

# ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – DOMÁCA ÚLOHA #1

## C-systém:

1. abeceda:  $\Sigma = \{-, \mathbf{C}, \#\}$
2. jazyk: slová tvaru:  $Cx\#y$  -  $x, y$  sú reťazce pomlčiek (môžu byť aj prázdne)
3. axióma:  $\mathbf{C}-\#$
4. odvodzovacie pravidlá:

$$(1) \frac{Cx\#y}{Cxx\#y-}$$

$$(2) \frac{Cx\#y}{Cxx-\#y-}$$

$x$  a  $y$  sú reťazce pomlčiek (môžu byť prázdne).

## Intepretácia $\mathcal{I}$ :

- Znak  $\mathbf{C}$  je unárny funkčný symbol, ktorý ako argument zoberie všetky pomlčky za ním až po znak  $\#$ .
- Znak  $\#$  je binárny predikát, ktorý ako prvý argument zoberie všetko, čo je naľavo od neho a ako druhý, všetko, čo je napravo od neho.
- Postupnosť pomlčiek interpretujeme ako číslo, ktoré je rovnaké, ako počet pomlčiek. T.j.  $\mathcal{I}(\underbrace{-\dots-}_k) = k$
- Funkčný symbol  $\mathbf{C}$  budeme interpretovať ako funkciu "dolná celá časť s logaritmu pri základe dva". T.j.  $\mathcal{I}(\mathbf{C}) = \lfloor \log_2 \rfloor$
- Reťazce tvaru  $\mathbf{C} \underbrace{-\dots-}_k$  interpretujeme ako

$$\mathcal{I}(\mathbf{C} \underbrace{-\dots-}_k) = \mathcal{I}(\mathbf{C})(\mathcal{I}(\underbrace{-\dots-}_k)) = \lfloor \log_2 k \rfloor$$

- Predikátový symbol  $\#$  interpretujeme ako predikát "rovná sa". Aby sa nám nepletlo označenie, budeme predikát "rovná sa" označovať  $=_{\mathcal{I}}$ . T.j.  $\mathcal{I}(\#) = =_{\mathcal{I}}$
- Formuly  $\mathbf{C} \underbrace{-\dots-}_k \# \underbrace{-\dots-}_l$  budeme interpretovať ako

$$\mathcal{I}(\mathbf{C} \underbrace{-\dots-}_k \# \underbrace{-\dots-}_l) = \mathcal{I}(\#)(\mathcal{I}(\mathbf{C})(\mathcal{I}(\underbrace{-\dots-}_k)), \mathcal{I}(\underbrace{-\dots-}_l)) = \lfloor \log_2 k \rfloor =_{\mathcal{I}} l$$

## Zadanie:

Dokážete, že platí metaveta o úplnosti:

**Metaveta 1.1 (O úplnosti)** *Formula v C-systéme je dokázateľná práve vtedy, keď je pravdivá pri interpretácii  $\mathcal{I}$ , definovanej vyššie. Inak zapísané:*

$$\vdash \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$$

Implikáciu z ľava doprava dokazujte matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku dôkazu. Opačnú implikáciu dokážete tak, že ku každej pravdivej formule pri interpretácii  $\mathcal{I}$  nájdete jej dôkaz v C-systéme.

Obe časti dôkazu chcem vidieť čo najprecíznejšie spísane.

Za túto úlohu môžete získať 1 bod.