Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #9

Anna Kompišová

25. novembra 2019

- Na minulom cviku sme sa venovali prevažne sémantike. Toto cviko bolo venované syntaxi, konkrétne dokazovaniu vo formálnom systéme predikátovej logiky. Na začiatku cvika sme si zopakovali, ako vyzerá formálny systém.
- Formálny systém predikátovej logiky:
  - jazyk (formuly, ktoré sme definovali minulé cviko)
  - axiómy:

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & A \to (B \to A) \\
(A2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(A3) & (\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \\
(A\check{S}) & (\forall x)A \to A_x[t] \qquad \text{axióma špecifikácie} \\
 & \text{term } t \text{ nesmie obsahovať premennú, ktorá zostane viazaná} \\
(SP) & (\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B) \qquad \text{schéma preskoku} \\
 & \text{premenná } x \text{ nemá voľný výskyt vo formule } A
\end{array}
$$

  - Odvodzovacie pravidlá:

$$
\text{modus ponens:} \quad \frac{A, A \to B}{B}
$$

$$
\text{pravidlo generalizácie:} \quad \frac{A}{(\forall x)A}
$$

- Zápis $A_x[t]$ v axióme špecifikácie predstavuje formulu, ktorá vznikne z formuly A nahradím každého výskytu premennej x termom t naraz. Podmienka na použitie axiómy je tam preto, lebo bez nej by sme vedeli dokázať aj tvrdenia, ktoré nie sú pravdivé a my chceme aby náš systém bol korektný. Napríklad by sme vedeli dokázať:

$$
(\forall x)(\exists y)(x = y + 2) \to (\exists y)(y = y + 2)
$$

  čo je zjavne blbosť minimálne pre štandardnú interpretáciu znaku + pre celé čísla. Axiómy by mali byť pravdivé bez ohľadu na realizáciu jazyka.

- Pri dokazovaní vo výrokovej logike sme často používali vetu o dedukcií. Podobné tvrdenie platí aj pre predikátovú logiku, ale je trochu komplikovanejšie.

  Veta 0.1 (O dedukcií v PL) *Nech T je množina formúl predikátovej logiky a A a B sú formuly predikátovej logiky. Potom platí:*

  1. *Ak $T \vdash A \to B$, potom $T, A \vdash B$.*
  2. *Ak $T, A \vdash B$ a pri dôkaze B z predpokladov T, A sa nepoužilo pravidlo generalizácie na premennú, ktorá má v T, A voľný výskyt, potom $T \vdash A \to B$.*

  Čiže pri používaní vety o dedukcií si musíme dať pozor na správne použitie pravidla generalizácie.

- Príklad, že veta o dedukcií bez podmienky na pravidlo generalizácie nefunguje.

1.		$\vdash$	$x = y \to x = y$	(T1)
2.	$x = y$	$\vdash$	$x = y$	(VD)
3.	$x = y$	$\vdash$	$(\forall x)(x = y)$	(PG)
4.		$\vdash$	$x = y \to (\forall x)(x = y)$	(VD)

Posledné tvrdenie zjavne nie je pravdivé.

- **Úloha:** Dokážte, že ak $\vdash (\forall x)A(x)$, potom $\vdash (\forall y)A(y)$, kde y je nová premenná.

- **Riešenie:**

1.	$\vdash$	$(\forall x)A(x)$	predpoklad
2.	$\vdash$	$(\forall x)A(x) \to A(y)$	(AŠ $x := y$)
3.	$\vdash$	$A(y)$	(MP 1,2)
4.	$\vdash$	$(\forall y)A(y)$	(PG)

Všimnite si, že axiómu špecifikácie aj pravidlo generalizácie sme použili správne.

- **Úloha:** Dokážte, že ak $\vdash A \to B$ a x nemá voľný výskyt v A, potom $\vdash A \to (\forall x)B$.

- **Riešenie:**

1.	$\vdash$	$A \to B$	predpoklad
2.	$\vdash$	$(\forall x)(A \to B)$	(PG)
3.	$\vdash$	$(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$	(SP)
4.	$\vdash$	$A \to (\forall x)B$	(MP 2,3)

Všimnite si, že schému preskoku sme mohli použiť, pretože sme mali zaručené, že x nemá voľný výskyt v A.

- **Úloha:** Dokážte $\vdash (\forall x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall y)(\forall x)A(x, y)$. Majú sa vymeniť len kantifikátory. Formula A sa nemá zmeniť vôbec.

