplniť medzikroky (je ich dosť, embrace yourselves):

1. $\neg y = 0 \vdash \neg y = 0$ (predpoklad)
2. $\neg y = 0 \vdash \neg y = 0 \rightarrow (\exists z)(y = S(z))$ (axióma (Q3) s premenovanou premennou a špecifikovaným $x = y$)
3. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(y = S(z))$ (MP 1, 2)
ďalší plán: dokázať $(\exists z)(x + y = x + Sz)$
4. $\vdash x = x \rightarrow (y = Sz \rightarrow (x + y = x + Sz))$ (axióma rovnosti (+ je funkčný symbol))
5. $\vdash x = x$ (axióma rovnosti)
6. $\vdash y = Sz \rightarrow (x + y = x + Sz)$ (MP 4, 5)
7. $\vdash (\forall z)(y = Sz \rightarrow (x + y = x + Sz))$ (generalizácia 6)
8. $\vdash (\exists z)(y = Sz) \rightarrow (\exists z)(x + y = x + Sz)$ (distribúcia kvantifikátorov v 7)
9. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(x + y = x + Sz)$ (MP 8, 3)
ďalší plán: dokázať $(\exists z)(x + y = S(x + z))$
10. $\vdash x + Sz = S(x + z)$ (špecifikovaná axióma (Q5))
11. $\vdash x + Sz = S(x + z) \rightarrow (x + y = x + Sz \rightarrow (x + y = S(x + z)))$ (tranzitívnosť rovnosti)
12. $\vdash (\forall z)(x + y = x + Sz \rightarrow (x + y = S(x + z)))$ (MP 10, 11 a generalizácia)
13. $\vdash (\exists z)(x + y = x + Sz) \rightarrow (\exists z)(x + y = S(x + z))$ (distribúcia kvantifikátorov v 12)
14. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(x + y = S(x + z))$ (MP 9, 13) ďalší plán: pridať si predpoklad $x + y = 0$ a odvodiť spor – z tranzitívnosti vyjde $S(x + z) = 0$
15. $\neg y = 0, x + y = 0 \vdash x + y = 0$
16. $\vdash x + y = 0 \rightarrow (S(x + z) = x + y \rightarrow (S(x + z) = 0))$ (tranzitívnosť rovnosti)
17. $x + y = 0 \vdash (\forall z)(S(x + z) = x + y \rightarrow S(x + z) = 0)$ (MP 15, 16 a generalizácia)
18. $x + y = 0 \vdash (\exists z)(S(x + z) = x + y) \rightarrow (\exists z)(S(x + z) = 0)$ (distribúcia kvantifikátorov v 17)
19. $\neg y = 0 \vdash (\exists z)(S(x + z) = x + y)$ (zo 14, komutatívnosť rovnosti, distribúcia kvantifikátorov, MP)
20. $x + y = 0, x + y = 0 \vdash (\exists z)(S(x + z) = 0)$ (MP 18, 19) záver: vyrobiť spor s (Q2)
21. $\vdash (\forall x)\neg(S(x) = 0)$ (Q2)
22. $\vdash \neg(S(x + z) = 0)$ (špecifikácia $x + z$ namiesto x)
23. $\vdash (\forall z)\neg(S(x + z) = 0)$ (generalizácia)
24. $\vdash \neg(\exists z)(S(x + z) = 0)$ (prepísanie $\forall$ na $\exists$)
25. $\neg y = 0, x + y = 0 \vdash \perp$
26. $x + y = 0 \vdash y = 0$ (dôkaz sporom)

27. $\vdash x + y = 0 \rightarrow y = 0$ (VD)

28. $\vdash (\forall x)(\forall y)(x + y = 0 \rightarrow y = 0)$ ($2 \times$ generalizácia)

Skontrolujte, že sme pri VD nepoužili generalizáciu na premennú voľnú v predpokladoch (pred $\vdash$)!

2

Dokážte nasledujúce prenexné operácie:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow B) \quad \text{ak } x \text{ nie je voľná v } B$$

$$(\forall x)(A(x) \vee B) \rightarrow ((\forall x)A(x) \vee B) \quad \text{ak } x \text{ nie je voľná v } B$$

V druhom prípade použite definíciu $\vee$ cez $\{\rightarrow, \neg\}$. Prevedte nasledujúcu formulu do PNF.

$$\left(A(z) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left(([\neg(\forall x)C(x)] \wedge D(x)) \vee (\exists x)B(x) \right) \quad [5b]$$

Dôkaz dvoch prenexných operácií si pozrite v skriptách. Ukážeme si len, ako previesť zadanú formulu do PNF:

$$\left(A(z) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left(([\neg(\forall x)C(x)] \wedge D(x)) \vee (\exists x)B(x) \right)$$

premenujeme premenné, aby sa nám neplietli

$$\left(A(z) \rightarrow ((\exists w)A(w) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left(([\neg(\forall v)C(v)] \wedge D(x)) \vee (\exists u)B(u) \right)$$

$(\exists w)$ ide von, $\neg(\forall v)$ prepíšeme na $(\exists v)\neg$

$$\left(A(z) \rightarrow (\forall w)(A(w) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left(([(\exists v)\neg C(v)] \wedge D(x)) \vee (\exists u)B(u) \right)$$

$(\forall w)$ a $(\exists v)$ idú pred zátvorku

$$(\forall w) \left(A(z) \rightarrow (A(w) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left((\exists v)(\neg C(v) \wedge D(x)) \vee (\exists u)B(u) \right)$$

$(\exists v)$ a $(\exists u)$ idú pred zátvorku

$$(\forall w) \left(A(z) \rightarrow (A(w) \rightarrow B(y)) \right) \wedge (\exists u)(\exists v) \left((\neg C(v) \wedge D(x)) \vee B(u) \right)$$

$(\exists v)$ a $(\exists u)$ idú pred zátvorku

$$(\exists v)(\exists u)(\forall w) \left(A(z) \rightarrow (A(w) \rightarrow B(y)) \right) \wedge \left((\neg C(v) \wedge D(x)) \vee B(u) \right)$$

3

Pre každú dvojicu teória T , formula φ dokážte, že $T \vdash \varphi$, alebo nájdite model $\mathfrak{M} \models T$ taký, že $\mathfrak{M} \not\models \varphi$.

