Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #3

Anna Kompišová

10. októbra 2019

1 Jazyk výrokovej logiky

- Jazyk výrokovej logiky je okliešťený jazyk prvého rádu na absolútne minimum. Skladá sa z:
  1. prvotných formúl - $p,\ q,\ r, \ldots$ - môžete si to predstaviť ako 0-árne predikátové symboly.
  2. logických spojok - $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$
  3. pomocných symbolov - (,)

  Pomocou týchto symbolov vytvárame formuly výrokovej logiky. Vytváranie formúl sa definuje induktívne:

  1. Každá prvotná formula je formula.
  2. Ak A, B sú formuly, tak aj $\neg A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B)$ sú formuly.
  3. Každá formula vznikne konečným počtom krokov.

2 Hranie sa s modelmi

- Zopakovali sme si pojmy z prednášky o sémantike výrokovej logiky. Pozrite si to v skriptách (strany 11-12). Obzvlášť odporúčam stráviť viac času nad definíciou modelu a tautologického dôsledku.
- Používali sme nasledujúce označenia:
  - v: valuácia prvotných formúl.
  - $\overline{v}$: rozšírenie valuácie v na všetky formuly.
  - T: nejaká teória (množina formúl)
  - A: nejaká formula
  - $v \models A$: formula A je pri valuácií v prvotných formúl pravdivá. Môžeme povedať aj, že v je modelom A.
  - $v \models T$: v je modelom množiny formúl T.
  - $T \models A$: A je tautologickým dôsledkom T. Inými slovami, nech zoberieme akýkoľvek model množiny formúl T, tak bude formula A v tomto modeli pravdivá.
- **úloha**: Dokážte metavetu: $T \cup \{A\} \models B \iff T \models A \rightarrow B$
- **riešenie**: Dôkaz musíme rozdeliť na dve implikácie.

  $\Rightarrow$: Predpokladáme, že každý model $T \cup \{A\}$ je zároveň modelom B. Potrebujeme ukázať, že každý model T je zároveň modelom $A \rightarrow B$. Zoberme si teraz nejaký model množiny formúl T. Označme si ho v. Pozrime sa na to, ako môže vyzerať hodnota $\overline{v}(A)$:

  1. $\overline{v}(A) = 0$: Z tohto vyplýva, že $\overline{v}(A \rightarrow B) = 1$, lebo vieme, že ak neplatí predpoklad (A), potom je jedno, či platí dôsledok (B). Takže sme zistili, že ak je formula A pri valuácií v nepravdivá, tak v je modelom $(A \rightarrow B)$.
  2. $\overline{v}(A) = 1$: Pri tejto možnosti môžeme využiť náš predpoklad. Vieme, že v je modelom $T \cup \{A\}$, lebo všetky formuly T aj formula A sú v ňom pravdivé. Na základne predpokladu teda vieme, že $\overline{v}(B) = 1$. Takže $\overline{v}(A) = 1$ a $\overline{v}(B) = 1$, takže z definície rozšírenia valuácie platí $\overline{v}(A \rightarrow B) = 1$

V oboch prípadoch sme prišli na to, že ak v je modelom T, tak je nutne aj modelom $(A \to B)$ a to sme chceli dokázať.

$\Leftarrow$: Pri tejto implikácií máme predpoklad, že každý model T je zároveň modelom $(A \to B)$. Potrebujeme dokázať, že ľubovoľný model $T \cup \{A\}$ je modelom B. Zoberme teda ľubovoľný model v množiny formúl $T \cup \{A\}$. Vieme, že tento model je aj modelom T (lebo všetky fomuly T sú v ňom pravdivé). Takže na základe predpokladu platí $\overline{v}(A \to B) = 1$. Zároveň však vieme, že $\overline{v}(A) = 1$, lebo v je model $T \cup \{A\}$.

Pre spor teraz predpokladajme, že $\overline{v}(B) = 0$. Toto ale znamená, že $\overline{v}(A \to B) = 0$, lebo platí predpoklad (A) a neplatí dôsledok (B). To je ale spor s tým, že my už vieme, že $\overline{v}(A \to B) = 1$. $\square$

- **úloha**: Dokážte metavetu: Nech $T = \{A_1, \dots, A_n\}$ je konečná množina formúl. Potom

$$T \models B \iff (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \models B$$

- **riešenie**: Opäť budeme dokazovať dve implikácie.

