Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #4

Anna Kompišová

21. októbra 2019

1 Aplikácie vety o kompaktnosti

- **úloha:** Majme graf G. Navrhnite množinu formúl výrokovej logiky, ktorá je splniteľná práve vtedy, keď graf G je k-zafarbiteľný.
- **riešenie:** Základom je dobre si zvoliť formu prvotných formúl. My sme si zvolili takéto prvotné formuly: "Vrchol v má farbu a"$= p_{v,a}$.
  Chceme vyjadriť dve veci:

  1. každý vrchol má práve jednu farbu
  2. susedné vrcholy majú rôzne farby

  Skúsme vyjadriť 1. vlastnosť pomocou množiny formúl. Najprv povieme, že každý vrchol musí mať nejakú farbu:

  $$T_0 = \{p_{v,1} \vee p_{v,2} \vee \cdots \vee p_{v,k} \mid \forall v \in V\}$$

  Potom povieme, že tá farba musí byť najviac jedna:

  $$T_1 = \{p_{v,i} \to \neg p_{v,j} \mid \forall v \in V;\ i, j \in \{1, 2, \dots, k\};\ i \neq j\}$$

  Tým sme zabezpečili, že množina formúl $T_0 \cup T_1$ bude splniteľná iba v prípade, že bude existovať také ohodnotenie prvotných formúl, že práve jedno z $\{p_{v,1}, p_{v,2}, \dots, p_{v,k}\}$ bude pravdivé pre každé $v \in V$.

  Teraz skúsme formulovať 2. vlastnosť:

  $$T_2 = \{p_{v,i} \to \neg p_{u,i} \mid v, u \in V;\ (v, u) \in E;\ i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

  Tieto formuly vlastne hovoria, že ak má vrchol farbu i, potom nemôže mať farbu i jeho sused.

  Za množinu formúl zvolíme $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$.

  Teraz sa môžeme presvedčiť, že modely T kódujú k-farbenia grafu G. Zoberme si nejaké k-farbenie grafu G. Nastavme valuáciu v prvotných formúl tak, že:

  $$v(p_{u,i}) = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } u \text{ má farbu } i \text{ v otomto farbení} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

  Takto definovaná valuácia je určite modelom teórie T.

  Teraz naopak, zoberme si model v teórie T a definujem podľa neho k-farbenie grafu G takto:

  $$f(u) = i \text{ ak } v(p_{u,i}) = 1$$

  Táto funkcia je dobre definovaná, lebo je zabezpečená vlastnosť 1. a je to regulárne farbenie, lebo je zabezpečená aj vlastnosť 2.

- **úloha:** Pomocou vety o kompaktnosti dokážte, že graf G je k-zafarbiteľný $\iff$ každý jeho konečný podgraf je k-zafarbiteľný.

- **riešenie:** Môžeme si všimnúť, že veta o kompaktnosti má podobnú štruktúru ako to, čo chceme dokázať. Chceme dokázať že celok má nejakú vlastnosť práve vtedy keď majú túto vlastnosť všetky konečné kúsky celku.

  Dôkaz implikácie $\Rightarrow$ je jednoduchý a nepotrebujeme naňho použiť vetu o kompaktnosti. Stačí si uvedomiť, že k-farbenie celého grafu je vhodné farbenie aj pre všetky konečné podgrafy.

  Na dôkaz implikácie $\Leftarrow$ už použijeme vetu o kompaktnosti. Máme predpoklad, že každý konečný podgraf G je k-zafarbiteľný a potrebujeme ukázať, že z toho vyplýva to isté o celom grafe G.

  Vieme, že celý graf je k-zafarbiteťný práve vtedy, keď množina formúl T z predchádzajúcej úlohy má model. Stačí teda ukázať, že z existencie k-farbenia pre ľubovoľný konečný podgraf vyplýva, že každá konečná podmnožina T' množiny T je splniteľná. Potom stačí využiť vetu o kompaktnosti a máme hotovo.

  Nech množina formút T_i je vyrobená pre konečný podgraf G_i grafu G. Z toho ako sme vyrábali T vieme, že každé T_i je podmnožinou T. Zároveň vieme, že každé T_i má model, lebo graf T_i je k-zafarbiteľný.

  Množiny T_i ale nie sú všetky konečné podmnožiny T a my musímenájsť model pre ľubovoľnú končnú podmnožinu T'. Vieme, že v množine T' je spomenutých len konečne veľa vrcholov grafu G. Označme si V_i množinu vrcholov spomenutých v T'. Označme G_i graf, ktorý je indukovaný podgraf grafu G vrcholmi V_i. Množina T_i je zjavne nadmnožina množiny T' a vieme o nej, že má model, lebo z predpokladu vieme, že G_i je k-zafarbiteľný. Tento model je zárovaň aj modelom T'. $\square$

- **úloha:** Pomocou vety o kompaktnosti dokážte, že sa pomocou sady Wangových kachličiek dá okachličkovať celé plocha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ak sa dá okachličkovať ľubovoľná konečná plocha $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- Krajšie zadanie a riešenie nájdete v starej písomke z roku 2012/2013 (úloha 3). Link na písomku je hneď vedľa linku na tieto poznámky.

- **úloha:** Majme množinu mužov a žien. Každý muž má konečný zoznam žien, utriedený podľa preferencie. Podobne, každá žena má konečný zoznam mužov, utriedený podľa preferencie. Popárujeme teraz niektorých mužov s niektorými ženami. Budeme hovoriť, že takéto párovanie je *stabilné*, ak neexistuje dvojica *(M,Ž)* taká, že M ani $\check{Z}$ nie sú s nikým spárovaní, ale mohli by byť (M má $\check{Z}$ na zozname a $\check{Z}$ má M na zozname) a neexistuje dvojica *(M,Ž)* taká, že M tvorí pár s $\check{z}$ $\check{Z}$ tvorí pár s m, a pritom M preferuje $\check{Z}$ pred $\check{z}$ a $\check{Z}$ preferuje M pred m. Pre konečnú množinu mužov a žien vždy existuje stabilné párovanie. Dokážte, že stabilné párovanie existuje vždy aj pre nekonečné množiny mužov a žien.

- **hint:** Prvotné formuly sú tvaru $P_{m,z} =$ "muž m je spárovaný so ženou z."
  Treba sformulovať nasledujúce podmienky:

  1. muž môže byť spojený iba so ženou zo zoznamu
  2. žena môže byť spojená iba s mužom zo zoznamu
  3. muž nie je spojený s dvomi ženami
  4. žena nie je spojená s dvoma mužmi
  5. ak je možný pár *(m,ž)*, potom žena $\check{z}$ alebo muž m je s niekým spárovaní
  6. nenastane situácia, že existujú páry *(M,ž)* a *(m,Ž)* a pritom M má v zozname vyššie $\check{Z}$ a $\check{Z}$ má v zozname vyššie *M*.