ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – CVIČENIE #2

Anna Kompišová

10. októbra 2019

1 Formálne axiomatické systémy a ich interpretácie

- Na minulej hodine sme mali MU-puzzle system, ktorého formuly boli len nejaké reťazce znakov. Čisto mechanicky sme odvodzovali formuly a zisťovali sme, ktoré formuly sa dajú dokázať a ktoré nie. Pri systémoch na tomto cvičení nám k tomu poslúži *význam*, ktorý môžeme formuliam *priradiť*. Významu budeme hovoriť *interpretácia* a akonáhle ju určíme, budeme môcť o každej formule povedať, či je pravdivá, alebo nie. Pravdivosť formuly φ pri interpretácií $\mathcal{I}$ budeme zapisovať $\mathcal{I} \models \varphi$.

P-systém:

1. abeceda: $\Sigma = \{\texttt{-},\texttt{\#},\texttt{D},\texttt{P}\}$
2. jazyk: slová tvaru: $x\texttt{\#}y$, $x\texttt{D}y$ a $\texttt{P}x$ - x, y sú neprázdne reťazce pomlčiek.
3. axiómy:

$$(A_1)\quad xy\texttt{\#}x \qquad\qquad (A_2)\quad \texttt{P--}$$

4. odvodzovacie pravidlá:

$$(P_1)\ \frac{x\texttt{\#}y}{x\texttt{\#}xy} \qquad (P_2)\ \frac{\texttt{--\#}x}{x\texttt{D--}} \qquad (P_3)\ \frac{x\texttt{D}y,\ y\texttt{-\#}x}{x\texttt{D}y\texttt{-}} \qquad (P_4)\ \frac{x\texttt{-D}x}{\texttt{P}x\texttt{-}}$$

   x a y sú neprázdne reťazce pomlčiek.

- **úloha**: V P-systéme dokážte formulu `P---`, alebo dokážte, že sa dokázať nedá.
- **riešenie**:

$$\begin{aligned} &\vdash \texttt{--\#-} && (A_1)\\ &\vdash \texttt{--\#---} && (P_1)\\ &\vdash \texttt{---D--} && (P_2)\\ &\vdash \texttt{P---} && (P_4) \end{aligned}$$

- **úloha**: V P-systéme dokážte formulu `P-----`, alebo dokážte, že sa dokázať nedá.
- **riešenie**:
  Dôkaz tejto formuly sme hľadali odzadu: Na `P-----` potrebujeme dokázať `-----D----`. To by sme vedeli dokázať (pomocou P_3), ak by sme mali `-----D---` a `----#-----`. To druhé je ľahké: vznikne z axiómy `----#-` použitím P_1. To prvé by šlo, ak by sme mali `-----D--` a `---#-----`. To druhé vyjde z `---#--`, na prvé stačí `--#-----`, čo dostaneme z

`--#-` aplikovaním pravidla P_1 dvakrát. Celý dôkaz má 11 krokov:

1. $\vdash$ `--#-` (A_1)
2. $\vdash$ `--#---` (z 1.; P_1)
3. $\vdash$ `--#-----` (z 2.; P_1)
4. $\vdash$ `-----D--` (z 3.; P_2)
5. $\vdash$ `---#--` (A_1)
6. $\vdash$ `---#-----` (z 5.; P_1)
7. $\vdash$ `-----D---` (z 4. a 6.; P_3)
8. $\vdash$ `----#-` (A_1)
9. $\vdash$ `----#-----` (z 8.; P_1)
10. $\vdash$ `-----D----` (z 7. a 9.; P_3)
11. $\vdash$ `P-----` (z 10.; P_4)

- **úloha**: V P-systéme dokážte formulu `P----`, alebo dokážte, že sa dokázať nedá.
- **riešenie**: Podobne ako v predchádzajúcich príkladoch sme začali hľadať dôkaz od konca. Na `P----` potrebujeme dokázať `----D---`. To sa dá dokázať iba pomocou pravidla (P_3) tak, že predtým vieme dokázať `---#----` a `----D--`. To prvé vieme dokázať z axiomy `---#-`. Na dokázanie druhého máme v pricípe dve možnosti.