  $\Rightarrow$: Ako predpoklad máme, že v každom modeli T je formula B pravdivá. Potrebujeme ukázať, že v každom modeli $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ je formula B pravdivá.

  Zoberme teda ľubovoľný model v formuly $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$. Matematickou indukciou sa dá ukázať, že ak v je modelom $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, potom musí platiť $\overline{v}(A_i) = 1$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n\}$. To ale znamená, že v je modelom T. Z predpokladu teda vyplýva, že $\overline{v}(B) = 1$ a to sme chceli dokázať.

  $\Leftarrow$: Teraz predpokladáme, že v každom modeli $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ je formula B pravdivá. Potrebujeme ukázať, že v každom modeli T je pravdivá formula B.

  Nech teda v je ľubovoľný model T. Z definície modelu vieme, že všetky formuly v T sú v modeli v pravdivé. $\overline{v}(A_i) = 1$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n\}$. To ale znamená, že $\overline{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 1$ a podľa predpokladu platí $\overline{v}(B) = 1$ a to sme chceli dokázať.

- **úloha**: Dokážte metavetu: $\emptyset \models A \iff A$ je tautológia.

  Dôkaz tejto metavety je dosť ľahký. Skúste si ho spraviť sami. Stačí nasledovať definície :) a uvedomiť si, že každá valuácia je modelom prázdnej množiny.

- **úloha**: Dokážte metavetu: $\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi \iff \overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$

- **riešenie**: Označme $\mathcal{M}_\varphi$ modely formule φ a $\mathcal{M}_\psi$ modely formule ψ.Tvrdenie $\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi$ platí práve vtedy, keď $\mathcal{M}_\varphi \subseteq \mathcal{M}_\psi$ a zároveň $\mathcal{M}_\psi \subseteq \mathcal{M}_\varphi$. To je ale práve vtedy, keď $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_\psi$ a to je práve vtedy, keď pre každé ohodnotenie v prvotných formúl platí $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$.

3 Spočítateľnosť formúl výrokovej logiky

- **úloha**: Dokážte, že z konečne veľa formúl vieme vytvoriť spočítateľne veľa výrokových formúl.

- **riešenie**: Potrebujeme každej formule priradiť jedinečné prirodzené číslo. Potom zo spočítateľnosti prirodzených čísiel vyplynie spočítateľnosť formúl. Riešení je veľa a tu je niekoľko z nich, na ktoré sme spolu prišli:

  – Máme len konečne veľa prvotných formúl, konečne veľa logických spojok a len dva pomocné symboly, celkovo používame konečne veľa znakov. Nech ich je n. Všetky znaky očísľujeme od 1 po n. Formula (jej zápis) je potom číslo zapísané v $(n+1)$-ovej sústave.

    Príklad: Máme dve prvotné formuly p, q. Takže všetky symboly dostanú nasledovné hodnoty:

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$	$\to$	$\neg$	(	)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Majme teda nejakú formulu. Napr.

$$((p \vee q) \to (q \wedge p))$$

každý znak tejto formuly je teraz cifra. V našom prípade máme $n = 9$ cifier, čiže zápis formuly je vlastne číslo v desiatkovej sústave:

$$8814296823199$$

Zámerne sme nepoužili nulu, aby sa nestalo, že na začiatku vzniknú nejaké nuly. Teraz máme absolútnu istotu, že žiadne dve formuly nemajú priradené rovnaké prirodzené číslo.

– Formulu si naTeXujem a uložím. Jej číslo bude v dvojkovej sústave:

$$1\text{"}zapis\ formuly\ v\ PC\text{"}$$

Jednotku na začiatok sme pridali, aby nám nenarobili šarapatu nuly na začiatku zápisu formuly.

- **úloha**: Dokážte, že zo spočítateľne veľa prvotných formúl vieme vytvoriť spočítateľne veľa výrokových formúl.

