Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #1

Anna Kompišová

10. októbra 2019

1 Formálny axiomatický systém

- *formálny axiomatický systém* sa skladá z troch častí:
  1. jazyk (jeho slová sa nazývajú *formuly*)
  2. axiómy (nejaké formuly jazyka)
  3. odvodzovacie pravidlá
- *dôkaz* (vo formálnom systéme) je konečná postupnosť formúl, kde každá formula je buď axioma, alebo je odvodená z prechádzajúcich použitím niektorého odvodzovacieho pravidla.
- formula φ je *dokázateľná* (voláme ju *veta* alebo tiež *teoréma*), ak existuje dôkaz, ktorý končí φ. Tento fakt označujeme $\vdash \varphi$.

2 MU-puzzle

- definovali sme si formálny axiomatický systém MU-puzzle:
  1. abeceda: $\mu = \{\mathtt{M},\mathtt{U},\mathtt{I}\}$
  2. jazyk: μ^* - znamená všetky reťazce zložené z písmen `M`, `U` a `I`.
  3. axióma: `MI`
  4. odvodzovacie pravidlá:

     $$(1)\ \frac{x\mathtt{I}}{x\mathtt{IU}} \qquad (2)\ \frac{\mathtt{M}x}{\mathtt{M}xx} \qquad (3)\ \frac{x\mathtt{III}y}{x\mathtt{U}y} \qquad (4)\ \frac{x\mathtt{UU}y}{xy}$$

     za x a y môžeme dosadiť ľubovoľný reťazec z μ^*. Tento zápis pravidiel hovorí, že z formuly hore (predpoklad) môžeme potom odvodiť formulu dolu.
- **úloha 1:** v systéme MU-puzzle dokážte `MIU`
- **riešenie:** dôkaz je postupnosť `MI`, `MIU`; väčšinou ju zapisujeme (spolu s vysvetlivkami) takto:

$$\begin{aligned} &\vdash \mathtt{MI} \quad &&\text{(axióma)} \\ &\vdash \mathtt{MIU} \quad &&\text{(pravidlo 1)} \end{aligned}$$

- **úloha 2:** v systéme MU-puzzle dokážte `MIUIU`
- **riešenie:**

$$\begin{aligned} &\vdash \mathtt{MI} \quad &&\text{(axióma)} \\ &\vdash \mathtt{MIU} \quad &&\text{(pravidlo 1)} \\ &\vdash \mathtt{MIUIU} \quad &&\text{(pravidlo 2)} \end{aligned}$$

- **úloha 3:** v systéme MU-puzzle dokážte `MIUU`

- **riešenie:**

$$\begin{aligned}
&\vdash \texttt{MI} \quad \text{(axióma)}\\
&\vdash \texttt{MII} \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MIIII} \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MIIIIU} \quad \text{(pravidlo 1)}\\
&\vdash \texttt{MIUU} \quad \text{(pravidlo 3)}
\end{aligned}$$

- **úloha 4:** v systéme MU-puzzle dokážte `IIM`.
- **riešenie:** po niekoľkých pokusoch zisťujeme, že písmena `M` na začiatku formuly sa akosi nevieme zbaviť.

  Metaveta 2.1 *Všetky formuly dokázateľné v systéme MU-puzzle sa začínajú na písmeno* `M`*.*

  Metadôkaz. Formula φ je dokázateľná, keď má dôkaz $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \varphi$. Indukciou od dĺžky dôkazu n ukážeme, že každá dokázateľná formula začína písmenom `M`.
  báza indukcie: Pre $n = 1$ máme jediný dôkaz a to axiómu `MI`, ktorá začína na `M`.
  indukčný krok: Predpokladajme, že všetky fomuly s dôkazom dlhým najviac n začínajú na písmeno `M`. Chceme to ukázať aj o formule φ s dôkazom dlhým $n + 1$, Jej dôkaz vyzerá takto: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$. Na základe indukčného predpokladu o všetkých formulách φ_i pre $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ vieme, že sa začínajú na `M`. Formula φ môže byť axióma alebo mohla vzniknúť použitím nejakého odvodzovacieho pravidla. Prvý prípad sme už rozobrali. V druhom prípade musela formula φ vzniknúť z nejakej formuly φ_i použitím niektorého pravidla. Keď si všimneme pravidlá, žiadne z nich nemôže zmeniť to, že `M` je na začiatku formuly. Z toho vyplýva, že ak formula φ_i mala `M` na začiatku, tak aj φ musí mať `M` na začiatku. □