  1. Prvá možnosť je, že sme použili pravidlo (P_2) na `--#----`. Toto sa dalodokázať len pomocou (P_1). Ak sme ho použili raz, museli sme vychádzať z `--#--`,čo nie je axioma. Ak sme ho použili dvakrát, museli sme vychádzať z `--#`, čo tiež nie je axioma. Preto sa zjavne `--#----` nedá dokázať.
  2. Druhá možnosť je použiť pravidlo (P_3) na `----D-` a `--#----`. Ako sme už predtým dokázali, druhá formula sa dokázať nedá. Preto sa nedá dokázať ani `P----`.

- Začali sme sa zamýšlať, ktoré formuly sa dajú a ktoré sa nedajú dokázať. Zamerajme sa teraz len na formuly s #. Pre jednoduchosť, označme formulu $\underbrace{\texttt{-...-}}_{k}\texttt{\#}\underbrace{\texttt{-...-}}_{l}$ skrátene $k\#l$.

- Pri dokazovaní formúl $k\#l$ používame len axiómu A_1 a odvodzovacie pravidlo P_1. Keď sa trochu zamyslíme, všimneme si, že pre každú axiómu $A_1 = k\#l$ platí $k > l \geq 1$ a pomocou pravidla P_1 vieme na koniec pridávať len reťazce dlhé nejaký násobok k. Znak # môžeme teda interpretovať ako predikát "nedelí". Naozaj sa dá dokázať

Metaveta 1.1 *Formula $k\#l$ je dokázateľná v P-systéme práve vtedy, keď k nedelí l.*

Metadôkaz. Implikáciu $\Rightarrow$ dokážeme pomocou matematickej indukcie vzhľadom na dĺžku dôkazu.

Najkratší dôkaz majú axiómy. Nás zaujíma len axióma $A_1 = k\#l$. Z definície axiómy vieme, že $k > l$ a $l \neq 0$. Z toho ale vyplýva, že k nedelí l.

Predpokladajme, že pre všetky formuly s dôkazom dlhým najviac n metaveta platí. Ukážeme, že platí aj pre formulu φ s dôkazom dlhým $n + 1$. Táto formula je buď axióma (tento prípad sme vyriešili), alebo bola odvodená pomocou pravidla P_1. Nech teda bola odvodená z formuly $k\#l$. Potom $\varphi = k\#k + l$. Formula $k\#l$ mala kratší dôkaz, takže podľa indučkného predpokladu platí $k \nmid l$. Z toho ale dostávame, že aj $k \nmid k + l$.

Aby sme dokázali opačnú implikáciu, potrebujeme pre každú formulu $k\#l$, pre ktorú platí $k \nmid l$ nájsť dôkaz. Zjavne $l = r + sk$, pre nejaké nezáporné r a s, pričom $k > r \geq 1$. Dôkaz teda začne axiómou $k\#r$ následne sa s-krát použije pravidlo P_1, čím dostaneme formulu $k\#l$. $\square$

- Začína sa nám pomaly ukazovať vhodná interpretácia celého systému. Pod vhodnou interpretáciou myslím takú, pre ktorú bude platiť, že každá dokázateľná formula bude pravdivá a naopak, každá pravdivá formula bude dokázateľná.
- Na cviku sme zistili, že by sa nám hodila nasledovná interpretácia:
  - Ako sme už určili, postupnosti pomlčiek budeme interpretovať ako prirodzené čísla. T.j.

$$\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}) = k$$

  - Symbol `#` budeme interpretovať ako binárny predikát nedelí, čiže $\mathcal{I}(\texttt{\#}) = \nmid$. Inými slovami, formula $k\#l$ bude pravdivá práve vtedy, keď $k \nmid l$. Výsledkom je pravdivostná hodnota.
  - Takže formuly tvaru $\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}\texttt{\#}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l}$ budeme interpretovať ako

$$\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}\texttt{\#}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l}) = \mathcal{I}(\texttt{\#})\Big(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}), \mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l})\Big) = k \nmid l$$

  - Definujme si binárny predikát

$$d(k,l) \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{N}, 2 \le a \le l)(a \nmid k),$$