1. $T = \emptyset$, $\varphi : (\forall x)(x + 0 = x)$

2. $T = \{ (\exists x)S(x), (\exists x)(M(x) \wedge \neg P(x)), (\forall x)(S(x) \rightarrow M(x)) \}$, $\varphi : (\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$

3. $T = \{ (\forall x)(\forall y)(x = y) \}$, $\varphi : (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$

4. $T = \mathbf{PO}$, $\varphi : (\forall x)(x < c) \rightarrow \neg(\exists x)(c < x)$

5. $T = \mathbf{PO}$, $\varphi : \neg(\exists x)(c < x) \rightarrow (\forall x)(x < c)$

pričom teória čiastočného usporiadania $\mathbf{PO} = \{ (\forall x)\neg(x < x), (\forall x)(\forall y)[(x < y) \rightarrow \neg(y < x)], (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x < y) \rightarrow ((y < z) \rightarrow (x < z))] \}$. [5b]

1. Vyzerá ľúbivo, platí napríklad v teórii grúp, Robinsonovej aritmetike a podobne, ale samozrejme neplatí v *prázdnej* teórii. Zoberme napríklad model $(\mathbb{Z}, +, 47)$, t.j. štruktúru celých čísel, kde znak $+$ interpretujeme ako sčítanie celých čísel a znak 0 reprezentujeme ako číslo 47. Alebo si vezmeme $(\mathbb{Z}_2, +, 1)$ alebo $(\mathbb{R}, \cdot, 0)$, alebo úplne hocičo. Lebo hocičo (hocaká štruktúra nad správnym jazykom) je modelom prázdnej teórie.

2. Neplatí. Nakreslite si Vennove diagramy pre relácie S, M a $\neg P$ a rozmyslite si, čo musí platiť. Každopádne, prienik S a $\neg P$ môže byť prázdny.

3. Platí. Jeden spôsob ako to nahliadnuť je modelový: Totiž axióma z T hovorí, že všetky prvky sa navzájom rovnajú a teda všetky modely T sú práve *jednoprvkové*. Nuž a existujú iba dva také modely: (označme a ten jediný prvok) v jednom platí $P(a)$, v druhom $P(a)$ neplatí. Každopádne, v oboch modeloch platí formula φ a teda $T \models \varphi$. Na základe vety o úplnosti (ktorú sme nie úplne mali) by sme mohli povedať, že $T \vdash \varphi$.

Priamy dôkaz:

- (a) $\vdash x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$ (axióma rovnosti)
 - (b) $\vdash x = y$ (axióma $T + 2 \times$ špecifikácia)
 - (c) $\vdash P(x) \rightarrow P(y)$ (MP 1, 2)
 - (d) $\vdash (\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow P(y))$ ($2 \times$ generalizácia)
 - (e) $\vdash ((\exists x)P(x)) \rightarrow ((\forall y)P(y))$ (prenexné operácie na 4)
 - (f) $\vdash \varphi$ (premenovanie premennej y na x (veta o variantoch))
4. Platí. Pôvodné zadanie chcelo byť s $\varphi : (\forall x)(x \leq c) \rightarrow \neg(\exists x)(c < x)$, čo platí tiež. Hento φ platí už z takého hlúpeho dôvodu, že predpoklad $(\forall x)(x < c)$ nebude nikdy platiť (takže implikácia je vždy pravdivá. $(\forall x)(x < c)$ je pre $x = c$ v spore s axiómou $(\forall x)\neg(x < x)$). Dôkaz:
- (a) $\vdash \neg(c < c)$ (axióma PO, špecifikácia a MP, pričom vezmeme $x = c$)
 - (b) $\vdash \neg(c < c) \rightarrow \exists x \neg(x < c)$ (duálna formula k axióme špecifikácie)
 - (c) $\vdash (\exists x)\neg(x < c)$ (MP 1, 2)
 - (d) $\vdash \neg(\forall x)(x < c)$ (prepísanie $\exists$ na $\forall$ a $\neg\neg p \rightarrow p$)
 - (e) $\vdash \neg(\forall x)(x < c) \rightarrow ((\forall x)(x < c) \rightarrow \neg(\exists x)(c < x))$ (tautológia VL: $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$)
 - (f) $\vdash \varphi$ (MP 4, 5)
5. Neplatí. Ako sme už povedali, záver φ je blbosť, nikdy nemôže nastať $(\forall x)(x < c)$, keď to neplatí pre $x = c$. Stačí teda ako protipríklad zvoliť model, v ktorom je splnené $\neg(\exists x)(c < x)$ pre nejaké c , t.j. stačí nájsť model T , ktorý má maximálny prvok. Na to stačí zobrať hocakú konečnú čiastočne usporiadanú množinu. Tiež sa dá vziať ľubovoľná množina s prázdnu reláciou usporiadania, t.j. žiadne dva prvky nie sú porovnateľné. Predpoklad bude platiť, dôsledok nie.