- **Riešenie:**

1.		$\vdash$	$(\forall x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall x)(\forall y)A(x, y)$	(T1)
2.	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	$\vdash$	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	(VD)
3.		$\vdash$	$(\forall x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall y)A(x, y)$	(AŠ $x := x$)
4.	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	$\vdash$	$(\forall y)A(x, y)$	(MP 2,3)
5.		$\vdash$	$(\forall y)A(x, y) \to A(x, y)$	(AŠ $y := y$)
6.	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	$\vdash$	$A(x, y)$	(MP 4,5)
7.	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	$\vdash$	$(\forall x)A(x, y)$	(PG)
8.	$(\forall x)(\forall y)A(x, y)$	$\vdash$	$(\forall y)(\forall x)A(x, y)$	(PG)
9.		$\vdash$	$(\forall x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall y)(\forall x)A(x, y)$	(VD)

Rozmyslite si, prečo boli všetky kroky dôkazu korektné.

- Formálny systém predikátovej logiky neobsahuje existenčný kvantifikátor, ale v jazyku ho máme. Aby sme ho mohli používať, budeme reťazec $(\exists x)$ považovať za skratku pre $\neg(\forall x)\neg$.

- **Úloha:** Dokážte $\vdash (\exists x)(\exists y)A(x, y) \to (\exists y)(\exists x)A(x, y)$.

- **Riešenie:** Chceme teda dokázať podobné tvrdenie ako pre všeobecné kvantifikátory. Aby sme s tým vedeli pracovať, prepíšeme si existenčné kvantifikátory na všeobecné a budeme sa snažiť dokázať $\vdash \neg(\forall x)\neg\neg(\forall y)\neg A(x, y) \to \neg(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x, y)$.

1.		$\vdash$	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y) \to (\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	(T1)
2.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	(VD)
3.		$\vdash$	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y) \to \neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	(AŠ $y := y$)
4.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	(MP 2,3)
5.		$\vdash$	$\neg\neg(\forall x)A(x,y) \to (\forall x)\neg A(x,y)$	(T5)
6.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$(\forall x)\neg A(x,y)$	(MP 4,5)
7.		$\vdash$	$(\forall x)\neg A(x,y) \to \neg A(x,y)$	(AŠ $x := x$)
8.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$\neg A(x,y)$	(MP 6,7)
9.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$(\forall y)\neg A(x,y)$	(PG)
10.		$\vdash$	$(\forall y)\neg A(x,y) \to \neg\neg(\forall y)\neg A(x,y)$	(T6)
11.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$\neg\neg(\forall y)\neg A(x,y)$	(MP 9,10)
12.	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	$\vdash$	$(\forall x)\neg\neg(\forall y)\neg A(x,y)$	(PG)
13.		$\vdash$	$(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y) \to (\forall x)\neg\neg(\forall y)\neg A(x,y)$	(VD)
14.		$\vdash$	$\neg(\forall x)\neg\neg(\forall y)\neg A(x,y) \to \neg(\forall y)\neg\neg(\forall x)\neg A(x,y)$	(T7 + MP)

- To isté tvrdenie pre existenčné kvantifikátory a mali sme s ním oveľa viac roboty. Dokázali sme si preto tvrdenia, ktoré nám uľahčia prácu s existenčnými kvantifikátormi.
- **Úloha:** Dokážte:
  1. $\vdash A_x[t] \to (\exists x)A$, kde t neobsahuje premenné, ktoré zostanú viazané.
  2. Ak $\vdash A \to B$ a x nemá voľný výskyt v B, potom $\vdash (\exists x)A \to B$.
- **Riešenie:** Nájdete v skriptách na strane 34. V jednom kroku dôkazov v učebnici je často zahrnutých viac krokov naraz. A občas sa tam používa tzv. pravidlo jednoduchého sylogizmu. Vychádza z dokázaného tvrdenia

  $$(T8)\ (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

  Pravidlo teda vyzerá

  $$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$
- **Poznámka:** Prvé tvrdenie z predchádzajúcej úlohy sa tiež nazýva duálna axióma špecifikácie. Z druhej časti ľahko odvodíme aj duálnu schému preskoku:

  $$(\forall x)(A \to B) \to ((\exists x)A \to B),\ \text{ak } x \text{ nemá voľný výskyt v } B.$$
- **Úloha:** Dokážte, že ak $\vdash A \to B$, tak
  a) $\vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$
  b) $\vdash (\exists x)A \to (\exists x)B$
- **Riešenie:**

  a)

1.	$\vdash$	$A \to B$	(predpoklad)
2.	$\vdash$	$(\forall x)A \to A$	(AŠ $x := x$)
3.	$\vdash$	$(\forall x)A \to B$	(sylogizmus 1,2)
4.	$\vdash$	$(\forall x)((\forall x)A \to B)$	(PG 3)
5.	$\vdash$	$(\forall x)((\forall x)A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$	(SP)
6.	$\vdash$	$((\forall x)A \to (\forall x)B)$	(MP 4,5)

  Všimnite si, že schému preskoku sme nemohli použiť skôr, lebo formula A mohla obsahovať voľný výskyt premennej x.

  b) Analogicky, treba použiť duálnu axiómu špecifikacie a duálnu schému preskoku