    $d(k,l)$ platí vtedy, keď k nie je deliteľné žiadnym číslom od 2 po l
  - Definujme unárny predikát prime - "byť prvočíslo":

$$\text{prime}(k) \Leftrightarrow k \text{ je prvočíslo } \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{N}, 2 \le a < k)(a \nmid k)$$

  - Symboly `D` a `P` budeme interpretovať ako predikáty d a prime: $\mathcal{I}(\texttt{D}) = d$ a $\mathcal{I}(\texttt{P}) = \text{prime}$. Formuly interpretujeme nasledovne:

$$\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}\texttt{D}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l}) = \mathcal{I}(\texttt{D})\Big(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}), \mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{l})\Big) = d(k,l)$$

$$\mathcal{I}(\texttt{P}\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k}) = \mathcal{I}(\texttt{P})\Big(\mathcal{I}(\underbrace{\texttt{-}\ldots\texttt{-}}_{k})\Big) = \text{prime}(k)$$

- pre takto definovanú interpetáciu vieme dokázať metavetu o úplnosti pre tento systém:

  Metaveta 1.2 *V P-systéme sú dokázateľné práve tie formuly, ktoré sú pravdivé pri interpretácií $\mathcal{I}$ definovanej vyššie. T.j.*

$$\vdash \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$$

  Metadôkaz. Skúste si ho spraviť sami. Implikácia $\Rightarrow$ sa dokazuje indukciou od dĺžky dôkazu a druhý smer skonštruovaním dôkazu pre každú pravdivú formulu.

2 Jazyk logiky prvého rádu

- *Jazyk*:
  1. premenné $x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2, \ldots, y_1, \ldots, z_1, \ldots$
  2. funkčné symboly (majú árnosť, koľko parametrov berú) $f,\ g,\ h, \ldots$
  3. predikátové symboly (majú árnosť) $P,\ Q,\ R, \ldots$
  4. logické spojky $\wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \neg$

5. kvantifikátory $\forall$, $\exists$
6. pomocné symboly (,), {, }, [,]

- Premenné, logické spojky, kvatifikátory a pomocné symboly sú logické symboly.
- Funkčné symboly a predikátové symboly sú špeciálne symboly (určujú charakter teórie).
- Predikátový symbol $=$ sa ale radí medzi logické symboly. Keď jazyk obsahuje $=$, tak hovoríme, že je to *jazyk s rovnosťou.*
- *Term*: sú to reťazce zložené z funkčných symbolov a premenných. Nahrádzajú popis, v akom poradí treba aplikovať nejaké operácie. Vyjadrujú nejaký matematický výraz. Presná definícia:
  1. Každá premenná je term.
  2. Ak f je n-árny funkčný symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom aj $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je term.
  3. Všetko, čo nevzniklo konečným počtom vyššie uvedených krokov, nie je term.
- *Formula*: sú to reťazce, ktoré zodpovedajú matematickým tvrdeniam. Keď ich interpretujeme, budeme vedieť povedať, či sú pravdivé. Presná definícia:
  1. Ak P je n-árny predikátový symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy, potom $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je formula.
  2. Ak A, B sú formuly, potom aj $\neg A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ A \rightarrow B,\ A \leftrightarrow B$ sú formuly.
  3. Ak A je formula a x je premenná, potom aj $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ sú formuly.
  4. Všetko, čo nevzniklo konečným počtom vyššie uvedených krokov, nie je formula.
- Mohli ste si všimnúť, že sme v definícii napísali, že iba ak x je premenná, môžeme ju kvantifikovať. Toto je podstatné, lebo v jazyku prvého rádu nemôžeme kvantifikovať nič iné, ako premenné. Tým sa líši logika prvého rádo od logík vyšších rádov.

