

1 Výroky

1. Znegujte nasledujúce výrazy:

a) $\exists x \forall y (\exists z (p(z) = x + y) \vee \forall z (p(z) \neq x + y))$,

b) $\forall x \exists \delta (x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(a) - 1, f(a) + 1))$,

c) $\forall a ((\exists y)(y^y = a) \leftrightarrow (\forall y)(a^y \geq a))$.

2. Zapište iba pomocou \vee a \neg výraz $A \leftrightarrow B$.

3. Zapište iba pomocou \rightarrow a \neg výrazy:

a) $A \leftrightarrow B$,

b) $\neg(A \leftrightarrow B)$.

4. Vyjadrite pomocou matematických symbolov výrok 'Existuje nekonečne veľa prvočísel.'

2 Množiny

1. Dokážte nasledujúce vzťahy:

a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$,

b) $A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$,

c) $(A - B) \cup B = A \cup B$.

2. Zostrojte potenčné množiny množín:

a) $\{\emptyset\}$

b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $\{\{a, \{b\}\}, \{\{a\}, b\}\}$

3. Koľko prvkov má potenčná množina n -prvkovej množiny? Dokážte.

4. Nech $A \subset B$. Dokážte, že $P(A) \subset P(B)$.

5. Nakreslite Vennov diagram znázorňujúci nasledujúcu situáciu: $A \cap B = C \cap B$, ale $A \neq C$

3 Dôkazy

1. Dokážte:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

c) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$.

2. Dokážte, že interval $\langle s, 2s \rangle$ obsahuje číslo v tvare 2^x . (Čísla $x, s \in \mathbb{N}$)

3. Dokážte $\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.

4. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: $n | (11^n - 7^n)$

5. Dokážte, že $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo.

4 Kombinátorika

1. Dokážte, že z ľubovoľných 52 čísel možno vybrať dve tak, že ich súčet alebo rozdiel je deliteľný 100-mi.

2. Uvažujme 5-ciferné čísla.

a) Koľko ich je?

b) Koľko z nich neobsahuje číslicu 9?

c) Koľko z nich obsahuje aspoň jednu číslicu 9?

d) Koľko z nich obsahuje práve jednu číslicu 9?

e) Koľko z nich obsahuje práve tri 9-ty?

3. Koľko 5-ciferných čísel vieme zostaviť z číslic 3, 5, 2, 2, 7, 5, 2, 2?

4. Šesťciferné čísla 355322, 111111, 100991 obsahujú každú číslicu 2-krát. Koľko je všetkých takých 6-ciferných čísel?

5. Hádzeme postupne naraz 2-ma kockami. Najmenej koľko krát ich musíme hodiť, aby 3-krát padla rovnaká dvojica čísel?

6. Vypočítajte $\sum_{k=0}^n (2k+1) \binom{n}{k} =$

7. Koľkými spôsobmi možno z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ vybrať trojicu, ktorej súčet je deliteľný 3-ma?

8. Koľkými spôsobmi sa dá číslo 1024 napísať ako súčin troch čísel?

9. Kolkými spôsobmi vieme rozdeliť množinu $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ na dve množiny A, B tak, aby platilo $A \cap B = \emptyset$
10. Koľko rôznych slov sa dá zložiť zo slova *TIKTAK*?
11. V lietadle cestuje n španielov, n francúzov a n maďarov. V každom rade sú tri sedadlá. Kolkými spôsobmi si môžu posadať, aby v každom rade sedel práve jeden reprezentant z každého národa?