- **úloha 5:** V systéme MU-puzzle dokážte `MIMI`.
- **riešenie:** Toto sa opäť nedá dokázateť. Stačí si všimnúť, že žiadnym z pravidiel nevieme vyrobiť ďalšie `M`. Môžeme teda zosilniť prvú metavetu:

  Metaveta 2.2 *Všetky formuly dokázateľné v systéme MU-puzzle sú tvaru* `M`x*, kde* $x \in \{\texttt{U},\texttt{I}\}^*$*.*

  Metadôkaz. Veľmi podobný ako predošlý. Prenechávame usilovnému čitateľovi :). □

- **úloha 6:** V systéme MU-puzzle dokážte `MU`.
- **riešenie:** Opäť po pár pokusoch zisťujeme, že sa táto formula dokázať nedá. Dôvodom je, že všetky formuly, ktoré vieme dokázať majú počet `I` nedeliteľný tromi.

  Metaveta 2.3 *Všetky formuly dokázateľné v systéme MU-puzzle majú počet* `I` *nedeliteľný tromi.*

  Metadôkaz. Metadôkaz budeme opäť robiť matematickou indukciou od dĺžky dôkazu
  báza indukcie: Pre $n = 1$ máme jediný dôkaz a to axiómu `MI`. Axioma obsahuje jedno `I`, preto má počet `I` nedeliteľný tromi.
  indukčný krok: Predpokladajme, že všetky fomuly s dôkazom dlhým najviac n majú počet `I` nedeliteľný tromi. Nech formula φ má dôkaz dlhý $n + 1$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$. O všetkých formulách φ_i pre $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ vieme, že majú počet `I` nedeliteľný tromi (indukčný predpoklad). Formula φ môže byť axioma alebo vznikla použitím niektorého odvodzovacieho pravidla. Prvý prípad sme už rozobrali. V druhom prípade stačí overiť, že odvodzovacie pravidlá prenášajú vlastnosť, že počet `I` vo formule nie je deliteľný tromi. Pravidlá (1) a (4) nemenia počet `I`-čok. Pravidlo (2) zdvojnásobuje počet `I`-čok, čo taktiež nemení našu vlastnosť a napokon pravidlo (3) zmenšuje počet `I`-čok o tri, čo taktiež zachováva vlastnosť. Z toho vyplýva, že aj φ musí mať počet `I` nedeliteľný tromi. □

- **úloha 7**: V systéme MU-puzzle dokážte $\texttt{MIUIUII}$.
- **riešenie:**

$$
\begin{aligned}
&\vdash \texttt{MI} \quad \text{(axióma)}\\
&\vdash \texttt{MII} \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MIIII} \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MI}^8 \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{16} \quad \text{(pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{16}\texttt{U} \quad \text{(pravidlo 1)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{13}\texttt{UU} \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{13} \quad \text{(pravidlo 4)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{13}\texttt{U} \quad \text{(pravidlo 1)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{10}\texttt{UU} \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{10} \quad \text{(pravidlo 4)}\\
&\vdash \texttt{MIUIIIIII} \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash \texttt{MIUIUII} \quad \text{(pravidlo 3)}
\end{aligned}
$$

Zápis $\texttt{I}^k$ je skrátený zápis pre k $\texttt{I}$-čok za sebou.

