

ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – CVIČENIE #5

Anna Kompišová

7. novembra 2019

1 Dokazovanie vo formálnom systéme výrokovej logiky

Formálny systém:

- Jazyk : formuly zložené z prvotných formúl, logických spojok $\neg$, $\rightarrow$ a zátvoriek.
- Axiómy:
 - (A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 - (A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 - (A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Odvodzovacie pravidlo: Modus ponens

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Dokážte nasledujúce formuly:

- (T1) $A \rightarrow A$
- (T2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (T2') $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
- (T3) $\neg\neg A \rightarrow A$
- (T4) $A \rightarrow \neg\neg A$
- (T5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (T6) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$
- (T7) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
- (T8) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (T9) $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$

Dôkaz (T1):

1. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (A1)
2. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (A1)
3. $\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (A2)
4. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP 2,3)
5. $\vdash A \rightarrow A$ (MP 1,4)

Dôkaz (T8): Od tohto momentu sa už mohla používať veta o dedukcii (VD), lebo dôkaz formuly $A \rightarrow A$ je súčasťou jej dôkazu.

Veta 1.1 (o dedukcii) *Nech T je množina formúl výrokovej logiky a A, B sú formuly výrokovej logiky. Potom platí:*

$$T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \rightarrow B$$

Konkrétne pri tomto príklade sa nám namne hodí. Všimnime si, že keby sme vedeli dokázať

$$A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C$$

tak by sme mali hotovo, lebo by stačilo použiť 3-krát vetu o dedukcii:

$$\begin{array}{ll} A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) & \vdash C \quad (\text{predpoklad}) \\ (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) & \vdash A \rightarrow C \quad (\text{VD}) \\ (A \rightarrow B) & \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{VD}) \\ & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{VD}) \end{array}$$

Teraz už len stačí dokázať predpoklad:

$$\begin{array}{ll} 1. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \quad (\text{predpoklad}) \\ 2. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B \quad (\text{predpoklad}) \\ 3. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \quad (\text{MP } 1,2) \\ 4. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C \quad (\text{predpoklad}) \\ 5. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C \quad (\text{MP } 3,4) \end{array}$$

Celý dôkaz vyzerá takto:

$$\begin{array}{ll} 1. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \quad (\text{predpoklad}) \\ 2. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B \quad (\text{predpoklad}) \\ 3. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \quad (\text{MP } 1,2) \\ 4. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C \quad (\text{predpoklad}) \\ 5. & A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash C \quad (\text{MP } 3,4) \\ 6. & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C \quad (\text{VD}) \\ 7. & (A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{VD}) \\ 8. & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{VD}) \end{array}$$

Poznámky:

- Možno ste zmätení, ako sme dostali tie predpoklady pre dôkaz. Jednoducho sme si ich vymysleli tak, aby nám to vyšlo.
- Veta o dedukcii je všeobecne dobrý pomocník. Môžeme si presúvať predpoklady zprava doľava a naopak (Pozor! na pravej strane musí niečo zostať). Na ľavej strane (pred hrablou) je množina, takže formuly, ktoré sú tam, nemajú určené poradie, v akom ich máme posúvať na druhú stranu.

Príklad, máme formulu $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta))$, ktorá je dokázateľná. Potom môžeme spraviť toto:

$$\begin{array}{ll} 1. & \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)) \\ 2. & \alpha \vdash \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta) \quad (\text{VD smer } \Leftarrow) \\ 3. & \alpha, \beta \vdash \gamma \rightarrow \delta \quad (\text{VD smer } \Leftarrow) \\ 4. & \alpha, \beta, \gamma \vdash \delta \quad (\text{VD smer } \Leftarrow) \\ 5. & \alpha, \gamma \vdash \beta \rightarrow \delta \quad (\text{VD smer } \Rightarrow) \\ 6. & \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \quad (\text{VD smer } \Rightarrow) \\ 6. & \vdash \gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \quad (\text{VD smer } \Rightarrow) \end{array}$$

Čiže α , β a γ môžu byť na začiatku formuly v ľubovoľnom poradí, ale δ musí vždy zostať na konci.

- Zápis $T \vdash A$ znamená, že z formúl T vieme dokázať formulu A . Ako keby sme formuly z T na chvíľu zaradili medzi axiomy. Čiže napríklad platí, že z predpokladu φ viem dokázať φ

$$\varphi \vdash \varphi$$

- Ak chceme použiť modus ponens na formuly, ktoré vieme dokázať za nejakých predpokladov, tak predpoklady výslednej formuly sú zjednotením predpokladov formúl, na ktoré sme použili modus ponens, čiže

$$\begin{array}{lll} 1. & T_1 & \vdash A \quad (\text{predpoklad}) \\ 2. & T_2 & \vdash A \rightarrow B \quad (\text{predpoklad}) \\ 3. & T_1 \cup T_2 & \vdash B \quad (\text{MP } 1,2) \end{array}$$

Dôkaz (T2):

$$\begin{array}{lll} 1. & \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) & (\text{A1}) \\ 2. & \neg A \vdash \neg B \rightarrow \neg A & (\text{VD}) \\ 3. & \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) & (\text{A3}) \\ 4. & \neg A \vdash A \rightarrow B & (\text{MP } 2,3) \\ 5. & \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) & (\text{VD}) \end{array}$$

Dôkaz (T2'):

$$\begin{array}{lll} 1. & \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) & (\text{T2}) \\ 2. & \neg A \vdash (A \rightarrow B) & (\text{VD}) \\ 3. & \neg A, A \vdash B & (\text{VD}) \\ 4. & A \vdash \neg A \rightarrow B & (\text{VD}) \\ 5. & \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) & (\text{VD}) \end{array}$$

Dôkaz (T3):

$$\begin{array}{lll} 1. & \vdash \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A) & (\text{T2}) \\ 2. & \neg\neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg\neg A & (\text{VD}) \\ 3. & \vdash (\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) & (\text{A3}) \\ 4. & \neg\neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow A & (\text{MP } 2,3) \\ 5. & \neg\neg A \vdash A & (\text{VD}) \\ 6. & \vdash \neg\neg A \rightarrow A & (\text{VD}) \end{array}$$

Dôkazy (T4) - (T9): Kto nemá napísané dôkazy týchto formúl, má jedinečnú možnosť dokázať ich sám. :) Ak by s tým bol nejaký problém, tak mi dajte vedieť. Ohotne poradím.

Nepovinná DU za 2 body: Na vyriešenie máte 2 týždne.

Dokážte vo výrokovej logike:

a) $\vdash (A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow \neg A$

b) $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

Používať môžete vetu o dedukcii a teorémy (T1) a (T9).