- **riešenie**: Opäť je náš cieľ rovnaký. Potrebujeme každej formule priradiť jedinečné prirodzené číslo. Tento raz však už prvotných formúl môže byť nekonečne veľa. Riešení je opäť veľa. Na cvikách sme spomenuli:

  – Použijeme diagonalizáciu. Vieme, že keď máme len konečne veľa prvotných formúl, vieme všetky formuly z nich vytvorené zoradiť do postupnosti (očísľovať prirodzenými číslami). Ďalej vieme zoradiť prvotné formuly do postupnosti.

    Teraz si spravíme takú 2D tabuľku. Každý riadok venujeme jednej prvotnej formule. Do prvého riadku napíšeme všetky formuly, ktoré obsahujú iba prvú prvotnú formulu. Do druhého riadku napíšeme všetky prvotné formuly, ktoré vznikly použitím prvej a druhej prvotnej formuly a obsahujú druhú prvotnú fromulu. Podobne v i-tom riadku budú napísané všetky formuly, ktoré vznikli z prvých i prvotných formúl a obsahujú i-tu prvotnú formulu.

    Podmienka, že formuly v i-tom riadku musia obsahovať i-tu prvotnú formulu je tam preto, aby sa v tejto veľkej tabuľke nachádzala každá formula práve raz.

    Teraz už len stačí vypisovať formuly po diagonálach. Formula na políčku so súradnicami (i, j) (čísľujeme od 1) dostane číslo

$$\frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + j$$

    Odporúčam si to nakresliť a pochopíte :)

  – Definujeme si funkciu f, ktorá každému symbolu priradí nejaké nenulové prirodzené číslo. Logickým spojkám a pomocným symbolom priradí nasledovné hodnoty:

x	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$	$\to$	$\neg$	(	)
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7

    Prvotnej formule p_i priradí hodnotu:

$$f(p_i) = i + 7$$

    Teraz si zoberieme prvočísla. Znaku x na i-tej pozícií v zápise formuly "priradíme" i-te prvočíslo a umocníme ho na $f(x)$. Všetky tieto čísla pre znaky nakoniec vynásobíme.

    Príklad: Majme formulu

$$((p_1 \vee p_3) \to p_{47})$$

    Táto formula dostane číslo:

$$2^6 3^6 5^8 7^2 11^{10} 13^7 17^4 19^{54} 23^7$$

4 Veta o kompaktnosti

Záver cvičenia sme venovali vete o kompaktnosti. Urobili trochu iný dôkaz tejto vety.

Veta 4.1 (O kompaktnosti výrokovej logiky) *Nech T je množina formúl. T má model $\iff$ každá konečná $T_0 \subseteq T$ má model.*

Dôkaz. Implikácia $\Rightarrow$ nie je až taká zaujímavá. Model T je modelom všetkých konečných podmnožín T.

Implikácia $\Leftarrow$ už je zaujímavejšia. Budeme hovoriť, že T má *konečnú vlastnosť*, ak každá konečná podmnožina T má model. Pri dôkaze tejto implikácie predpokladáme, že každá konečná podmnožina T má model (T má konečnú vlastnosť). Z toho by sme chceli odvodiť, že existuje model celého T. Skôr ako tak urobíme, dokážeme si jednu pomocnú lemu.

Lema: Nech T je množina formúl výrokovej logiky, ktorá má konečnú vlastnosť a φ je formula výrokovej logiky. Potom aspoň jedno z $T \cup \{\varphi\}$ a $T \cup \{\neg\varphi\}$ má konečnú vlastnosť.

Dôkaz lemy: Pre spor predpokladajme, že ani jedno z $T \cup \{\varphi\}$ a $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá konečnú vlastnosť. Potom existujú konečné podmnožiny $A, B \subseteq T$ také, že $A \cup \{\varphi\}$ nemá model (je nesplniteľná) a $B \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model. Z toho vyplýva nasledovné

(1) T má konečnú vlastnosť, takže množina A má model. Ale množina $A \cup \{\varphi\}$ už nemá model, z toho vieme, že v každom modeli v množiny A musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 0$.

(2) Podobne množina B má model, ale $B \cup \{\neg\varphi\}$ už nemá model. Preto v každom modeli v množiny B musí platiť $\overline{v}(\neg\varphi) = 0$, čiže $\overline{v}(\varphi) = 1$.

