ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY – CVIČENIE #7

Anna Kompišová

14. novembra 2019

- Prvú časť cvika sme venovali konjunktívnej a disjunktívnej normálnej forme. Najprv si povedzme, čo to vlastne je.
- *Disjunktívna normálna forma* (DNF) A' pre formulu A je formula tvaru
$$A' = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k$$
kde každé A_i je tvaru
$$A_i = (l_{i,1} \wedge l_{i,2} \wedge \cdots \wedge l_{i,k_i})$$
pričom každé $l_{i,j}$ je buď prvotná formula alebo jej negácia a $A' \leftrightarrow A$
- *Konjunktívna normálna forma* (KNF) A' pre formula A je formula tvaru
$$A' = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$$
kde každé A_i je tvaru
$$A_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \cdots \vee l_{i,k_i})$$
pričom každé $l_{i,j}$ je buď prvotná formula alebo jej negácia a $A' \leftrightarrow A$
- Je niekoľko možností, ako dostať formulu do týchto normálnych tvarov. Prvý spôsob spomínaný na cviku bol, že ju upravíme pomocou nasledujúcich ekvivalencií:
  - $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ - prepis implikácie
  - $\neg\neg A \leftrightarrow A$
  - $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
    $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ - deMorganove pravidlá
  - $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
    $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ - distributívne zákony

  Platia aj všeobecnejšie verzie deMorganových pravidiel aj distributívnych zákonov:

  - $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_k)$
    $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_k)$ - deMorganove pravdilá
  - $(A_{1,1} \vee A_{1,2} \vee \cdots \vee A_{1,k_1}) \wedge (A_{2,1} \vee \cdots \vee A_{2,k_2}) \wedge \cdots \wedge (A_{l,1} \vee \cdots \vee A_{l,k_l}) \leftrightarrow$
    $\leftrightarrow (A_{1,1} \wedge A_{2,1} \wedge \cdots \wedge A_{l,1}) \vee (A_{1,1} \wedge A_{2,1} \wedge \cdots \wedge A_{l,2}) \vee \cdots \vee (A_{1,k_1} \wedge A_{2,k_2} \wedge \cdots \wedge A_{l,k_l})$
    $(A_{1,1} \wedge A_{1,2} \wedge \cdots \wedge A_{1,k_1}) \vee (A_{2,1} \wedge \cdots \wedge A_{2,k_2}) \vee \cdots \vee (A_{l,1} \wedge \cdots \wedge A_{l,k_l}) \leftrightarrow$
    $\leftrightarrow (A_{1,1} \vee A_{2,1} \vee \cdots \vee A_{l,1}) \wedge (A_{1,1} \vee A_{2,1} \vee \cdots \vee A_{l,2}) \wedge \cdots \wedge (A_{1,k_1} \vee A_{2,k_2} \vee \cdots \vee A_{l,k_l})$
    - distributívne zákony

  Tieto všeobecné zákony sa dokazujú matematickou indukciou zo základných. Aby sme sa mohli zbaviť zátvoriek, treba ukázať, že na uzátvorkovaní výrazov spojených len jednou spojkou (buď $\wedge$ alebo $\vee$) nezáleží. To znamená, že bez ohľadu v ako poradí to vyhodnocujeme, vždy dostaneme rovnaký výsledok.
- Aby ste dostali nejakú formulu do jedného z normálnych tvarov, je dobré dodržať tento postup.
  1. Prepísať všetky implikácie pomocou spojok $\neg$, $\wedge$ a $\vee$.
  2. Pomocou deMorganových zákonov dostať všetky negácie až k prvotným formulám.
  3. Použiť distributívne zákony na "neupratané" podformuly.

Môže sa stať, že takto dostanete formulu v tom druhom normálnom tvare, ako práve potrebujete. Ak sa to stane, stačí jednoducho použiť distributívne zákony ešte raz na celú formulu.

V každom kroku odporúčam pozrieť, či sa niekde vo formule nevyskytuje ako podformula tautológia, či kontradikcia. Buď sa dá vynechať, alebo určí celkový výsledok. Ak sa dá vynechať, vždy je lepšie formulu skrátiť. Znižujete tým pravdepodobnosť chyby.

- Ďalší spôsob je cez pravdivostnú tabuľku. Napr. nech máme formulu φ, ktorá má v sebe prvotné formuly a, b a c a má takúto tabuľku hodnôt:

a	b	c	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Potom DNF vieme vyrobiť tak, že každá klauzula bude zodpovedať jednému riadku tabuľky, ktorý má na konci jednotku. V našom konkrétnom prípad to bude vyzerať takto:

$$\varphi \quad \leftrightarrow \quad \Big((\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)\Big)$$

KNF potom vieme vyrobiť z DNF použitím distributívnych zákonov. Existuje však aj trochu jednoduchší spôsob.

Ak na negáciu formuly v tvare DNF aplikujeme deMorganove zákony, dostaneme formulu v tvare KNF. Funguje to, pretože negácie pri ceste k prvotným formulám otočia postupne všetky spojky. Preto použijeme ten istý postup ako pri DNF, ale opíšeme riadky s *nulou* na konci. Bude to v našom prípade vyzerať takto:

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &\leftrightarrow \quad \neg\Big((\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)\Big) \quad \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \quad \Big(\neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge \neg c)\Big) \quad \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \quad \Big((a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)\Big)
\end{aligned}$$

- Potom sme sa pozreli na to, čo sa v skutočnosti deje vo vnútri dôkazu vety o úplnosti. Zistili sme, že sa v skutočnosti generuje pre každú formulu jej dôkaz (veľmi dlhý). Presný postup aj s popisom nájdete v poznámkach od Kuka z cvičenia číslo 5, ktoré by mali byť na stránke niekde blízko týchto poznámok.

- Na záver sme si zopakovali jazyk prvého rádu a definíciu termu a formuly (nájdete v skriptách).

- **Úloha:** Máme daný jazyk prvého rádu s rovná sa daný nasledujúcimi špeciálnymi symbolmi:
  - funkčné symboly: S (unárny), $+$ (binárny), 0 (0-árny)
  - predikátový symbol: P (unárny)
  - premenné: x, y

  O každom nasledujúcom reťazci rozhodite, či je to term, formula alebo nič z toho.

  a) $S(x) = 0$
  b) $P(S(0), P(x))$
  c) $S(x + y)$

d) $(\forall x)(P(x) \to P(S(x)))$

e) $S(P(x))$

f) $(\exists x)((P(0) \wedge (\forall y)P(x+y)) \to \neg(x=y)$

g) $S(S(S(0)))$

h) $(S(0)+S(x))+(S(x)+S(S(y)))$

- **Riešenie:**

a) formula

b) nič, lebo do predikátového symbolu dávame termy,ktoré nemôžu obsahovať predikátový symbol. Navyše predikátový symbol musí vždy dostať rovnaký počet argumentov.

c) term

d) formula

e) nič, lebo do funkčného symbolu nesmieme dosadiť predikátový symbol

f) formula

g) term

h) term