Sémantika

- To, čo sme vyššie popísali, sú len písmenká usporiadané podľa istých pravidiel. Ďalším krokom je priradenie významu týmto písmenkám. Keď už budeme mať určený význam, potom môžeme vyhodnocovať, či je nejaká formula pravdivá, alebo nie, akú funkciu určuje daný term a podobne. Tomuto významu hovoríme *realizácia.*
- Aby sme určili význam zložitejších formúl a termov, musíme najskôr určiť význam základným stavebným kameňom, čiže symbolom jazyka.
  1. **Premenné**: Keď napíšeme $x + y = z$, myslíme tým, že keď spočítame čísla x a y dostaneme číslo z. Premenné nám nahrádzajú prvky z nejakej množiny. Keď teda definujeme realizáciu, musíme určiť množinu prvkov, nad ktorou budeme pracovať. Túto množinu budeme nazývať *univerzum*, budeme ju označovať $\mathcal{U}$ a jej prvky budeme nazývať *indivíduá.*
  2. **Funkčné symboly**: n-árny funkčný symbol f budeme realizovať ako n-ánu funkciu nad univerzom. Inak povedané, funkcia dostane ako vstup n indivíduí a vráti jedno indivíduum.
  $$f_{\mathcal{I}} : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$$
  3. **Predikátové symboly**: n-árny predikátový symbol P budeme realizovať ako n-ány predikát nad univerzom. Inak povedané, predikát dostane ako vstup n indivíduí a vráti pravdivostnú hodnotu.
  $$P_{\mathcal{I}} : \mathcal{U}^n \rightarrow \{0, 1\}$$
  4. **Logické spojky**: Logické spojky ako vstup dostanú jednu $(\neg)$ alebo dve $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ pravdivostné hodnoty a vrátia jednu pravdivostnú hodnotu. Realizujeme (interpretujeme) ich tak, ako sme zvyknutí:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

5. **Kvantifikátory:** Kvatifikátory budeme tiež realizovať tak, ako sme zvyknutí.
   - (uzavretej) formule $(\forall x)A$ dáme pravdivostnú hodnotu 1 iba v prípade, že A bude pravdivá, bez ohľadu na to, aké indivíduum nahradíme za x. Inak bude mať pravdivostnú hodnotu 0.
   - (uzavretej) formule $(\exists x)A$ dáme pravdivostnú hodnotu 1 ak sa nájde jedno také indivíduum, že keď ho nahradíme za x, budem formula A pravdivá. V inom prípade bude mať pravdivostnú hodnotu 0

- **úloha**: Určte realizáciu pre jazyk úplného ostrého usporiadania. Je to jazyk s rovnosťou a má jediný špeciálny symbol a tým je binárny predikátový symbol $<$.

- **riešenie**: Aby sme určili realizáciu I, musíme určiť univerzum a binárny predikát nad týmto univerzom, ktorým budeme realizovať predikátový symbol $<$.

  Jedno z veľa možných riešení:

  - Univerzum: $\mathcal{U} = \{1, 2\}$
  - Predikát $<_{\mathcal{I}} : \mathcal{U}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ bude mať nasledujúci predpis:

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	1
2	1	1
2	2	0

- Na vyššie popísanej realizácií sa nám ale niečo nezdalo. Môže sa stať, že $1 < 2$ a zároveň $2 < 1$? Stať sa to môže, ale nezodpovedá to nášmu chápaniu ostrého usporiadania. Poďme si teda povedať, čo by také ostré usporiadanie malo spĺňať.

  Spolu sme prišli na tieto tri vlastnosti:

  1. $(\forall x)(\neg(x < x))$ antireflexívnosť.
  2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow (x < z))$ tranzitívnosť
  3. $(\forall x)(\forall y)(\neg(x = z) \rightarrow ((x < y) \vee (y < x)))$ trichotomickosť

  Keď sa teraz pozrieme na tieto vlastnosti zistíme, že naša realizácia spĺňa 1. a 3. vlastnosť, ale nespĺňa 2. vlastnosť.

  Skúsme teda prerobiť realizáciu tak, aby spĺňala všetky vlastnosti. Keď zachováme univerzum, máme len dve možnosti, ako upraviť realizáciu predikátového symbolu $<$ (rozmyslite si prečo):

1.

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	0
2	1	1
2	2	0

2.

x	y	$x <_{\mathcal{I}} y$
1	1	0
1	2	1
2	1	0
2	2	0

- Čo sme teraz vlastne spravili? Definovali sme si axiómy teórie úplného ostrého usporiadania a realizáciu sme prispôsobili tak, aby boli axiómy pri tejto interpretácií pravdivé. Tak sme vlastne vyrobili *model* definovanej teórie. *Modelom* je teda taká realizácia, pre ktorú platí, že sú v nej axiómy teórie pravdivé.