- Všimli sme si, že keď má formula na konci aspoň 3 $\texttt{I}$-čka, vieme sa ich zbaviť použitím pravidiel 1, 3 a 4. Môžeme si teda dokázať nové odvodzovacie pravidlo:

$$(5)\ \frac{x\texttt{III}}{x}$$

Dôkaz odvodzovacieho pravidla:

$$
\begin{aligned}
&\vdash x\texttt{III} \quad \text{(predpoklad)}\\
&\vdash x\texttt{IIIU} \quad \text{(pravidlo 1)}\\
&\vdash x\texttt{UU} \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash x \quad \text{(pravidlo 4)}
\end{aligned}
$$

- **úloha 8**: V systéme MU-puzzle dokážte $\texttt{MUIUUI}$.
- **riešenie:**

$$
\begin{aligned}
&\vdash \texttt{MI} \quad \text{(axióma)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{32} \quad \text{(5x pravidlo 2)}\\
&\vdash \texttt{MI}^{11} \quad \text{(7x pravidlo 5)}\\
&\vdash \texttt{MUI}^8 \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash \texttt{MUIUIIII} \quad \text{(pravidlo 3)}\\
&\vdash \texttt{MUIUUI} \quad \text{(pravidlo 3)}
\end{aligned}
$$

- Dostali sme nápad, že možno sa dá dokázať každá formula, ktorá má iba jedno $\texttt{M}$ práve na začiatku a zároveň má počet $\texttt{I}$ nedeliteľný tromi. Inými slovami predchádzajúce dve podmienky, nie sú len nutné, ale spolu dávajú aj postačujúcu podmienku na to, aby bola nejaká formula dokázateľná.

Metaveta 2.4 **("o úplnosti")** *V systéme MU-puzzle sú dokázateľné práve tie formuly, ktoré tvaru* $\texttt{M}x$*, kde* $x \in \{\texttt{U},\texttt{I}\}^*$ *a počet* $\texttt{I}$ *vo formule nie je deliteľný tromi.*

Metadôkaz. Implikáciu $\Rightarrow$ sme dokázali tým, že sme dokázali metavety 2.2 a 2.3.

Dôkaz opačnej implikácie bol nepovinná domáca úloha za 2 bonusové body. Tu je vzorové riešenie:

Predpokladajme, že máme nejakú formulu, ktorá začína na `M` a ďalej sa skladá len z `U` a `I`, pričom počet `I` je nedeliteľný tromi. Aby sme dokázali metavetu, musíme pre túto formulu nájsť dôkaz s systéme MU-puzzle. Budeme sa snažiť zopakovať postup, ktorý sme používali pri riešení posledných troch úloh, ale budeme to robiť všeobecne.

Označme si počet `I` vo formule ako $P_{\mathtt{I}}$ a počet `U` vo formule ako $P_{\mathtt{U}}$. Dôkaz si rozdelíme na tri časti:

1. Vyrobíme dostatočne veľa `I` pomocou pravidla 2.
2. Zbavíme sa nadbytočných `I` pomocou pravidla 5 (nie vždy potrebujeme aby bol počet `I` mocnina dvojky).
3. Prerobíme niektoré trojice `I` na `U` pomocou pravidla 3 tak, aby sme dostali tú formulu, ktorú chceme.

Na konci druhej časti potrebujeme, aby počet `I` bol presne $P_{\mathtt{I}} + 3P_{\mathtt{U}}$, lebo každé `U` "zhltne" tri `I`. Počas prvej časti teda potrebujeme vyrobiť taký počet `I`, aby bol väčší ako $P_{\mathtt{I}} + 3P_{\mathtt{U}}$ a zároveň bude mať rovnaký zvyšok po delení tromi. To sa vždy dá, lebo mocniny dvojky si postupne striedajú zvyšky 1 a 2 po delení tromi. (Zjavne $1 = 2^0$ má zvyšok 1 po delení tromi. Ďalej ak $k = 3\ell + 1$, tak $2k = 6\ell + 2$ a teda zvyšok po delení tromi je 2. Ak $k = 3\ell + 2$, tak $2k = 6\ell + 4 = 3(2\ell + 1) + 1$ a teda zvyšok je 1.)

V druhej časti zredukujeme počet `I` presne na $P_{\mathtt{I}} + 3P_{\mathtt{U}}$ pomocou pravidla 5. V poslednej časti dôkazu potom už len prerobíme príslušné trojice `I` na `U` pomocou pravidla 3 tak, aby sme dostali formulu, ktorú sme chceli dokázať. $\square$