Pozrime sa na modely konečnej množiny $A \cup B$, ktoré musia existovať, lebo $A \cup B \subseteq T$ a T má konečnú vlastnosť. Je jasné, že každý model v množiny $A \cup B$ je modelom A aj B. Podľa (1) musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 0$ a podľa (2) musí platiť $\overline{v}(\varphi) = 1$, čo je spor, lebo nemôže platiť oboje naraz. Tým sme skončili dôkaz pomocnej lemy. Tým končí dôkaz pomocnej lemy.

Teraz využijeme fakt, ktorý sme dokazovali vyššie: všetky formuly výrokovej logiky sa dajú usporiadať do postupnosti. φ_i budeme označovať i-tu formulu v postupnosti.

Teraz si postupne vytvoríme množinu S.

$$
\begin{aligned}
S_0 &= T \\
S_1 &= \begin{cases} S_0 \cup \{\varphi_1\} & \text{ak } S_0 \cup \{\varphi_1\} \text{ má konečnú vlastnosť} \\ S_0 \cup \{\neg\varphi_1\} & \text{inak} \end{cases} \\
&\vdots \\
S_i &= \begin{cases} S_{i-1} \cup \{\varphi_i\} & \text{ak } S_{i-1} \cup \{\varphi_i\} \text{ má konečnú vlastnosť} \\ S_{i-1} \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{inak} \end{cases} \\
S &= \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i
\end{aligned}
$$

Zjavne každé S_i má konečnú vlastnosť, lebo T má konečnú vlastnosť a všetky S_i sme vytvárali tak, aby mali konečnú vlastnosť (aplikovali sme pomocnú lemu, ktorú sme dokázali vyššie).

Teraz by sme radi prehlásili S za "model"množiny T. Pod tým modelom myslím, že by sme radi prehlásili všetky formuly S za pravdivé. Potom by zjavne boli pravdivé naraz všetky formuly T, lebo sú podmnožinou S. Ale existuje taká valuácia, že práve formuly z S sú v nej pravdivé?

Teraz si trochu uľahčíme život tým, že prepíšeme všetky formuly v S len pomocou spojek $\wedge, \neg$. To sa dá, lebo tieto dve spojky tvoria úplný systém. Takže vieme každú formulu prepísať na ekvivalentnú tak, že se nezmení množina jej modelov.

Teraz stačí overiť, že naozaj každá formula dostane valuáciu (čiže buď je v S φ alebo $\neg\varphi$ ale nie oboje) a nemôže sa stať prípad, že budú v S formuly φ, ψ a $\neg(\varphi \wedge \psi)$ zároveň.

Najprv sa pozrime na prvý prípad. Zjavne z konštrukcie S musí byť aspoň jedno z $\varphi, \neg\varphi$ v množine S. Môže sa stať, že sú tam obe? Predpokladajme, že by tam mohli byť obe (a v tomto prípade by pre S neexistovala vhodná valuácia). Potom existuje také i, že $\varphi, \neg\varphi \in S_i$ (lebo sme ich niekedy dali do S). Podľa toho, ako sme S_i vytvorili, tak by malo mať konečnú vlastnosť. Zoberme si ale jej konečnú podmnožinu $\{\varphi, \neg\varphi\}$. Táto množina by mala mať model, lebo je konečnou podmnožinou S_i, ale ona ho nemá, a to je spor.

Pozrime sa na druhý prípad. Potrebujeme, aby S spĺňalo, že keď obsahuje φ a ψ, tak bude obsahovať aj $\varphi \wedge \psi$. Môže teda nastať opak? Predpokladajme (pre spor), že S obsahuje φ, ψ a $\neg(\varphi \wedge \psi)$. Preto určite existuje S_i, že $\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi) \in S_i$. S_i má konečnú vlastnosť, preto aj množina $\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$ by mala mať model, ale ona ho opäť nemá a to je spor.

Tak sme overili, že keď určíme valuáciu v tak, že všetky prvotné formuly v S označíme ako pravdivé a ostatné za nepravdivé, dotaneme valuáciu, pri ktorej budú pravdivé práve formuly z S. Keďže $T \subseteq S$, tak v bude zároveň hľadaným modelom T. $\square$