Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #8

Anna Kompišová

14. novembra 2019

- Zopakovali sme si Tarského definíciu pravdivosti. Definovali sme si relačnú štruktúru, ktorou realizujeme jazyk a ohodnotenie premenných.

  Relačná štruktúra $\mathcal{M}$ obsahuje:

  1. univerzum $\mathcal{U}$
  2. n-ánu funkciu $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ pre každý n-árny funkčný symbol f.
  3. n-ány predikát $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{U}^n \to \{0, 1\}$ pre každý n-árny predikátový symbol P. Alternatívne môžeme brať predikát $P_{\mathcal{M}}$ ako podmnožinu $\mathcal{U}^n$.

  Tejto relačnej štruktúre hovoríme aj realizácia jazyka.

  Ohodnotenie premenných je zobrazenie, ktoré priradí premenným prvky z univarza $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.

- $t[e]$ označuje indivíduum z univerza, ktoré sme dostali aplikovaním všetkých funkcií na prvky priradené premenným ohodnotením e. $A[e]$ označuje pravdivostnú hodnotu formuly vyhodnotenú pri ohodnotení premenných e.

  Napríklad, náš jazyk okrem logických symbolov obsahuje navyše binárny funkčný symbol f a unárny predikátový symbol P. Realizácia jazyka bude mať univerzum $\mathbb{N}$, f interpretujeme ako $\times$ a P interpretujeme ako predikát, ktorý bude pravdivý len pre všetky prvočísla. Nech e priradí premenným hodnoty takto:

p	$e(p)$
x	5
y	3
z	27
w	14

  Potom

$$f(f(x, x), y)[e] = (5 \times 5) \times 3 = 75$$

$$\neg P(f(x, w))[e] \Leftrightarrow e(x) \times e(w) \notin P_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow True$$

  Druhé platí preto, lebo $5 \times 14 = 70$ naozaj nie je prvočíslo.

- Teraz môžeme definovať pravdivosť formuly. Označenie $\mathcal{M} \models A[e]$ bude znamenať, že formula A je pravdivá pri realizácií jazyka $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e.

  Tarského definícia pravdivosti

  1. Nech $A : P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde P je n-árny predikátový symbol rôzny od $=$ a $t_1, t_2, \ldots t_n$ sú termy. Potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak $(t_1[e], t_2[e], \ldots, t_n[e]) \in P_{\mathcal{M}}$.
  2. Nech $A : t_1 = t_2$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak $t_1[e] = t_2[e]$. To znamená, že sa musia rovnať indivíduá.
  3. Nech $A : \neg B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak $\mathcal{M} \not\models B[e]$.
  4. Nech $A : B \to C$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak $\mathcal{M} \not\models B[e]$ alebo $\mathcal{M} \models C[e]$.
  5. Nech $A : (\forall x)B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak pre ľubovoľné indivíduum $m \in \mathcal{U}$ platí $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$
  6. Nech $A : (\exists x)B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$ ak pre nejaké indivíduum $m \in \mathcal{U}$ platí $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$

Zápis $e(x/m)$ označuje také ohodnotenie premenných, že všetky premenné okrem x majú rovnakú hodnotu ako v ohodnotení e, len premenná x má hodnotu m.

Ak platí $\mathcal{M} \models A[e]$ pre ľubovoľné ohodnotenie e, potom hovoríme, že formula A je *splnená* a píšeme $\mathcal{M} \models A$.

- **Úloha:** Pre nasledujúce formuly a realizácie rozhodnite, ktoré formuly sú splnené pre ktoré realizácie.

  a) $f(x, y) = f(y, x)$

  b) $(\exists x)P(f(x, y))$

  c) $(\forall x)P(f(x, y))$

  d) $(P(f(x, y)) \wedge P(f(y, x))) \to P(x)$

  1. $\mathcal{U} = \mathbb{N}, f \mapsto \times, P \mapsto$ množina prvočísel
  2. $\mathcal{U} = \mathbb{N}, f \mapsto +, P \mapsto$ množina párnych čísel
  3. $\mathcal{U} = \{a, b\}^*, f \mapsto$ zreťazenie, $P \mapsto$ množina reťazcov končiacich alebo začínajúcich na a

- **Riešenie:**

	a)	b)	c)	d)
1.	✓	✗	✗	✗
2.	✓	✓	✗	✗
3.	✗	✓	✗	✗

1.a) Platí, pretože vieme, že funkcia krát je komutatívna. Preto pre ľubovoľné prirodzené čísla x a y bude platiť $x \times y = y \times x$

1.b) Stačí zvoliť $e(y) = 4$ a bezohľadu na to ako by sme zvolili ohodnotenie x, výsledné číslo nemôže byť prvočíslo.

1.c) Platí rovnaký argument ako v 1.b).

1.d) Stačí zvoliť $e(x) = 1, e(y) = 2$.

2.a) Platí, pretože vieme, že funkcia plus je komutatívna.

2.b) Platí lebo pre ľubovoľné prirodzené číslo y naozaj existuje také x, že $x + y$ je párne. Stačí zvoliť $x = y$.

2.c) Zvoľme napríklad $e(y) = 0$. Formula hovorí, že za x môžeme dostadiť hociaké číslo a $x + 0$ je vždy párne, čo nie je pravda.

2.d) Stačí zvoliť $e(x) = 1, e(y) = 1$.

3.a) Zvoľme $e(x) = a, e(y) = b$, potom na ľavej strane dostaneme ab a na pravej ba, čo zjavne nie je ten istý reťazec.

3.b) Platí, pretože bez ohľadu, aký reťazec dosadíme za y, vždy to vieme zachrániť tak, že x určíme ako a.

3.c) Zvoľme $e(y) = b$. Formula hovorí, že za x môžeme dostadiť hocaký reťazec xb bude mať vždy na začiatku alebo na konci a. Zjavne to nie je pravda, ak sme za x dosadili b.

3.d) Zvoľme $e(x) = b, e(y) = a$.

- Ďalšiu časť cvičenia sme sa pokúšali nájsť teóriu, ktorej jediný model budú prirodzené čísla s nulou a funkciou nasledovníka. Celý postup nájdete v Kukových poznámkach, ktoré sú niekde blízko týchto poznámok.